

Bernays-Gödelの公理的集合論とZermelo-Fraenkel の公理的集合論の同値について

篠崎, 喜賢

<https://doi.org/10.15017/1448936>

出版情報：九州大学教養部数学雑誌. 7 (1), pp.13-21, 1969-09. 九州大学教養部数学教室
バージョン：
権利関係：



Math. Rep.
VII-1, 1969.

Bernays-Gödel の公理論的集合論と *Zermelo-Fraenkel* の公理論的集合論の同値について

篠 崎 喜 賢
[1969. 5. 1.]

- §1. *Calculus HLC*
- §2. 第1階の公理系の *predicative extension*.
- §3. *Bernays-Gödel* の集合論と *Zermelo-Fraenkel* の集合論の同値

§ 1. *Calculus HLC*.

HLC: *Second order* の *ramified theory* に対する *formal system* の1つ.

竹内外史: *A metamathematical theorem on functions*. 日本数学会欧文誌, 第8巻.

1. 記 号

自由対象変数, 束縛対象変数, 対象記号, 関数記号, 述語記号のほかに

自由述語変数: $A, B, C, \dots$

束縛述語変数: $X, Y, Z, \dots$

を用いる.

論理記号としては通常用いる,

$\neg, \wedge, \vee, \vdash, \forall, \exists$

のほかに λ を用いる.

なお, $a \vdash\vdash b$ は $(a \vdash b) \wedge (b \vdash a)$ の略記号として用いる.

2. *term* は通常の通りとする.

また, $a(a)$ が *first order* の *formula* であるとき

$\lambda x a(x)$

という表現を許し, 任意の *term* t に対し

$\{\lambda x a(x)\}(t)$

を *formula* と考える. ここで a は自由対象変数で x は $a(a)$ に含まれない束縛対

象変数とする.

また, 任意の *formula* $\mathfrak{F}(A)$ に対し, A が自由述語変数, X が $\mathfrak{F}(A)$ に含まれない束縛述語変数であるとき,

$$\forall X \mathfrak{F}(X), \quad \exists X \mathfrak{F}(X)$$

も *formula* であるとし, そのほかは普通のとおりとする.

3. 証明図

3.1. Grundsequenz : $\mathfrak{d} \longrightarrow \mathfrak{d}$

3.2. 推論規則

3.21. 式の構造についての推論図

$$\begin{array}{ll} \text{増: 左} & \frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\mathfrak{d}, \Gamma \rightarrow \Theta} \qquad \text{右} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{d}} \\ \\ \text{減: 左} & \frac{\mathfrak{d}, \mathfrak{d}, \Gamma \rightarrow \Theta}{\mathfrak{d}, \Gamma \rightarrow \Theta} \qquad \text{右} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{d} \mathfrak{d}}{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{d}} \\ \\ \text{換: 左} & \frac{\Gamma, \mathfrak{d}, \mathfrak{c}, \Delta \rightarrow \Theta}{\Gamma, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \Delta \rightarrow \Theta} \qquad \text{右} \quad \frac{\Delta \rightarrow \Theta, \mathfrak{d}, \mathfrak{c}, \Gamma}{\Delta \rightarrow \Theta, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \Gamma} \\ \\ \text{三段論法 (cut)} & \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{d} \mathfrak{d}, \Delta \rightarrow \Pi}{\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Pi} \end{array}$$

3.22. 論理記号 (LK に対する) についての推論図

$$\begin{array}{ll} \neg : \text{左} & \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{a}}{\neg \mathfrak{a}, \Gamma \rightarrow \Theta} \qquad \text{右} \quad \frac{\mathfrak{a}, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \neg \mathfrak{a}} \\ \\ \wedge : \text{左} & \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\mathfrak{a}, \Gamma \rightarrow \Theta}{\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}, \Gamma \rightarrow \Theta} \\ (2) \quad \frac{\mathfrak{b}, \Gamma \rightarrow \Theta}{\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}, \Gamma \rightarrow \Theta} \end{array} \qquad \text{右} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{a} \Delta \rightarrow \Pi, \mathfrak{b}}{\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Pi, \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}} \\ \\ \vee : \text{左} & \frac{\mathfrak{a}, \Gamma \rightarrow \Delta \mathfrak{b}, \Gamma \rightarrow \Delta}{\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}, \Gamma \rightarrow \Delta} \qquad \text{右} \quad \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \mathfrak{a}}{\Gamma \rightarrow \Delta, \mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}} \\ (2) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \mathfrak{b}}{\Gamma \rightarrow \Delta, \mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}} \end{array} \\ \\ \vdash : \text{左} & \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{a} \mathfrak{b}, \Delta \rightarrow \Pi}{\mathfrak{a} \vdash \mathfrak{b}, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Pi} \qquad \text{右} \quad \frac{\mathfrak{a}, \Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{b}}{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{a} \vdash \mathfrak{b}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\forall : \text{左} & \frac{\mathfrak{F}(t), \Gamma \rightarrow \theta}{\forall x \mathfrak{F}(x), \Gamma \rightarrow \theta} \quad \text{右} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{F}(a)}{\Gamma \rightarrow \theta, \forall x \mathfrak{F}(x)} \\
& (a \text{ は下式に入っていないものとする.}) \\
\exists : \text{左} & \frac{\mathfrak{F}(a), \Gamma \rightarrow \Delta}{\exists x \mathfrak{F}(x), \Gamma \rightarrow \Delta} \quad \text{右} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \mathfrak{F}(t)}{\Gamma \rightarrow \Delta, \exists x \mathfrak{F}(x)} \\
& (a \text{ は下式に入っていないものとする.})
\end{array}$$

3. 23. *HLC* に対して追加される論理記号についての推論図.

$$\begin{array}{ll}
\lambda : \text{左} & \frac{a(t), \Gamma \rightarrow \theta}{\{\lambda x a(x)\}(t), \Gamma \rightarrow \theta} \quad \text{右} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \theta, a(t)}{\Gamma \rightarrow \theta, \{\lambda x a(x)\}(t)} \\
\forall : \text{左} & \frac{\mathfrak{F}(t), \Gamma \rightarrow \theta}{\forall x \mathfrak{F}(X), \Gamma \rightarrow \theta} \quad \text{右} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{F}(A)}{\Gamma \rightarrow \theta, \forall x \mathfrak{F}(X)} \\
& (A \text{ は下式に入っていないものとする.}) \\
\exists : \text{左} & \frac{\mathfrak{F}(A), \Gamma \rightarrow \theta}{\exists x \mathfrak{F}(X), \Gamma \rightarrow \theta} \quad \text{右} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \theta, \mathfrak{F}(t)}{\Gamma \rightarrow \theta, \exists x \mathfrak{F}(X)} \\
& (A \text{ は下式に入っていないものとする.})
\end{array}$$

(注 意)

HLC において, $\forall$, $\vdash$, $\exists$ に関する *inference rule* は,

$$a \forall b, a \vdash b, \exists x \mathfrak{F}(x), \exists x \mathfrak{F}(X)$$

を各々

$$\neg(\neg a \wedge \neg b), \neg(\neg b \wedge a), \neg \forall x \neg \mathfrak{F}(x), \neg \forall x \neg \mathfrak{F}(X)$$

と定義すれば本質的には必要ない.

3. *HLC* でも *cut-elimination theorem* が成立する.

すなわち, *HLC* において *provable* な式は, 三段論法を用いなくても *HLC provable* である. この定理は, *formula* の *Grad* を次のように定義することによって *LK* における *cut-elimination theorem* の証明と同様に証明することが出来る.

Grad の定義: 1つの *formula* に表われる *HLC* としての $\forall$, $\exists$ の個数を m , 又 *LK* としての $\forall$, $\exists$ および論理記号 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\vdash$, λ の個数を n として, その *formula* の *Grad* は,

$$\omega \cdot m + n$$

と定める.

§ 2. 第1階の公理系の *predicative extension*.

A : 与えられた *first order* の公理系

(*first order* の *closed formula* の集合)

今, $\mathfrak{F}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ のことを,

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \mathfrak{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

の *specialization* ということにすれば, A と *formula*

$$\forall X \mathfrak{F}(X), \forall Y \mathfrak{G}(Y), \dots$$

の集合が A の *predicative extension* とは次の1), 2) が成立するときであるとする.

- 1) $\forall X \mathfrak{F}(X)$ が *closed formula* であること,
- 2) 任意の $\lambda x a(x)$ に対して

$$\mathfrak{F}(\lambda x a(x)), \mathfrak{G}(\lambda x a(x)), \dots$$

が A の公理の *specialization* であること.

(注 意)

上述のことは簡単のために *one argument* の場合に限ったが,

$$\forall X \forall Y \mathfrak{F}(X, Y)$$

等でもよい.

基本定理

first order の公理系 A の *predicative extension* を今 $\overline{A}$ と書くことにすれば, $\overline{A}$ が *HLC* において *consistent* であるためには A が *first order* の *predicate calculus* (例えば *LK*) で *consistent* であることである.

(証 明)

$\overline{A}$ を A と *formula*,

$$\forall X \mathfrak{F}(X), \forall Y \mathfrak{G}(Y), \dots$$

の集合とする.

$\overline{A}$ が *HLC-inconsistent* とは, A の中の有限個の公理の列 Γ をとったとき,

$$\forall X \mathfrak{F}(X), \Gamma \rightarrow$$

が *HLC-provable* ということであるが, しかれば, $\xi, \eta, \dots$ を自由対象変数の列として,

$$\begin{aligned} & \forall \xi_1 \exists (\lambda x_1 a_1(x_1, \xi_1)), \forall \xi_2 \exists (\lambda x_2 a_2(x_2, \xi_2)), \dots, \\ & \forall \eta_1 \exists (\lambda y_1 b_1(y_1, \eta_1)), \dots, \Gamma \rightarrow \end{aligned}$$

が *LK-provable* となってしまうことを示せば十分だろう。

今, *HLC* において P を,

$$\forall X \exists (X), \Gamma \rightarrow$$

の *cut*, $\exists$, $\forall$, $\vdash$ の *inference* を含まない証明図とする。証明図 P において *formula* $\forall X \exists (X)$ に注目 (Γ は first-order の formula の列) すれば, P の中に次の型の推論図が存在することが分るだろう。

$$\frac{\exists (\lambda x a(x)), \Gamma_1 \rightarrow \theta_1}{\forall X \exists (X), \Gamma_1 \rightarrow \theta_1}$$

この推論図における *chief-formula* $\forall X \exists (X)$ を $\forall \xi \exists (\lambda x a(x, \xi))$ の型の *formula* でおき変えてやることによって得られる新たな図形 P' はその終式が,

$$\forall \xi_1 \exists (\lambda x_1 a_1(x_1, \xi_1)), \dots \Gamma \rightarrow$$

の型となり, P' が *LK* における 1 つの証明図となっているようにすることが出来る。よって定理が成立することが分る。

§ 3. Bernays-Gödel の集合論と Zermelo-Fraenkel の集合論の同値.

(注 意)

以下 Bernays-Gödel の集合論を *BG*, Zermelo-Fraenkel の集合論を *ZF* と略記する。

ここでは Zermelo に始まり, Fraenkel, Van Neuman, Bernays, Gödel などによって研究されてきた公理的集合論のうち, *ZF* と *BG* が「実質的」には全く同じであることを「基本定理」により証明する。

今日単に集合論といえば *ZF* か *BG* を指すが, *ZF* は *constant* も *function* も持たず, *predicate* として「=」, 「 $\in$ 」のみをもつ, また *BG* は Bernays が Van Neumann の公理系にヒントを得て新たに *class* (類) の概念を導入しこれを改良したもので *predicate* として「=」, 「 $\in$ 」のほか $M(*)$ (集合である), $Cl(*)$ (類である) という *predicate* のみからなり, 前者および後者の公理系は次のようなものである

1. *ZF* の公理系について.

公理 1. *Extensionality*

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \mid \mid z \in y) \mid \mid x = y)$$

説明：二つの集合はその要素が全体として一致するとき等しい。言い換えると集合はその要素によって決定されるということである。

2. *Null Set*

$$\exists x \forall y (\neg y \in x)$$

3. *Unordered Pairs*

$$\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \mid \mid w = x \vee w = y)$$

説明：任意の二つの集合に対して、それらだけを要素にもつ集合が存在することを主張している。

4. *Sum Set*

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \mid \mid \exists t (z \in t \wedge t \in x))$$

5. *Power Set*

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \mid \mid \forall u (u \in z \mid \mid u \in x))$$

6. *Infinity*

$$\exists x (\phi \in x \wedge \forall y (y \in x \mid \mid \{y\} \in x))$$

説明： ϕ は空集合、 $\{y\}$ は y のみを要素にもつ集合を示す。

7. *Replacement (Axiom schema)*

$$\forall t_1, \dots, \forall t_k (\forall x \exists! y A_n(x, y, t_1, \dots, t_k) \mid \mid \forall u \exists v B(u, v))$$

ここで、

$$B(u, v) \equiv \forall r (r \in v \mid \mid \exists s (s \in u \wedge A_n(s, r, t_1, \dots, t_k)))$$

$$\exists! x A(x) \equiv \exists x A(x) \wedge \forall y \forall z (A(y) \wedge A(z) \mid \mid y = z)$$

である。

説明：任意の集合 a と a の要素の上での集合論の言葉によって定義された関数 f とがあるとき x が a の要素を動くときの $f(x)$ の全体は1つの集合となることを主張する。

8. *Regularity (weak form)*

$$\forall x \exists y (x = \phi \vee (y \in x \wedge \forall z (z \in x \mid \mid \neg z \in y)))$$

説明：集合は空であるか、「 $\in$ 」に関して *minimal* な要素を必ず含むことを示す。

8'. *Regularity (strong form)*

$$\exists x A(x) \vdash \exists x (A(x) \wedge \forall y \neg (A(y) \wedge (y \in x)))$$

説明：集合についてその *Rank* というものを考えることによって、

$$8 \Leftrightarrow 8'$$

を証明することが出来る。

以上が **ZF** に対する公理であるが、このほかに「 $=$ 」に対する公理が含まれる。

2. **BG** の公理系について (A, B, C 三群より成る.)

2.1. A 群の公理：基本的なものである。

公理 1. $Cl(x)$

説明：集合は *class* (類)である。

$$2. \quad X \in Y \vdash M(X)$$

説明：類の要素となり得るものは集合に限る。

3. *Extensionality*

$$\forall u (u \in X \mid \neg u \in Y) \vdash X = Y$$

説明：二つの類はその要素が一致するときに限って等しくなる。

4. *Unordered Pairs*

$$\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \mid \neg w = x \vee w = y)$$

2.2. B 群の公理：類の存在に関するものである。

5. $\in$ *Relation*

$$\exists X \forall y \forall z (\langle yz \rangle \in X \mid \neg y \in z)$$

6. *Intersection*

$$\forall X \forall Y \exists Z \forall u (u \in Z \mid \neg (u \in X \wedge u \in Y))$$

7. *Complement*

$$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \mid \neg (z \in X))$$

8. *Domain*

$$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \mid \neg \exists u (\langle uz \rangle \in X))$$

9. *Direct Product*

$$\forall X \exists Y \forall z \forall u (\langle uz \rangle \in Y \mid \neg z \in X)$$

10. *Permutation*

$$\forall X \exists Y \forall z \forall u (\langle zu \rangle \in Y \mid \neg \langle uz \rangle \in X)$$

11. *Permutation*

$$\forall X \exists Y \forall z \forall u \forall v (\langle zuv \rangle \in Y \mid \mid \langle uvz \rangle \in X)$$

12. *Permutation*

$$\forall X \exists Y \forall z \forall u \forall v (\langle zuv \rangle \in Y \mid \mid \langle zv u \rangle \in X)$$

(注 意)

$\{\{x\}, \{x, y\}\}$ を $\langle xy \rangle$ と書く, 又 $\langle x \langle yz \rangle \rangle$ を $\langle xyz \rangle$ と書くことにする.

(説明) 上にあげた B 群の公理は, $\langle a_1, \dots, a_m \rangle A \mid \mid a(a_1, \dots, a_m, A_1, \dots, A_k)$ となるような類 A の存在と同値であり, この存在定理を証明するのに必要な公理群である.

2.3. C 群の公理: 集合の存在に関するものである.

13. *Infinity*

$$\exists x (\phi \in x \wedge \forall y (y \in x \mid \mid y U \{y\} \in x))$$

説明: $c \in a \setminus c \in b$ を $c \in a \cup b$ と書く.

14. *Sum Set*

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \mid \mid \exists w (z \in w \wedge w \in x))$$

15. *Power Set*

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \mid \mid \forall u (u \in z \mid \mid u \in x))$$

16. *Replacement*

$$\forall X (\forall u (\forall v (\langle uv \rangle \in X) \mid \mid \forall u \exists v (v \text{ は } X \text{ によって定義される } u \text{ の上の function の range}))$$

ここで文章の部分は,

$$\forall t (t \in v \mid \mid \exists w (w \in u \wedge \langle wt \rangle \in X))$$

のことである.

17. *Regularity*

$$\forall X (X \neq \phi \mid \mid \exists u (u \in X \wedge \forall y (y \in X \mid \mid \neg y \in u)))$$

以上が BG に対する公理である. さて, ZF と BG の同値の証明であるが基本定理における A を ZF の公理にとり A の *Predicative extension* を $\bar{A}$ とするとき HLC で $\bar{A}$ から BG の公理をすべて証明すればそれで十分だろう. 今, $\bar{A}$ を A と二つの formula

$$\forall X \mathfrak{F}(X), \forall X \mathfrak{G}(X)$$

の集まりとして,

$\mathfrak{F}(X)$ を *Replacement* の公理

$\mathfrak{G}(X)$ を *Regularity* の公理

にとればまず, **BG** の *Replacement* と *Regularity* は成立する.

また **B** 群の公理は,

$$\lambda x(\exists x_1, \dots, x_n)(x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \wedge a(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m))$$

を考えればよい.

残りの公理に対しては,

$$a \in B : \exists x(a = x \wedge x \in B)$$

$$A \in b : \exists x(x = A \wedge x \in b)$$

$$A \in B : \exists x(x = A \wedge x \in B)$$

$$a = B : \forall x(x \in a \mid \mid x \in B)$$

$$A = b : \forall x(x \in A \mid \mid x \in b)$$

$$A = B : \forall x(x \in A \mid \mid x \in B)$$

また,

$$M(A) : \exists x(x = A)$$

$$Cl(a) : \exists X(a = X)$$

とすればよい.

(注 意)

選択公理についても, その形式さえ確定すれば同様にとり扱える.

例えば,

$$x \neq \emptyset \vdash f(x) \in x$$

の型に対しては,

$$\lambda y(\exists x(y = \langle f(x), x \rangle))$$

を考えればよい.

文 献

1. K. Gödel, *The consistency of the continuum hypothesis*, 1951.
2. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, *Foundation of Set theory*, 1958.
3. 竹内外史: *A metamathematical theorem on functions* 日本数学会欧文誌, 第8巻