

放物線に関する一定理とその背景

中沢, 貞治
九州大学教養部数学教室

津田, 丈夫
九州大学教養部数学教室

<https://doi.org/10.15017/1448954>

出版情報 : 九州大学教養部数学雑誌. 9 (1), pp. 7-10, 1973-11. 九州大学教養部数学教室
バージョン :
権利関係 :

放物線に関する一定理とその背景

中 沢 貞 治, 津 田 丈 夫

(1973年7月31日 受付)

著者の一人が *Mathematical Gazette* に次の定理を発表した。

(A) If from a point P on the line $x = -2a$ two tangents are drawn to the parabola $y^2 = 4ax$, where Q and R are points of contact, then the orthocentre of the triangle PQR is the origin, the vertex of the parabola.

(Vol. LVI: No. 397, 1972)

これに関連して、栗田稔氏（名古屋大学教授）が

ある写像について——中沢氏の定理をめぐって——

を発表し、写像の立場から解説を加えられた。（現代数学, '73-8）

著者達は、この定理の成立する根拠について別方面からの考察を試みた。

[I] 先ず順序として、座標を用いての証明を与えておく。

Q, Rの座標をそれぞれ

$$(at_1^2, 2at_1), (at_2^2, 2at_2)$$

とすれば、接線PQ, PRの方程式は

$$PQ: y = \frac{x}{t_1} + at_1$$

$$PR: y = \frac{x}{t_2} + at_2$$

である。したがって、その交点Pの座標は

$$x = at_1t_2, y = a(t_1 + t_2)$$

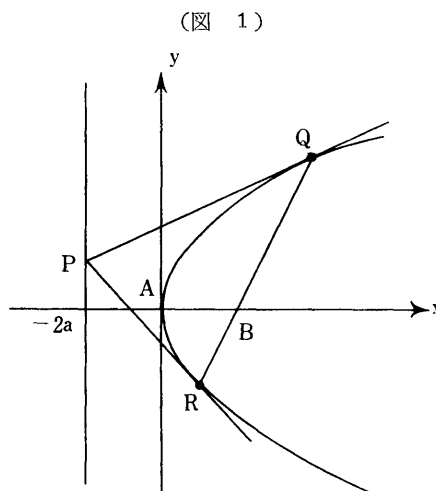
で、与えられた条件から

$$at_1t_2 = -2a \quad \therefore t_1t_2 = -2 \quad \dots\dots(1)$$

また、このときQからPRに下した垂線の方程式は

$$y = -t_2x + at_1(t_1t_2 + 2),$$

RからPQに下した垂線の方程式は



$$y = -t_1x + at_2(t_1t_2 + 2)$$

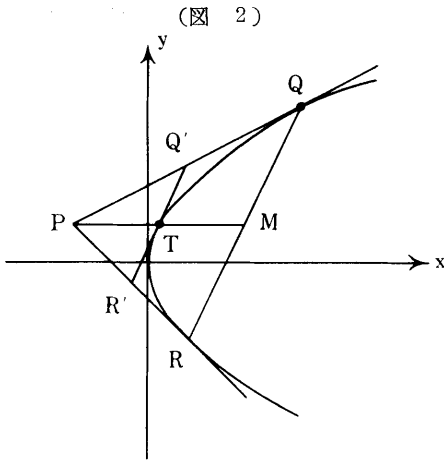
であるから, これらを x, y について解けば, $\triangle PQR$ の垂心 H の座標は

$$x = -a(t_1t_2 + 2), y = a(t_1 + t_2)(t_1t_2 + 2)$$

となる。したがって, (1) から

$$x = 0, y = 0$$

となり, H は原点, すなわち放物線の頂点 A と一致する。



(図 2)

〔II〕 定理 (A) に関連して思い出されるのは, よく知られた次の定理であろう。

(B) 放物線 $y^2 = 4ax$ の上の異なる 3 点における接線で作られる三角形の垂心は準線 $x = -a$ 上にある。

いま, 図 1 において, QR に平行な接線 $Q'R'$ を引き, 接点を T , 弦 QR の中点を M とすれば, 3 点 P, T, M は一直線上にある。(図 2)

また, このとき

$$PQ : PQ' = PR : PR' = 2 : 1$$

であるから, $\triangle PQ'R'$ の垂心 H' , $\triangle PQR$ の垂心 H について

$$PH' = H'H$$

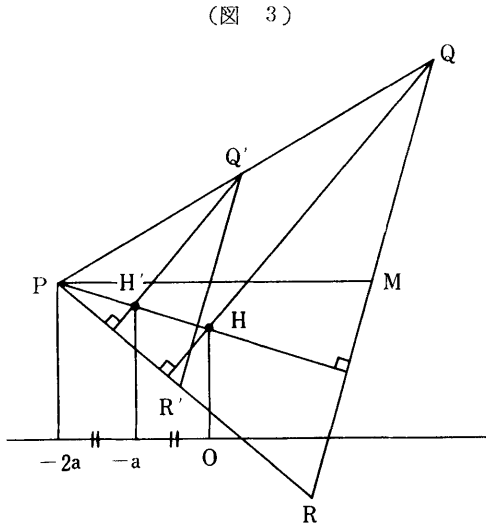
が成立する。(図 3)

したがって, P, H', H を x 軸に平行な直線上に正射影すれば, 定理 (B) により, H の x 座標は 0 である。

すなわち, H は y 軸上にある。

上の事実を知れば, 次に直線 PA と QR との垂直を示せば, H が A と一致することになる。

さて, 図 4 において, d を準線とすれば, $\triangle TNF$ は二等辺三角形



(図 3)

で、 $Q'R'$ は $\angle NTF$ を二等分するから

$$NF \perp Q'R'$$

である。このとき $PN = AF$ から、 $PA \parallel NF$ で

$$PA \perp Q'R'$$

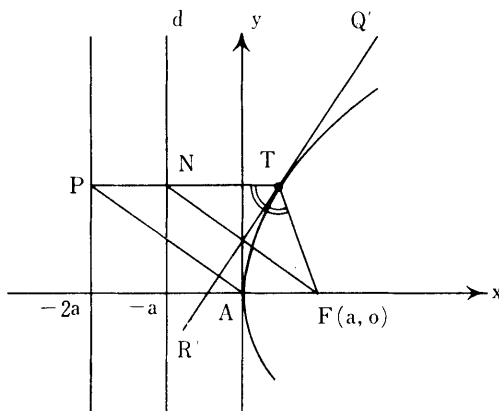
したがって

$$PA \perp QR \quad \dots\dots(2)$$

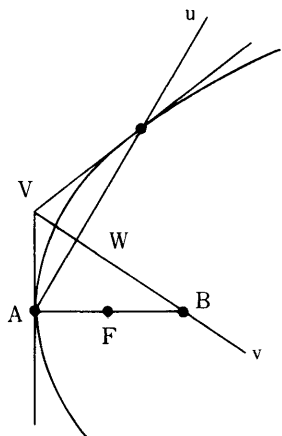
となる。

以上で、定理 (A), (B) の関連が知られたが、(2) は次の定理 (C) の特別な場合であることを見れば、(A) の背景が一層明確になるであろう。

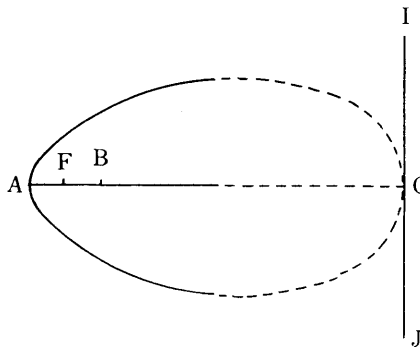
(図 4)



(図 5)



(図 6)



[Ⅲ] 図1において、Pの極線がQRであるから、QRとx軸との交点をBとすれば、Bの座標は $(2a, 0)$ となり、焦点FはABの中点であることを注意しておく。

(C) 放物線の頂点をA、焦点をFとし、ABの中点がFであるように点Bをとる。このとき、A、Bを通って放物線に関して互いに共役な直線 u, v を引けば、その交点Wの軌跡はABを直径とする円である。

まず、Wの軌跡が二次曲線 K であることは知られている。また、対称性からABが K の主軸である。

さて、虚円点をI、Jとすれば、直線IJはAB上の点Cで放物線に接する。この

とき, F は AB の中点であるから, A, F, B, C は調和点列である。したがって, $I(A, F, B, C), J(A, F, B, C)$ は調和線束となる。ここで, IF, JF はともに放物線に接することに注意すれば, $IA, IB; JA, JB$ は放物線に関し互いに共役な直線で, I, J は先に考えた二次曲線 K の上にある。

すなわち, 二次曲線 K は虚円点 I, J を通り, K は AB を直径とする円であることが分かる。

以上により, 図1に返れば, PA と QR は A, B を通る互いに共役な直線であるから

$$PA \perp QR$$

が成り立つ。

九州大学教養部