

連を併用する管理図の研究 I : R管理図

中山, 尊

<https://doi.org/10.15017/1448929>

出版情報 : 九州大学教養部数学雑誌. 5 (1), pp. 21-35, 1967-03. 九州大学教養部数学教室
バージョン :
権利関係 :



連を併用する管理図の研究 I

— R 管理図 —

中山 尊

[1967.2.6 受付]

§1. ま え が き

管理図は今日ではいろいろな目的に使われているようであるが、一番主要なしかも本来の目的は「工程に異常が生じたとき、出来るだけ早く発見して工程を正常にもどし管理すること」にある。

従来の管理図は 3σ 管理図に限られていたので、管理図の効率ということはあまり考えられなかった。ここでは管理図の効率を定義し、瀬口 [6] が $\bar{x}$ 管理図について研究した方法により、 R 管理図についても同様の研究を試みる。そして従来の R 管理図を連を併用して少し改良することにより、おもしろい結果をえたので報告する。

§2. 管理図の効率

管理図による工程の管理は、統計的検定の考え方と本質的に同じである。しかし統計的検定はかならずしも時間に関係ないが、工程の管理は時間的な要素が非常に重要である。まず管理図の効率を次のように定義する。

定義 工程における（製品の）特性値の分布^[註1]の family を $P \equiv \{P_\theta; \theta \in \Theta\}$ 、工程が正常のときの分布は $P_{\theta_0} \in P$ 、異常のときの分布を $P_\theta \in P (\theta \neq \theta_0)$ とする。データをある個数宛まとめて統計量を求めて打点する。このとき管理図には、工程が正常および異常と判断される基準を決めておく。今工程が正常のとき、「異常」と判断されるまでのデータの平均個数を T_0 、その逆数を $\alpha_0 (\equiv 1/T_0)$ 、工程が異常（分布が P_θ ）になってから、「異常」と判断されるまでのデータの平均個数を T_θ 、その逆数を $\alpha_\theta (\equiv 1/T_\theta)$ とおく。このとき $(\alpha_0, \alpha_\theta)_{\theta \in \Theta}$ を管理図の効率といい、 θ の関数 α_θ のグラフを管理図の OC 曲線（又は曲面）と呼ぶ。

この定義は、特に $\bar{x}$ 管理図の場合について瀬口 [6] によって与えられたものを一般化したものである。ここでは R 管理図について検討するため次の仮定をおく。

仮定 1. 工程は正規分布にしたがう。

[註 1] 以後は簡単に「工程の分布」という。

仮定 2. 工程が正常のときには $N(\mu, \sigma^2)$ 従う製品を製造し、異常状態では $N(\mu, (l\sigma)^2)$ ($l \geq 1$) に従う製品を製造する。すなわち $P = \{P_l = N(\mu, (l\sigma)^2); l \geq 0\}$ で parameter θ は l である。

仮定 3. データは等間隔に 1 個宛とすることにする。

仮定 4. データは無作為標本とみなせるものとする。

仮定 1. は、正規分布の場合について研究しておけば、多くの場合分布の型が異っても正規分布の場合の結論が成り立つという理由から。仮定 2. は、工程が異常のときの分布は $N(\mu', \sigma^2)$, $N(\mu, \sigma'^2)$, $N(\mu', \sigma'^2)$ ($\mu \neq \mu'$, $\sigma \neq \sigma'$) 等が考えられるが、 R 管理図では主として工程のバラツキを問題にするので、説明を簡明にするためのものである。仮定 3, 4 は 4 節の定理で独立試行列という条件を充すための仮定である。

さて R 管理図の場合、仮定 1, 2 より $T_0, \alpha_0, T_\theta, \alpha_\theta$ は次のようにかく。

$$T_0 = T_1^*, \quad \alpha_0 = \alpha_1^*, \quad \alpha_1^* = 1/T_1^*, \quad T_\theta = T_l^*, \quad \alpha_\theta = \alpha_l^*, \quad \alpha_l^* = 1/T_l^*.$$

また、OC 曲線は l の関数 α_l^* の変化を表わす。後に示すように効率 (α_l^*, α_l^*) には特に R を求めるデータの個数 n の影響が大きく、 n を無視出来ない。また定義から、 α_l^* は $\alpha_0 = \alpha_1^* = (N(\mu, \sigma^2))$ のときの α_l^* および R 管理図の型 C^* に関係する。したがって $\alpha_l^* = \alpha_l^*(C^*, \alpha_l^*, n)$ と表わすべきだが、特に必要な場合を除いて α_l^* などと略記する。

§3. 管理図の型と記号

[2], [3], [6] (末尾文献番号) などの結果から、 R 管理図の型は $C^*(1)$, $C^*(2)$, $C^*(1, 2)$ の 3 つを考えれば十分だと考えられる (もっとも、 $C^*(1, r)$ ($r \geq 3$) は一応問題になるが、他の型たとえば $C^*(1, 2, 3)$ 等は実用上あまり意味がない)。ここでとりあげる管理図の型や、必要な記号を第 1 図で示す。記号の意味は

(1) $\otimes$, $(\overline{\otimes} - \overline{\otimes})$ 等は、このようなとき工程は「異常」と判断されることを示す。

(2) $\tilde{T}_l^* \equiv T_l^*/n$ (n は R を求めるデータの個数 [以下同様]) とおく。したがって、 $\tilde{T}_l^*$ は工程が異常となってから「異常」と判断されるまでの R の個数を表わす。 $T_l^*, \tilde{T}_l^*$ も α_l^* と同様 C^*, α_l^*, n に関係する l の関数である。

(3) E_s^+, E_s^- はその段に R が打点される事象で、 $p_s^+ = p_s^+(l) = P(E_s^+)$, $p_s^- = p_s^-(l) = P(E_s^-)$ は工程が $N(\mu, (l\sigma)^2)$ にしたがうときに事象 E_s^+ または E_s^- が起る確率。

(4) T_s^+, T_s^- は事象 E_s^+ または E_s^- の長さ s の連が初めて起るまでの R の平均個数。

(5) $D_{s+}^* (\equiv D_{s+}(C^*, \alpha_l^*, n))$, D_{s-}^* または $\bar{D}_{s+}^*$, $\bar{D}_{s-}^*$ は管理線を引くための係数で、

後で表に示す。

型	記号(型)	$T_i^*, \tilde{T}_i^*$	α_i^*	
$D_{1+}^* \sigma = \bar{D}_{1+}^* \bar{R}$	$\otimes \quad E_1^+ \quad p_1^+ = p_1^+(l) \quad T_1^+$	$C^*(1)$	$T_1^*(1)$ $\tilde{T}_1^*(1)$	$\alpha_1^*(1)=1/T_1^*(1)$
$D_{1-}^* \sigma = \bar{D}_{1-}^* \bar{R}$	$\otimes \quad E_1^- \quad p_1^- = p_1^-(l) \quad T_1^-$			
$D_{2+}^* \sigma = \bar{D}_{2+}^* \bar{R}$	$\otimes - \otimes \quad E_2^+ \quad p_2^+ = p_2^+(l) \quad T_2^+$	$C^*(2)$	$T_2^*(2)$ $\tilde{T}_2^*(2)$	$\alpha_2^*(2)=1/T_2^*(2)$
$D_{2-}^* \sigma = \bar{D}_{2-}^* \bar{R}$	$\otimes - \otimes \quad E_2^- \quad p_2^- = p_2^-(l) \quad T_2^-$			
$D_{1+}^* \sigma = \bar{D}_{1+}^* \bar{R}$	$\otimes \quad E_1^+ \quad p_1^+ = p_1^+(l) \quad T_1^+$	$C^*(1,2)$	$T_1^*(1,2)$ $\tilde{T}_1^*(1,2)$	$\alpha_1^*(1,2)=1/T_1^*(1,2)$
$D_{2+}^* \sigma = \bar{D}_{2+}^* \bar{R}$	$\otimes - \otimes \quad E_2^+ \quad p_2^+ = p_2^+(l) \quad T_2^+$			
$D_{2-}^* \sigma = \bar{D}_{2-}^* \bar{R}$	$\otimes - \otimes \quad E_2^- \quad p_2^- = p_2^-(l) \quad T_2^-$			
$D_{1-}^* \sigma = \bar{D}_{1-}^* \bar{R}$	$\otimes \quad E_1^- \quad p_1^- = p_1^-(l) \quad T_1^-$			
$D_{1+}^* \sigma = \bar{D}_{1+}^* \bar{R}$	$\otimes \quad E_1^+ \quad p_1^+ = p_1^+(l) \quad T_1^+$	$C^*(1,r)$	$T_1^*(1,r)$ $\tilde{T}_1^*(1,r)$	$\alpha_1^*(1,r)=1/T_1^*(1,r)$
$D_{r+}^* \sigma = \bar{D}_{r+}^* \bar{R}$	$\otimes - \otimes \cdots \otimes \quad E_r^+ \quad p_r^+ = p_r^+(l) \quad T_r^+$ r 個			
$D_{r-}^* \sigma = \bar{D}_{r-}^* \bar{R}$	$\otimes - \otimes \cdots \otimes \quad E_r^- \quad p_r^- = p_r^-(l) \quad T_r^-$ r 個			
$D_{1-}^* \sigma = \bar{D}_{1-}^* \bar{R}$	$\otimes \quad E_1^- \quad p_1^- = p_1^-(l) \quad T_1^-$			

第1図 管理図の型と記号

§4. σ 既知の場合の管理線および効率の計算

4.1 計算に用いる定理

補助定理 1. 独立試行列の1回の試行においてある事象 E が起る確率を $p > 0$ とする。このとき長さ s の連 $\mathcal{E} = (E, E, \dots, E)$ (再帰事象) が初めて起るまでの平均試行回数 T は次式で与えられる。

$$T = (1 - p^s) / \{p^s(1 - p)\}$$

証明は [1] p. 299~p. 300 を参照。

補助定理 2. $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_r$ を persistent で互に素^[註2]な再帰事象とし, T_i を $\mathcal{E}_i$

[註 2] 再帰事象 $\mathcal{E}$ が persistent とは, 再帰事象 $\mathcal{E}$ が確率1で有限回の試行の中にも起ることである。 $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_r$ が互に素な再帰事象とは, $u_i(n)$ を第 n 試行で $\mathcal{E}_i$ が起る確率, $u(n)$ を第 n 試行で $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_r$ の何れかが起る確率とすると, すべての自然数 n に対して

$$u(n) = u_1(n) + u_2(n) + \dots + u_r(n)$$

が成り立つことである。

が初めて起るまでの平均試行回数, T を $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_r$ の中の何れかが初めて起るまでの平均試行回数とする. このとき次式が成り立つ.

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \dots + \frac{1}{T_r}$$

証明は [2] p. 30 を参照.

補助定理 3. $E_1, E_2, \dots, E_r$ を確率正で互に素な事象, 独立試行列で, $\mathcal{E}_j (j=1, 2, \dots, r)$ を E_j の長さ s_j の連とすると, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_r$ は persistent で互に素な再帰事象である.

証明. E_j は $P(E_j) > 0$, 独立試行列で $\mathcal{E}_j$ は E_j の連であることから $\mathcal{E}_j$ は persistent な再帰事象ということが容易にわかる. しかも, $E_i \cap E_j = \phi (i \neq j)$ より $u(n) = u_1(n) + u_2(n) + \dots + u_r(n)$ がみたされる. ゆえに $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_r$ は互に素な再帰事象である.

つぎに, 管理線を引くための係数 $D_{\#}^*$, $D_{\#}^*$ および管理図の効率 α^* を求めるために使いやすいうように, 補助定理 1~3 から次の定理を導く.

定理. 区間 (a, b) ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$, 開, 閉を問わない) を $(r+1)$ 個の互に素な区間 $I_0, I_1, \dots, I_r$ に分ける. 独立試行列において, 結果が区間 I_j に落ちる事象を E_j , E_j の長さ s_j の連が起る事象を $\mathcal{E}_j$ とする. 今 $P(E_j) = p_j > 0 (j=1, 2, \dots, r)$ とすると次のことが成り立つ.

1° $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_r$ は互に素な再帰事象である.

2° $\mathcal{E}_j$ が初めて起るまでの平均試行回数を T_j , $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_r$ の何れかが初めて起るまでの平均試行回数を T とすると

$$(4.1) \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \dots + \frac{1}{T_r}$$

$$(4.2) \quad \frac{1}{T_j} = p_j^{s_j} (1 - p_j) / (1 - p_j^{s_j}) \quad (j=1, 2, \dots, r)$$

証明. 1°. $I_i \cap I_j = \phi$ だから $E_i \cap E_j = \phi (i \neq j)$. 故に補助定理 3. より $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_r$ は互に素な再帰事象である.

2° 定理の仮定と補助定理 3. より $\mathcal{E}_j$ は persistent な再帰事象であるから補助定理 2. より (4.1) 式が成り立つ. $E_j, \mathcal{E}_j, T_j$ はそれぞれ補助定理 1. における $E, \mathcal{E}, T$ の条件をみたすので (4.2) 式を得る.

4.2 管理線の係数の求め方^[註3]

[註 3] 記号については第 3 節 (特に第 1 図) 参照.

$n, \alpha_1^* = 1/T_1^*$ および C^* が与えられたとき、工程が正常なとき ($l=1$ のとき) 各段の再帰事象 $\mathcal{E}_s^+$ および $\mathcal{E}_s^-$ が初めて起るまでの R の平均個数が $T_1^+ = T_2^+ = \dots = T_r^+ = T_1^- = T_2^- = \dots = T_r^-$ (この中不用品を除く) をみたすように、管理線の係数 D_{s+}^*, D_{s-}^* を求める。

[A] $C^*(1, 2)$ の場合

定理で $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1^+, \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1^-, \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_2^+, \mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_2^-$ とおけば、 $\alpha_1^* = 1/T_1^* = 1/(n\tilde{T}_1^*)$ より $1/\tilde{T}_1^* = n\alpha_1^*$ 。したがって (4.3), (4.4) をみたす D_{s+}^*, D_{s-}^* ($s=1, 2$) を求めればよい。

$$(4.3) \quad \frac{1}{\tilde{T}_1^*} = \frac{1}{\tilde{T}_1^+} + \frac{1}{\tilde{T}_1^-} + \frac{1}{\tilde{T}_2^+} + \frac{1}{\tilde{T}_2^-} = n\alpha_1^* = \varphi$$

$$(4.4) \quad \tilde{T}_1^+ = \tilde{T}_1^- = \tilde{T}_2^+ = \tilde{T}_2^-$$

(1) D_{1+}^*, D_{1-}^* の求め方。定理および (4.3), (4.4) 式より

$$(4.5) \quad \frac{1}{\tilde{T}_1^+} = \frac{1}{\tilde{T}_1^-} = \frac{\varphi}{4} (= p_1^+ = p_1^-).$$

今 R を正規化して $W = R/\sigma$ とおけば、Pearson [4] の表より

$$P(W \geq D_{1+}^*) = 1 - P(D_{1+}^*) = \frac{\varphi}{4} \quad \text{なる } D_{1+}^*$$

$$P(W \leq D_{1-}^*) = P(D_{1-}^*) = \frac{\varphi}{4} \quad \text{なる } D_{1-}^*$$

を求めることができる。

(2) D_{2+}^*, D_{2-}^* の求め方。定理および (4.3), (4.4) 式より

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\tilde{T}_2^+} = \frac{1}{\tilde{T}_2^-} = \frac{\varphi}{4} &= \frac{(p_2^+)^2 (1-p_2^+)}{1-(p_2^+)^2} = \frac{(p_2^+)^2}{1+p_2^+} \\ &= \frac{(p_2^-)^2 (1-p_2^-)}{1-(p_2^-)^2} = \frac{(p_2^-)^2}{1+p_2^-} \end{aligned}$$

をみたす p_2^+, p_2^- に対して、(1) の場合と同様にして

$$P(D_{2+}^* \leq W \leq D_{1+}^*) = P(D_{1+}^*) - P(D_{2+}^*) = \left(1 - \frac{\varphi}{4}\right) - P(D_{2+}^*) = p_2^+ \quad \text{なる } D_{2+}^*$$

$$P(D_{1-}^* \leq W \leq D_{2-}^*) = P(D_{2-}^*) - P(D_{1-}^*) = P(D_{2-}^*) - \frac{\varphi}{4} = p_2^- \quad \text{なる } D_{2-}^*$$

を求めることができる。

[B] $C^*(1)$ の場合

$1/\tilde{T}_1^+ = 1/\tilde{T}_1^- = \varphi/2 = p_1^+ = p_1^-$ なるときに、[A] の (1) の場合と同様にして D_{1+}^*, D_{1-}^* を求めることができる。

[C] $C^*(2)$ の場合

$1/\tilde{T}_2^+ = 1/\tilde{T}_2^- = \varphi/2$ に対する p_2^+ , p_2^- を [A] の (2) の方法で求め、さらに同様にし
て、

$$P(W \geq D_{2+}^*) = 1 - P(D_{2+}^*) = p_2^+ \quad \text{なる } D_{2+}^*$$

$$P(W \leq D_{2-}^*) = P(D_{2-}^*) = p_2^- \quad \text{なる } D_{2-}^*$$

を求めることができる。

[D] 管理線の係数の表と R 管理図の作り方

以上 [A], [B], [C] に示した計算法により, R 管理図の型 $C^*(1)$, $C^*(2)$, $C^*(1, 2)$ に対して,

$$\alpha_1^* = 0.01, 0.005, 0.001$$

$$n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

のすべての組合せに対して D_{1+}^* , D_{1-}^* , D_{2+}^* , D_{2-}^* を求めた結果を第1表に示す。

第1表は正規化した場合の管理線の値になっているので, $\sigma \approx 1$ のときは $R = \sigma W$ なる関係により次のようにして求める。たとえば $C^*(1, 2)$ の場合 ① n , α_1^* の値を決める。② 第1表の与えられた C^* , n , α_1^* のところの D_{1+}^* , D_{2+}^* , D_{1-}^* , D_{2-}^* の値を σ にかけて, 第1 UCL = $D_{1+}^* \sigma$, 第2 UCL = $D_{2+}^* \sigma$, 第1 LCL = $D_{1-}^* \sigma$, 第2 LCL = $D_{2-}^* \sigma$ とする。

4.3 $\alpha_1^* = 1/T_1^*$ の求め方

与えられた C^* , n , α_1^* に対して, 工程が $N(\mu, (l\sigma)^2)$ に変化したときの $\alpha_1^* = 1/T_1^*$ を求める方法を示す。今 $N(\mu, (l\sigma)^2)$ にしたがう n 個のデータから R を求めて $W_i \equiv R/\sigma$ とおくと次式が成り立つ。

$$(4.7) \quad P(a \leq W_i \leq b) = P\left(\frac{a}{l} \leq W \leq \frac{b}{l}\right)$$

したがって, Pearson [4] の表よりまず $1/\tilde{T}_1^*$ が次のようにして計算できる。

[A] $C^*(1, 2)$ の場合

定理で $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^+$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1^-$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_2^+$, $\varepsilon_4 = \varepsilon_2^-$ とおけば,

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1^+(l) = P(W_i \geq D_{1+}^*) = P\left(W \geq \frac{D_{1+}^*}{l}\right) = 1 - P\left(W \leq \frac{D_{1+}^*}{l}\right) = p_1^+ \\ p_1^-(l) = P(W_i \leq D_{1-}^*) = P\left(W \leq \frac{D_{1-}^*}{l}\right) = p_1^- \\ p_2^+(l) = P(D_{2+}^* \leq W_i \leq D_{1+}^*) = P\left(\frac{D_{2+}^*}{l} \leq W \leq \frac{D_{1+}^*}{l}\right) = P\left(\frac{D_{1+}^*}{l}\right) - P\left(\frac{D_{2+}^*}{l}\right) \\ \quad = 1 - P\left(W \leq \frac{D_{1+}^*}{l}\right) - P\left(W \leq \frac{D_{2+}^*}{l}\right) = p_2^+ \end{array} \right.$$

第1表 管理線の係数 $D_{\pm}^*$ の表 (σ 又は $\hat{\sigma}$ を用いる場合)

$\frac{1}{T_1^*} = \alpha_1^*$	n	2		3		4		5		6		7		8		9		10	
	D_s^*	D_{1+}^*	D_{2+}^*	D_{1+}^*	D_{2+}^*	D_{1+}^*	D_{2+}^*	D_{+1}^*	D_{2+}^*	D_{1+}^*	D_{2+}^*	D_{1+}^*	D_{2+}^*	D_{1+}^*	D_{2+}^*	D_{1+}^*	D_{2+}^*	D_{1+}^*	D_{2+}^*
	C^*	D_{1-}^*	D_{2-}^*	D_{1-}^*	D_{2-}^*	D_{1-}^*	D_{2-}^*	D_{1-}^*	D_{2-}^*	D_{1-}^*	D_{2-}^*	D_{1-}^*	D_{2-}^*	D_{1-}^*	D_{2-}^*	D_{1-}^*	D_{2-}^*	D_{1-}^*	D_{2-}^*
0.01	$C^*(1)$	3.65 0.02		2.93 0.23		4.09 0.55		4.20 0.85		4.28 1.11		4.34 1.34		4.39 1.53		4.44 1.71		4.48 1.86	
	$C^*(2)$		2.29 0.19		2.73 0.71		2.98 1.15		3.14 1.49		3.27 1.77		3.37 2.00		3.45 2.20		3.53 2.36		3.58 2.51
	$C^*(1,2)$	3.97 0.01	2.49 0.14	4.25 0.17	2.92 0.61	4.40 0.43	3.15 1.03	4.50 0.71	3.32 1.37	4.58 0.95	3.44 1.64	4.65 1.15	3.54 1.87	4.70 1.35	3.62 2.07	4.75 1.52	3.68 2.24	4.78 1.67	3.74 2.38
0.005	$C^*(1)$	3.97 0.01		4.25 0.17		4.40 0.44		4.50 0.71		4.58 0.95		4.65 1.15		4.70 1.35		4.75 1.52		4.78 1.67	
	$C^*(2)$		2.53 0.13		2.94 0.59		3.21 1.00		3.38 1.32		3.50 1.60		3.60 1.82		3.69 2.01		3.77 2.17		3.83 2.32
	$C^*(1,2)$	4.28 0.01	2.73 0.09	4.55 0.12	3.15 0.50	4.70 0.34	3.39 0.89	4.80 0.59	3.55 1.22	4.88 0.82	3.67 1.48	4.93 1.02	3.77 1.70	4.98 1.20	3.85 1.89	5.03 1.37	3.92 2.05	5.07 1.52	3.98 2.20
0.001	$C^*(1)$	4.65 0.00		4.90 0.07		5.05 0.25		5.15 0.46		5.22 0.67		5.29 0.86		5.34 1.04		5.38 1.19		5.42 1.33	
	$C^*(2)$		3.03 0.06		3.45 0.38		3.68 0.73		3.84 1.03		3.97 1.29		4.07 1.50		4.15 1.68		4.23 1.84		4.29 1.98
	$C^*(1,2)$	4.92 0.00	3.21 0.04	5.17 0.05	3.62 0.32	5.30 0.20	3.84 0.66	5.41 0.39	4.00 0.95	5.48 0.58	4.13 1.20	5.54 0.76	4.22 1.41	5.59 0.93	4.31 1.58	5.63 1.08	4.38 1.74	5.67 1.22	4.44 1.89

$$\left\{ \begin{aligned} p_2^-(l) &= p(D_{1-}^* \leq W_l \leq D_{2-}^*) = P\left(\frac{D_{1-}^*}{l} \leq W \leq \frac{D_{2-}^*}{l}\right) \\ &= P\left(W \leq \frac{D_{2-}^*}{l}\right) - P\left(W \leq \frac{D_{1-}^*}{l}\right) = p_2^- \end{aligned} \right.$$

なる p_1^+ , p_1^- , p_2^+ , p_2^- を求めると, 定理の (4.2) 式から,

$$(4.9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\tilde{T}_1^+} &= p_1^+, & \frac{1}{\tilde{T}_1^-} &= p_1^- \\ \frac{1}{\tilde{T}_2^+} &= \frac{(p_2^+)^2}{1+p_2^+}, & \frac{1}{\tilde{T}_2^-} &= \frac{(p_2^-)^2}{1+p_2^-} \end{aligned} \right.$$

となり, (4.1) 式から

$$(4.10) \quad \frac{1}{\tilde{T}_i^*} = \frac{1}{\tilde{T}_1^+} + \frac{1}{\tilde{T}_1^-} + \frac{1}{\tilde{T}_2^+} + \frac{1}{\tilde{T}_2^-}$$

がえられる.

[B] $C^*(1)$ の場合

[A] と同様にして

$$(4.11) \quad \frac{1}{\tilde{T}_1^+} = p_1^+, \quad \frac{1}{\tilde{T}_1^-} = p_1^-, \quad \frac{1}{\tilde{T}_i^*} = \frac{1}{\tilde{T}_1^+} + \frac{1}{\tilde{T}_1^-}$$

がえられる.

[C] $C^*(2)$ の場合

$p_2^+ = P(W_l \geq D_{2+}^*)$, $p_2^- = P(W_l \leq D_{2-}^*)$ を求めれば, [A] と同様にして

$$(4.12) \quad \frac{1}{\tilde{T}_2^+} = \frac{(p_2^+)^2}{1+p_2^+}, \quad \frac{1}{\tilde{T}_2^-} = \frac{(p_2^-)^2}{1+p_2^-}, \quad \frac{1}{\tilde{T}_i^*} = \frac{1}{\tilde{T}_2^+} + \frac{1}{\tilde{T}_2^-}$$

がえられる.

以上によってえた $1/\tilde{T}_i^*$ より α_i^* は

$$\alpha_i^* = \frac{1}{\tilde{T}_i^*} = \frac{1}{n\tilde{T}_i^*} = \frac{1}{\tilde{T}_i^*} / n$$

なる関係式を用いて容易に求められる.

[D] α_i^* の表とグラフ

以上 [A], [B], [C] に示した計算法により, R 管理図の型 $C^*(1)$, $C^*(2)$, $C^*(1, 2)$ に対して

$$\alpha_i^* = 0.01, 0.005, 0.001$$

$$n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

$$l = 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 3.0, 3.6, 4.0$$

第2表 $\alpha_i^*=1/T_i^*=0.01$ のときの $\alpha_i^*=1/T_i^*$ の表

C^*	$C^*(1)$				$C^*(2)$	$C^*(1, 2)$	
$n \backslash l$	2	3	4	5	3	3	4
1.0	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
1.2	0.020	0.021	0.022	0.022	0.018	0.022	0.022
1.4	0.037	0.041	0.043	0.044	0.032	0.042	0.045
1.6	0.057	0.065	0.068	0.069	0.047	0.066	0.072
1.8	0.079	0.092	0.095	0.094	0.062	0.092	0.095
2.0	0.101	0.115	0.118	0.115	0.076	0.115	0.116
2.2	0.123	0.139	0.139	0.132	0.087	0.138	0.136
2.4	0.144	0.160	0.157	0.146	0.096	0.157	0.152
2.6	0.164	0.177	0.171	0.156	0.104	0.176	0.166
2.8	0.181	0.195	0.183	0.165	0.111	0.189	0.177
3.0	0.196	0.209	0.193	0.172	0.118	0.204	0.187
3.6	0.241	0.241	0.213	0.184	0.131	0.234	0.208
4.0	0.263	0.256	0.222	0.190	0.138	0.250	0.218

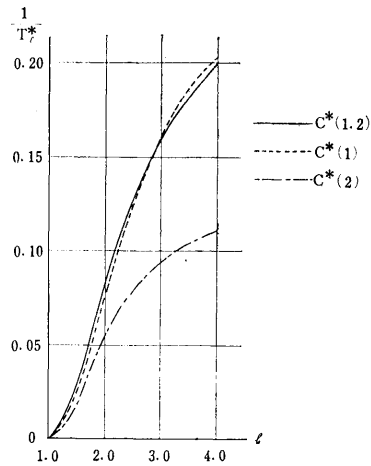
第2—1表
 $\alpha_i^*(1)$ 第2—2表
 $\alpha_i^*(2)$ 第2—3表
 $\alpha_i^*(1, 2)$ 第3表 $\alpha_i^*=1/T_i^*=0.005$ のときの $\alpha_i^*=1/T_i^*$ の表

C^*	$C^*(1)$			$C^*(2)$		$C^*(1, 2)$		
$n \backslash l$	3	4	5	3	4	3	4	5
1.0	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005
1.2	0.013	0.013	0.014	0.011	0.011	0.014	0.015	0.015
1.4	0.028	0.030	0.032	0.021	0.025	0.031	0.036	0.033
1.6	0.049	0.053	0.055	0.037	0.040	0.053	0.057	0.057
1.8	0.073	0.078	0.079	0.051	0.055	0.076	0.081	0.079
2.0	0.096	0.101	0.101	0.064	0.067	0.099	0.103	0.100
2.2	0.120	0.123	0.123	0.076	0.077	0.121	0.122	0.117
2.4	0.141	0.142	0.135	0.088	0.085	0.141	0.140	0.130
2.6	0.161	0.158	0.147	0.096	0.092	0.159	0.154	0.143
2.8	0.176	0.171	0.157	0.104	0.097	0.174	0.167	0.153
3.0	0.193	0.181	0.165	0.110	0.102	0.189	0.177	0.161
3.6	0.227	0.206	0.181	0.127	0.111	0.223	0.201	0.177
4.0	0.245	0.216	0.186	0.133	0.114	0.239	0.212	0.184

第3—1表
 $\alpha_i^*(1)$ 第3—2表
 $\alpha_i^*(2)$ 第3—3表
 $\alpha_i^*(1, 2)$

第4表 $\alpha_i^*=1/T^*=0.001$ のときの $\alpha_i^*=1/T_i^*$ の表

C^* $\backslash n$	$C^*(1)$				$C^*(2)$	$C^*(1,2)$			
	3	4	5	6	4	3	4	5	6
1.0	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
1.2	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.005	0.005	0.005	0.005
1.4	0.012	0.013	0.014	0.014	0.012	0.014	0.016	0.017	0.018
1.6	0.026	0.029	0.031	0.032	0.024	0.029	0.033	0.035	0.036
1.8	0.044	0.048	0.051	0.052	0.038	0.049	0.054	0.056	0.057
2.0	0.065	0.070	0.072	0.073	0.051	0.069	0.075	0.076	0.075
2.2	0.085	0.091	0.093	0.091	0.062	0.091	0.096	0.096	0.092
2.4	0.106	0.111	0.110	0.106	0.072	0.111	0.114	0.111	0.106
2.6	0.126	0.129	0.125	0.119	0.081	0.129	0.131	0.125	0.117
2.8	0.144	0.145	0.138	0.129	0.087	0.146	0.145	0.137	0.128
3.0	0.160	0.159	0.148	0.137	0.092	0.162	0.157	0.147	0.134
3.6	0.200	0.189	0.170	0.152	0.105	0.199	0.186	0.167	0.149
4.0	0.220	0.202	0.178	0.156	0.109	0.215	0.199	0.176	0.155

第4—1表
 $\alpha_i^*(1)$ 第4—2表
 $\alpha_i^*(2)$ 第4—3表
 $\alpha_i^*(1,2)$ 第2図 $\alpha_i^*=1/T_i^*=0.001$ のときの OC 曲線 ($n=4$ の場合)

のすべての組合せについて $\alpha_i^* = \alpha_i^*(C^*, \alpha_i^*, n)$ を計算した。その中、 R 管理図の効率に関する判断に特に必要なものを第 2 表～第 4 表にあげる。さらにその中で最も興味ある場合の一つを第 2 図に示す。

§ 5. 計算結果からの結論および判断

一般にどういふ管理図がよい管理図であるかは未解決な問題である。しかしたとえば、 $\bar{x}$ 管理図の管理限界として ($\bar{x}$ 管理図の限界に換算して) $\pm 3\sigma$ をとっている場合で、規格限界が $\pm 10\sigma$ 位のときでは、 R 管理図では、 $3l\sigma \leq 10\sigma$ すなわち $l \leq \frac{10}{3}$ で最も効率のよい型を、 α_i^* と n の値に対してえらばよいのではなかろうか。したがって $1.0 \leq l \leq 3.0$ の範囲を重視して各型の管理図の効率 (OC 曲線) をみると、次のようなことがいえる。

- (1) $C^*(2)$ は $C^*(1)$, $C^*(1, 2)$ に比べて、すべての l についての効率が悪いので、今後考慮する必要はない。
- (2) $C^*(1)$, $C^*(1, 2)$ のいずれも、 $n=3, 4, 5$ のときが他のほとんどの n の値のときより効率が高い。
- (3) $C^*(1)$ と $C^*(1, 2)$ を比較すると
 - (a) $\alpha_i^* = 1/T_i^*$ の値のおおのの場合について、
 - (i) (n, l) が大きいとき $C^*(1)$ が $C^*(1, 2)$ より効率が高い。
 - (ii) (n, l) が小さいとき $C^*(1, 2)$ が $C^*(1)$ より効率が高い。
 - (b) $\alpha_i^* = 1/T_i^*$ の値の変化に対しては、 α_i^* の値が小さい程、より広い (n, l) の範囲において $C^*(1, 2)$ が $C^*(1)$ より効率が高くなる。
- (4) (3) のことを実用的観点からもう少し詳しく述べると
 - (a) $\alpha_i^* = 1/T_i^* = 0.01$ のときは、実用上 $C^*(1)$ が $C^*(1, 2)$ よりよい。
 - (b) $\alpha_i^* = T_i^* = 0.005$ のときは、
 - (i) $2 \leq n \leq 4$, $1.0 < l < 2.0$ では $C^*(1, 2)$ がよく
 - (ii) 他の (n, l) に対しては $C^*(1)$ がよい。
 - (c) $\alpha_i^* = 1/T_i^* = 0.001$ のときは
 - (i) $n=6$ に対して、 $1.0 < l < 2.3$ で $C^*(1, 2)$ がよい。
 - (ii) $n=5$ に対して、 $1.0 < l < 2.6$ で $C^*(1, 2)$ がよい。

(iii) $n=4$ に対して, $1.0 < l < \text{約} 3$ で $C^*(1, 2)$ がよい. [註4]

(5) さらに総合的にいえば, $\alpha_1^* = 1/T_1^* = 0.001$ の場合が最も多く使用されるであろうし, そのときは $n=4$ のときの $C^*(1, 2)$ が実用的には最も有効だと思われる. したがってこのときの α_1^* のグラフを第2図に示す. このときが従来の (3σ) R 管理図に相当する.

注意 1. 一般に「 R 管理図や R を用いる推定および検定は $n=4\sim 5$ のときが最も精度が高く, データがたくさんある場合にはデータを $n=4\sim 5$ 宛の組に分けてそれぞれの R を計算し, その算術平均 $\bar{R}$ を求めて推定, 検定に用いるがよい」と経験的にいわれていたが, $C^*(1)$ の $n\alpha_1^*$ は $H_0; E(R) = d_2\sigma$ の OC 曲線を逆さまからみたものになるから (2) はこれを裏すけるものであるといえる.

注意 2. (3), (4), (5) でみたように, R 管理図においても $\bar{x}$ 管理図と同様, 従来の (3σ) 管理図 ($C^*(1)$ 型) より連を併用した管理図の方が効率がよい場合がある. ここでは $C^*(1)$ と $C^*(2)$ と $C^*(1, 2)$ とを比較したが, さらに $C^*(1, r)$ ($r \geq 3$) の場合も研究してみるとおもしろい結果がえられるかも知れない.

§ 6. σ 未知の場合の R 管理図の作り方

σ 未知のときはデータから s または V を求めてこれを σ と考えて, 4.2[D] の方法で R 管理図を作ってもよいが, この方法はデータの数が多いと計算が面倒だから, 実用的によく用いられる $\bar{R}$ を計算して R 管理図を作る方法を述べる. [註5]

データが $N(0, 1)$ にしたがりとき $E(R) = d_2 = d_2(n)$ とすると, データが $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがりときは $\mathfrak{R} = E(R) = d_2\sigma$ または $\sigma = \mathfrak{R}/d_2$ なる関係がある. また $\bar{R}$ を求めるデータの組の数 m が大きいと $\bar{\mathfrak{R}} \div R$ とみなしてよいから, 管理線は 4.2[D] より

$$\text{第 } s \text{ UCL} = D_{s+}^* \sigma = D_{s+}^* \mathfrak{R}/d_2 = (D_{s+}^*/d_2) \bar{R} \equiv \bar{D}_{s+}^* \bar{R}$$

$$\text{第 } s \text{ LCL} = D_{s-}^* \sigma = D_{s-}^* \mathfrak{R}/d_2 = (D_{s-}^*/d_2) \bar{R} \equiv \bar{D}_{s-}^* \bar{R}$$

によって求められる.

よって σ 未知のとき R 管理図を作るのに便利のように, 第1表から換算した $\bar{D}_{s+}^* \equiv D_{s+}^*/d_2$, $\bar{D}_{s-}^* \equiv D_{s-}^*/d_2$ を第5表に示す.

σ 未知の場合の R 管理図の作り方は次のようにすればよい.

[註 4] α_1^* の値が小さくなると $n=4\sim 6$ では常に $C^*(1, 2)$ の効率が, 他のどの型の R 管理図の効率よりよくなることが予想される.

[註 5] データの数が少ないときは $\hat{\sigma} = V$ で σ を推定して, 4.2[D] の方法による方がよい.

第5表 管理線の係数 $\bar{D}_{s+}^*$ の表 ($\bar{R}$ を用いる場合)

$\frac{1}{T_1^*} = \alpha_1^*$	n	2		3		4		5		6		7		8		9		10	
		$\bar{D}_s^*$		$\bar{D}_{1+}^*$ $\bar{D}_{2+}^*$		$\bar{D}_{1+}^*$ $\bar{D}_{2+}^*$		$\bar{D}_{1+}^*$ $\bar{D}_{2+}^*$		$\bar{D}_{1+}^*$ $\bar{D}_{2+}^*$		$\bar{D}_{1+}^*$ $\bar{D}_{2+}^*$		$\bar{D}_{1+}^*$ $\bar{D}_{2+}^*$		$\bar{D}_{1+}^*$ $\bar{D}_{2+}^*$		$\bar{D}_{1+}^*$ $\bar{D}_{2+}^*$	
	C^*	$\bar{D}_{1+}^*$	$\bar{D}_{2+}^*$	$\bar{D}_{1+}^*$	$\bar{D}_{2+}^*$	$\bar{D}_{1+}^*$	$\bar{D}_{2+}^*$	$\bar{D}_{1+}^*$	$\bar{D}_{2+}^*$	$\bar{D}_{1+}^*$	$\bar{D}_{2+}^*$	$\bar{D}_{1+}^*$	$\bar{D}_{2+}^*$	$\bar{D}_{1+}^*$	$\bar{D}_{2+}^*$	$\bar{D}_{1+}^*$	$\bar{D}_{2+}^*$	$\bar{D}_{1+}^*$	$\bar{D}_{2+}^*$
0.01	$C^*(1)$	3.34 0.02		2.32 0.13		1.99 0.27		1.81 0.37		1.69 0.44		1.61 0.50		1.54 0.54		1.49 0.58		1.45 0.60	
	$C^*(2)$		1.93 0.17		1.61 0.42		1.45 0.56		1.35 0.64		1.29 0.70		1.25 0.74		1.21 0.77		1.19 0.79		1.16 0.82
	$C^*(1, 2)$	3.42 0.01	2.21 0.17	2.51 0.10	1.72 0.36	2.14 0.21	1.53 0.50	1.93 0.31	1.43 0.59	1.81 0.37	1.36 0.65	1.72 0.43	1.31 0.69	1.65 0.47	1.27 0.73	1.60 0.51	1.25 0.75	1.55 0.54	1.21 0.77
0.005	$C^*(1)$	3.42 0.01		2.51 0.10		2.14 0.21		1.93 0.31		1.81 0.37		1.72 0.43		1.65 0.47		1.60 0.51		1.55 0.54	
	$C^*(2)$		2.24 0.12		1.75 0.35		1.56 0.49		1.45 0.57		1.37 0.63		1.33 0.67		1.30 0.70		1.27 0.72		1.24 0.75
	$C^*(1, 2)$	3.59 0.01	2.42 0.08	2.69 0.07	1.86 0.30	2.28 0.17	1.65 0.44	2.06 0.25	1.53 0.52	1.93 0.33	1.45 0.58	1.82 0.38	1.39 0.63	1.75 0.42	1.35 0.66	1.69 0.46	1.32 0.69	1.65 0.55	1.29 0.71
0.001	$C^*(1)$	4.12 0.00		2.89 0.04		2.45 0.12		2.21 0.20		2.06 0.25		1.96 0.32		1.88 0.37		1.81 0.40		1.76 0.44	
	$C^*(2)$		2.68 0.06		2.04 0.22		1.79 0.36		1.65 0.44		1.57 0.51		1.51 0.56		1.46 0.59		1.42 0.63		1.37 0.64
	$C^*(1, 2)$	4.36 0.00	2.84 0.04	3.05 0.03	2.14 0.19	2.67 0.10	1.87 0.32	2.33 0.17	1.72 0.41	2.16 0.23	1.63 0.47	2.05 0.28	1.56 0.52	1.96 0.33	1.51 0.55	1.90 0.36	1.47 0.59	1.84 0.40	1.44 0.61

- ① n と α_1^* の値を決める.
- ② 管理図に打点するときの要領で n 個宛のデータの組を m 組とる.
- ③ 各組の n 個のデータから $R_1, R_2, \dots, R_m$ を求めて $\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i$ を求める.
- ④ 与えられた n, α_1^* に対して C^* を定め, 第5表から C^*, n, α_1^* のところの $\bar{D}_{s+}^*, \bar{D}_{s-}^*$ ($s=1, 2$ または一方だけ) の値を求める.
- ⑤ 第 s UCL $= \bar{D}_{s+}^* \bar{R}$, 第 s LCL $= \bar{D}_{s-}^* \bar{R}$ として管理線を引く.

§7. あとがき

戦後日本においても大量生産時代をむかえ, 品質管理の重要性が認識されるにいたって, 現在ではこの方面の数多くの成書が出されているが, 品質管理の中で管理図については, いわゆる 3σ 法の解説のほかに理論的な説明はあまり見あたらないように思う.

ここでは“管理図の効率”という概念を導入し, 再帰理論の結果にもとづいて, 連を併用する方法によつて R 管理図の場合について理論的な考察を行ったが, $\bar{x}$ 管理図や R 管理図についても, も少しこの方向の研究を進めてみる必要があると思う. さらにその他の管理図についても理論的に考察する余地があると思われる.

生産の自動化が促進されつつある現在から将来においても, やはり管理図の重要性は失われないと考えられるし, その理論的および実用的な研究は十分意味のあることと思う.

この研究はまえがきにも述べたように, [6] の提唱にしたがったものであり, 末記の文献, 就中 [6] に負うところが非常に大きい. 付記して, 終始ご指導いただいた九大教養部瀬口助教授に感謝の意を表わします.

文 献

- [1] FELLER, W. An introduction to probability theory and its applications, Vol. 1, 2nd ed. 1957.
- [2] KITAGAWA, T ; SEGUCHI, T. The combined use of runs in statistical quality controls. Bull. Math. Statist. 7 (1956), 25—45.
- [3] — ; —. 同上 II. 同上 7 (1957), 53—72.
- [4] 日本科学技術連盟. 数値表 A.
- [5] PEARSON, E. S. The probability integral of the range in sample of n observations from the normal population. Biometrika. 32 (1942), 301—308.
- [6] 瀬口常民. 連を用いる $\bar{x}$ 管理図の研究. 標準化と品質管理. 19—Dec. (1965), 32—37.

- [7] WEILER, H. The use of runs to control the mean in quality control. J. Amer. Statist. Assoc. 48 (1953), 816—826.
- [8] ——. A new type of control chart limits for means, ranges, and sequential runs. J. Amer. Statist. Assoc. 49 (1954), 298—314.