九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

放物線に関する一定理とその背景

中沢，貞治
九州大学教養部数学教室

津田，丈夫
九州大学教養部数学教室

https://doi.org/10.15017/1448954

出版情報：九州大学教養部数学雑誌. 9 (1), pp.7-10, 1973-11. 九州大学教養部数学教室
バージョン：
権利関係：

Math. Rep.
XI-1, 1973.

放物線に関する一定理とその背景

中沢貞治，津田丈夫

(1973年7月31日　受付)

著者の一人が Mathematical Gazette に次の定理を発表した。

(*A*) If from a point P on the line $x=-2a$ two tangents are drawn to the parabola $y^2=4ax$, where Q and R are points of contact, then the orthocentre of the triangle PQR is the origin, the vertex of the parabola. (Vol. LVI: No. 397, 1972)

これに関連して，栗田稔氏（名古屋大学教授）が

ある写像について——中沢氏の定理をめぐって——

を発表し，写像の立場から解説を加えられた。(現代数学，'73-8)

著者達は，この定理の成立する根拠について別方面からの考察を試みた。

〔I〕 先ず順序として，座標を用いての証明を与えておく。

Q，Rの座標をそれぞれ

$$(at_1^2,\ 2at_1),\ (at_2^2,\ 2at_2)$$

とすれば，接線PQ，PRの方程式は

$$\mathrm{PQ}:\ y=\frac{x}{t_1}+at_1$$

$$\mathrm{PR}:\ y=\frac{x}{t_2}+at_2$$

である。したがって，その交点Pの座標は

$$x=at_1t_2,\ y=a(t_1+t_2)$$

で，与えられた条件から

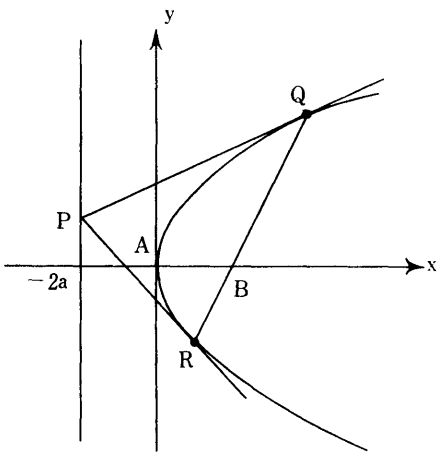
$$at_1t_2=-2a \quad \therefore \quad t_1t_2=-2 \quad \cdots\cdots(1)$$

また，このときQからPRに下した垂線の方程式は

$$y=-t_2x+at_1(t_1t_2+2),$$

RからPQに下した垂線の方程式は

(図　1)



$$y=-t_1x+at_2(t_1t_2+2)$$

であるから，これらを x, y について解けば，△PQR の垂心 H の座標は

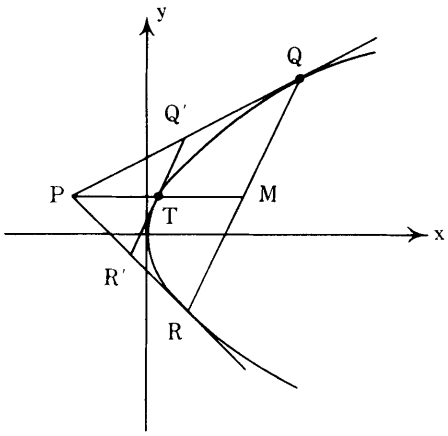
$$x=-a(t_1t_2+2),\ y=a(t_1+t_2)(t_1t_2+2)$$

となる。したがって，(1) から

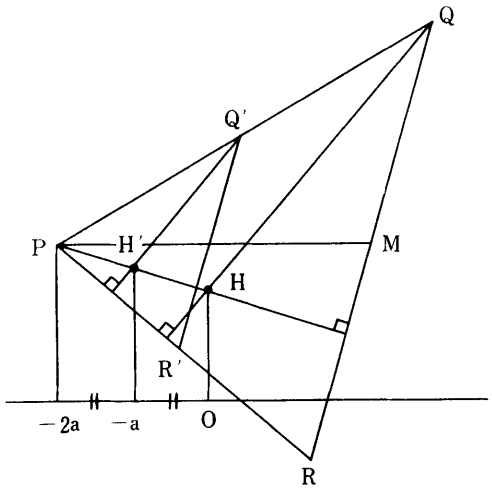
$$x=0,\ y=0$$

となり，Hは原点，すなわち放物線の頂点Aと一致する。

（図　2）



（図　3）



〔Ⅱ〕 定理（*A*）に関連して思い出されるのは，よく知られた次の定理であろう。

（*B*） 放物線 $y^2=4ax$ の上の異なる3点における接線で作られる三角形の垂心は準線 $x=-a$ の上にある。

いま，図1において，QRに平行な接線 Q′R′ を引き，接点をT，弦QR の中点をMとすれば，3点 P, T, M は一直線上にある。(図2)

また，このとき

$$PQ:PQ'=PR:PR'=2:1$$

であるから，△PQ′R′ の垂心 H′，△PQR の垂心 H について

$$PH'=H'H$$

が成立する。(図3)

したがって，P,H′,H を x 軸に平行な直線上に正射影すれば，定理（*B*）により，Hの x 座標は0である。

すなわち，H は y 軸上にある。

上の事実を知れば，次に直線 PA と QR との垂直を示せば，HがAと一致することになる。

さて，図4において，d を準線とすれば，△TNF は二等辺三角形

で，Q′R′ は ∠NTF を二等分するから

$$NF \perp Q'R'$$

である。このとき PN＝AF から，PA∥NF で

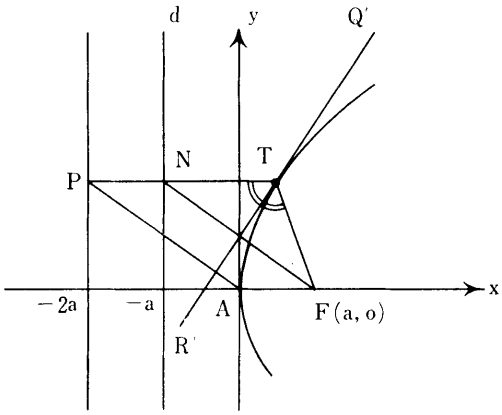
$$PA \perp Q'R'$$

したがって

$$PA \perp QR \qquad \cdots\cdots(2)$$

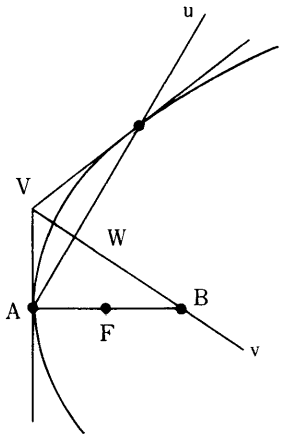
となる。

（図　4）

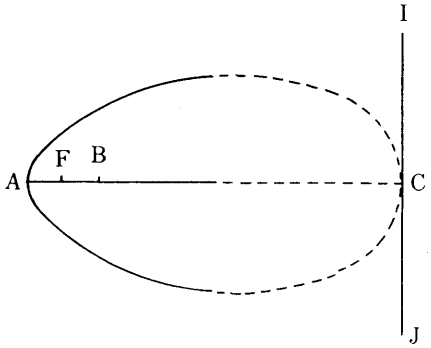


以上で，定理（*A*），（*B*）の関連が知られたが，(2) は次の定理（*C*）の特別な場合であることを見れば，（*A*）の背景が一層明確になるであろう。

（図　5）



（図　6）



〔Ⅲ〕 図1において，Pの極線がQRであるから，QRと x 軸との交点をBとすれば，Bの座標は $(2a, 0)$ となり，焦点FはABの中点であることを注意しておく。

（*C*）放物線の頂点をA，焦点をFとし，ABの中点がFであるように点Bをとる。このとき，A，Bを通って放物線に関して互いに共役な直線 u，v を引けば，その交点Wの軌跡はABを直径とする円である。

先ず，Wの軌跡が二次曲線 K であることは知られている。また，対称性からABが K の主軸である。

さて，虚円点をI，Jとすれば，直線IJはAB上の点Cで放物線に接する。この

とき，FはABの中点であるから，A, F, B, Cは調和点列である。したがって，I(A, F, B, C), J(A, F, B, C)は調和線束となる。ここで，IF，JFはともに放物線に接することに注意すれば，IA, IB；JA, JBは放物線に関し互いに共役な直線で，I，Jは先に考えた二次曲線Kの上にある。

すなわち，二次曲線Kは虚円点I，Jを通り，KはABを直径とする円であることが分かる。

以上により，図1に返れば，PAとQRはA，Bを通る互いに共役な直線であるから

$$PA \perp QR$$

が成り立つ。

九州大学教養部