# 放物線に関する一定理とその背景

中沢, 貞治
九州大学教養部数学教室

津田, 丈夫
九州大学教養部数学教室

https://doi.org/10.15017/1448954

出版情報：九州大学教養部数学雑誌. 9 (1), pp.7-10, 1973-11. 九州大学教養部数学教室
バージョン：
権利関係：

Math. Rep.
XI-1, 1973.

# 放物線に関する一定理とその背景

中 沢 貞 治，津 田 文 夫

（1973年7月31日 受付）

著者の一人が Mathematical Gazette に次の定理を発表した。

(*A*) If from a point P on the line $x=-2a$ two tangents are drawn to the parabola $y^2=4ax$, where Q and R are points of contact, then the orthocentre of the triangle PQR is the origin, the vertex of the parabola. (Vol. LVI: No. 397, 1972)

これに関連して，栗田稔氏（名古屋大学教授）が

ある写像について——中沢氏の定理をめぐって——

を発表し，写像の立場から解説を加えられた。（現代数学，'73-8）

著者達は，この定理の成立する根拠について別方面からの考察を試みた。

〔I〕 先ず順序として，座標を用いての証明を与えておく。

Q，Rの座標をそれぞれ

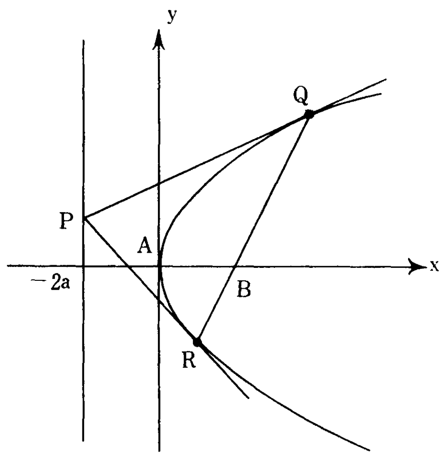
$$(at_1^2,\ 2at_1),\ (at_2^2,\ 2at_2)$$

とすれば，接線PQ，PRの方程式は

$$\text{PQ}:\ y=\frac{x}{t_1}+at_1$$

$$\text{PR}:\ y=\frac{x}{t_2}+at_2$$

（図 1）




である。したがって，その交点Pの座標は

$$x=at_1t_2,\ y=a(t_1+t_2)$$

で，与えられた条件から

$$at_1t_2=-2a \quad \therefore \quad t_1t_2=-2 \quad \cdots\cdots(1)$$

また，このときQからPRに下した垂線の方程式は

$$y=-t_2x+at_1(t_1t_2+2),$$

RからPQに下した垂線の方程式は

$$y=-t_1x+at_2(t_1t_2+2)$$

であるから，これらを $x$，$y$ について解けば，△PQR の垂心 H の座標は

$$x=-a(t_1t_2+2),\ y=a(t_1+t_2)(t_1t_2+2)$$

となる。したがって，(1) から

$$x=0,\ y=0$$

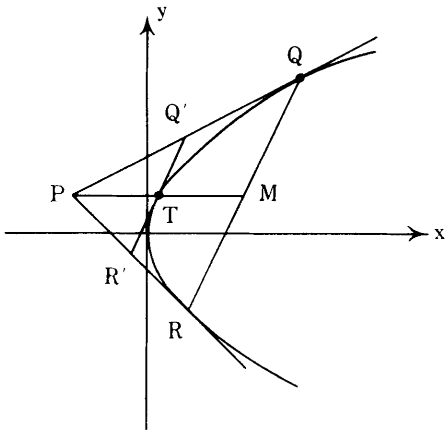
となり，Hは原点，すなわち放物線の頂点Aと一致する。

〔II〕 定理 (*A*) に関連して思い出されるのは，よく知られた次の定理であろう。

(***B***) 放物線 $y^2=4ax$ の上の異なる3点における接線で作られる三角形の垂心は準線 $x=-a$ の上にある。

いま，図1において，QRに平行な接線 Q′R′ を引き，接点をT，弦 QR の中点をMとすれば，3点 P, T, M は一直線上にある。(図2)

（図　2）




また，このとき

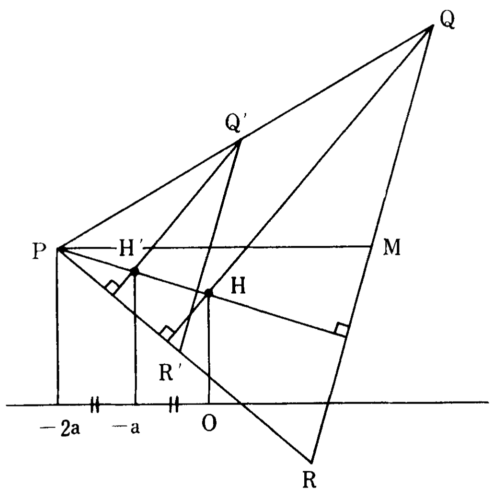
$$PQ : PQ' = PR : PR' = 2 : 1$$

であるから，△PQ′R′ の垂心 H′，△PQR の垂心 H について

$$PH' = H'H$$

が成立する。(図3)

（図　3）




したがって，P,H′,H を $x$ 軸に平行な直線上に正射影すれば，定理 (***B***) により，Hの $x$ 座標は0である。

すなわち，H は $y$ 軸上にある。

上の事実を知れば，次に直線 PA と QR との垂直を示せば，HがAと一致することになる。

さて，図4において，$d$ を準線とすれば，△TNF は二等辺三角形

で，Q′R′ は ∠NTF を二等分するから

$$NF \perp Q'R'$$

である。このとき PN＝AF から，PA∥NF で

$$PA \perp Q'R'$$

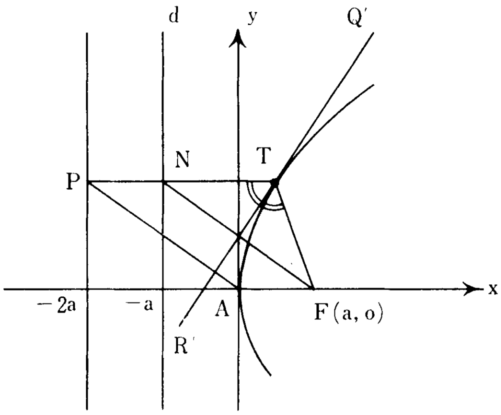
したがって

$$PA \perp QR \qquad \cdots\cdots(2)$$

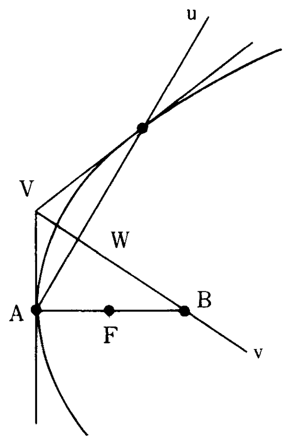
となる。

以上で，定理（*A*），（*B*）の関連が知られたが，(2) は次の定理（*C*）の特別な場合であることを見れば，（*A*）の背景が一層明確になるであろう。

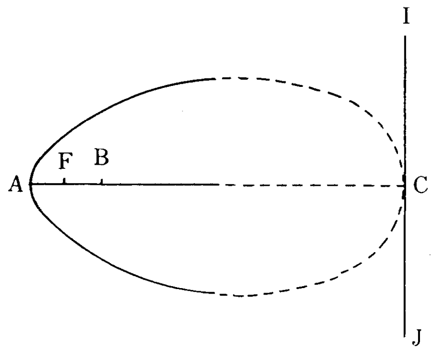
（図 4）




（図 5）




（図 6）




〔Ⅲ〕 図1において，Pの極線がQRであるから，QRと $x$ 軸との交点をBとすれば，Bの座標は $(2a,\ 0)$ となり，焦点FはABの中点であることを注意しておく。

（*C*） 放物線の頂点をA，焦点をFとし，ABの中点がFであるように点Bをとる。このとき，A，Bを通って放物線に関して互いに共役な直線 $u$, $v$ を引けば，その交点Wの軌跡はABを直径とする円である。

先ず，Wの軌跡が二次曲線 $K$ であることは知られている。また，対称性からABが $K$ の主軸である。

さて，虚円点をI，Jとすれば，直線IJはAB上の点Cで放物線に接する。この

とき，Ｆ は ＡＢ の 中点であるから， Ａ，Ｆ，Ｂ，Ｃ は調和点列である。 したがって，Ｉ（Ａ，Ｆ，Ｂ，Ｃ），Ｊ（Ａ，Ｆ，Ｂ，Ｃ） は調和線束となる。ここで， ＩＦ， ＪＦはともに放物線に接することに注意すれば， ＩＡ，ＩＢ； ＪＡ，ＪＢ は放物線に関し互いに共役な直線で， Ｉ，Ｊ は先に考えた二次曲線 $K$ の上にある。

すなわち，二次曲線 $K$ は虚円点Ｉ，Ｊを通り，$K$ は ＡＢ を直径とする円であることが分かる。

以上により， 図１に返れば， ＰＡ と ＱＲ はＡ，Ｂを通る互いに共役な直線であるから

$$PA \perp QR$$

が成り立つ。

九 州 大 学 教 養 部