

Separable Boolean algebraのある種のsubalgebraについて

森, 通
佐賀大学文理学部

<https://doi.org/10.15017/1448894>

出版情報：九州大学教養部数学雑誌. 1 (1), pp.16-24, 1964-01. 九州大学教養部数学教室
バージョン：
権利関係：



Separable Boolean algebra のある種の subalgebra について

森 通

(佐賀大, 文理)

§1. ま え が き

Separable Boolean algebra の *subalgebra* はつねにまた *separable Boolean algebra* であるか. この問題の解答は否定的である. その *counter-example* を示すのがこの小論の目的である. なおまた *separable Boolean algebra* の *dual space* (i.e. *Boolean space*) が *separable space* であることは証明できるが, 逆に *Boolean space* が *separable* であれば, その *dual algebra* はまた *separable Boolean algebra* であるか. この問もまた否定されることが証明できる. §2 で述べる *Boolean algebra* の表現に関する *Stone's Theorem* はその内容だけを記述し証明をはぶいた. つぎに参照にした文献を紹介しておく.

1. P.R.Halmos: *Boolean algebras*. (1959).
2. R.Sikorski: *Boolean algebras*, Berlin. (1960).
3. A.Horn and A.Tarski: *Measures in Boolean algebras*,
Trans.Amer.Math.Soc. 64(1948).

§2. Free Boolean algebra

Compact Hausdorff space H において, 任意の *open set* が *open-closed sets* の *union* として表わされるとき, H のことを

Boolean space という。

Theorem 1. R を任意の集合とする。 R から Boolean algebra $2 = \{0, 1\}$ の中への mapping 全体の集合を H とすれば, H は Boolean space であると考えられる。この space を R の Cantor space という。

Proof. 勝手な $x \in R$ に対し, $H_x = \{0, 1\}$ と定義すれば, H は product set $\prod_{x \in R} H_x$ となる。おのこの H_x に discrete topology を導入すれば, H_x は compact Hausdorff space となるので, H は product topology に関して, Tychonoff の定理により同じく compact Hausdorff space となる。 H の element h の $x \in R$ における値を $h(x)$ で表わせば, H の product topology の定義によって, $\{h: h(x) = \delta\}$ (ただし, $x \in R$, $\delta \in 2$) なる形の sets 全体の family が H の subbase を形成する。従ってそれらの finite intersections が base を作る。たとえば $\{h: h(x) = 1\}$ の complement は $\{h: h(x) = 0\}$ となるので $\{h: h(x) = \delta\}$ なる形の set は open-closed set である。したがって H の任意の open set は open-closed sets の union である。故に H は Boolean space である。 q. e. d.

この定理において R として任意の Boolean algebra $\mathcal{A}$ を考える。 $\mathcal{A}$ から 2 の中への 2-valued homomorphism 全体の集合 A を作れば, A は $\mathcal{A}$ の Cantor space H の closed subset であり, H の relative space として Boolean space となる。この A を $\mathcal{A}$ の dual space といい, A の open-closed sets 全体の集合が作る field $\mathcal{A}_A$ を A の dual algebra ということにすれば, いわゆるつぎの Stone representation theorem がなりたつ。

Theorem 2. Boolean algebra $\mathcal{A}$ の dual space A の dual algebra を $\mathcal{A}_A$ として, $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}_A$ の中への mapping f を

$$f(u) = \{a \in A: a(u) = 1\} \quad (u \in \mathcal{A})$$

と定義すれば, f は $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}_A$ の上への isomorphism である。

(18)

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ を Boolean algebras とし, f は $\mathcal{B}$ から $\mathcal{A}$ の中への homomorphism, g を $\mathcal{C}$ から $\mathcal{B}$ の中への homomorphism とする. このとき $\mathcal{C}$ から $\mathcal{A}$ の中への mapping $f \circ g$ を

$$(f \circ g)(u) = f(g(u)) \quad (u \in \mathcal{C})$$

と定義すれば, (これを f と g の composit という) $f \circ g$ は明らかに homomorphism である. さらに h を $\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}$ の中への homomorphism とすれば,

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

がなりたつ.

Boolean algebra $\mathcal{B}$ のある subset $\mathcal{G}$ を含む最小の subalgebra $\mathcal{B}$ のことを $\mathcal{G}$ によって generate された $\mathcal{B}$ の subalgebra といい, $\mathcal{G}$ を $\mathcal{B}$ の set of generators という.

Boolean algebra $\mathcal{B}$ が subset $\mathcal{G}$ によって generate され, $\mathcal{G}$ から任意の Boolean algebra $\mathcal{A}$ の中への勝手な mapping g が $\mathcal{B}$ から $\mathcal{A}$ の中への homomorphism f へ extend されるとき, すなわち,

$$f(u) = g(u) \quad \text{for every } u \in \mathcal{G}$$

であるとき, $\mathcal{G}$ は freely generates $\mathcal{B}$ であるとか, $\mathcal{B}$ は free on $\mathcal{G}$ であるという. Boolean algebra がある subset によって freely generate されるとき, その algebra を free であるという.

Boolean algebra $\mathcal{B}$ が free であることをつぎのように diagram によって定義することもできる. $\mathcal{B}$ は subset $\mathcal{G}$ によって generate されたとする. h を

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{h} & \mathcal{B} \\ & \searrow g & \\ & \mathcal{A} & \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathcal{G} \text{ から } \mathcal{B} \text{ の中への identity mapping,} \\ \text{i.e. } h(u) = u \quad (u \in \mathcal{G}) \end{array}$$

とし, $\mathcal{A}$ を任意の Boolean algebra, g を $\mathcal{G}$ から $\mathcal{A}$ の中への勝手な mapping としよう. このとき, $(f \circ h)(u) = g(u) \quad (u \in \mathcal{G})$ を満たす $\mathcal{B}$ から $\mathcal{A}$ の中への homomorphism f が存在する.

Theorem 3. 濃度 α をもつ任意の集合 R の Cantor space H_α の dual algebra $\mathcal{B}_\alpha$ は濃度 α のある subset によって freely generate される。すなわち、 $\alpha \geq \aleph_0$ のとき $\mathcal{B}_\alpha$ は power α の free Boolean algebra である。

Proof. R から H_α の中への mapping t_0, t_1 を

$$t_0(x) = \{h: h(x) = 0\}, \quad t_1(x) = \{h: h(x) = 1\}$$

と定義すれば、 t_1 は one-to-one であるから、image $t_1(R)$ の濃度は R のそれと同じで α である。 $t_1(R)$ によって generate される field $\mathcal{F}$ は H_α の topology の定義によって H_α の base を作る。 H_α の任意の open-closed set C は $\mathcal{F}$ の sets の union であるが、 C は compact であるから $\mathcal{F}$ の sets の finite union である。 $\mathcal{F}$ は field であるから $C \in \mathcal{F}$ 。故に $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{F}$ がいえる。つぎに $\mathcal{B}_\alpha$ が free on $t_1(R)$ であることを証明しよう。 $\mathcal{A}$ を勝手な Boolean algebra とし、 g を R から $\mathcal{A}$ の中への任意の mapping としよう。 $\mathcal{A}$ の dual space を A とし、おのものの $a \in A$ に対し $\varphi(a) = a \circ g$ と書く。任意の $a \in A$ に対して $\varphi(a) \in H_\alpha$ であるから、 φ は A から H_α の中への function である。

$$(*) \quad \varphi^{-1}(t_1(x)) = \{a: a \circ g \in t_1(x)\} = \{a: a(g(x)) = 1\}$$

$$\varphi^{-1}(t_0(x)) = \{a: a \circ g \in t_0(x)\} = \{a: a(g(x)) = 0\}$$

がなりたつことと、 $t_0(R) \cup t_1(R)$ が H_α の subbase であることから、 φ は continuous function である。 A の dual algebra を $\mathcal{A}_A$ とし、 $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}_A$ の上への isomorphism を k とする。 $\mathcal{B}_\alpha$ から $\mathcal{A}$ の中への mapping f を

$$f(v) = k^{-1}(\varphi^{-1}(v)) \quad (v \in \mathcal{B}_\alpha)$$

と定義すれば、 φ の連続性によって f は $\mathcal{B}_\alpha$ から $\mathcal{A}$ の中への homomorphism である。 f の性質によって $\varphi(a) \in t_1(x)$ であることと $a(f(t_1(x))) = 1$ であることは同値である。また (*) によって $\varphi(a) \in t_1(x)$ であることと $a(g(x)) = 1$ であることも同値である。ゆえにすべての a について $a(f(t_1(x))) = a(g(x))$ がなりたつ。従っ

(20)

て $f \circ t_1 = g$ である. いいかえれば homomorphism f は mapping $g \circ t_1^{-1}$ の extension である. これを利用して $\mathcal{B}_\alpha$ が free Boolean algebra であることが証明である. $\mathcal{B}_\alpha$ の power が α であることはつぎの定理による. 濃度 α の set of generators をもつ infinite Boolean algebra の濃度は α である. *q. e. d.*

Boolean algebra $\mathcal{A}$ の elements からなる indexed set $\{u_x\}_{x \in X}$ がつぎの条件を満足するとき, independent であるという. すなわち, 任意の finite sequence $\{x_i\}$ ($x_i \in X$, $i \neq j$ ならば $x_i \neq x_j$) および任意の finite sequence $\{\varepsilon_i\}$ ($\varepsilon_i = -1$ or 1) に対して

$$\varepsilon_1 u_{x_1} \cap \varepsilon_2 u_{x_2} \cap \cdots \cap \varepsilon_n u_{x_n} \neq 0$$

(ただし $\varepsilon_i = 1$ のとき $\varepsilon_i u_{x_i} = u_{x_i}$, $\varepsilon_i = -1$ のとき $\varepsilon_i u_{x_i} = u'_{x_i}$ とする.)

Corollary 1. Free Boolean algebra $\mathcal{B}_\alpha$ の set of free generators $t_1(R) = \{t_1(x)\}$ $x \in R$ は independent な indexed set である.

証明 明らかである.

Theorem 4. $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ をそれぞれ $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ によって freely generate される Boolean algebra とし, $\mathcal{G}_1$ と $\mathcal{G}_2$ が同じ濃度をもてば, $\mathcal{A}_1$ と $\mathcal{A}_2$ は isomorphic (onto) でその isomorphism によって $\mathcal{G}_1$ と $\mathcal{G}_2$ は one-to-one に対応する.

Proof. 左図の diagram によって証明する. k_1 を $\mathcal{G}_1$ から $\mathcal{G}_2$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{k_1} & \mathcal{A}_1 \\ k_1 \downarrow \uparrow k_2 & & f_1 \downarrow \uparrow f_2 \\ \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{k_2} & \mathcal{A}_2 \end{array}$$

の上への one-to-one mapping とし, k_2 をその inverse mapping とする. k_1, k_2 をそれぞれ $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ から $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ の中への identity mapping とする. $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$

は free であるから, $f_1 \circ k_1 = k_2 \circ k_1$, $f_2 \circ k_2 = k_1 \circ k_2$ をみたす homomorphisms f_1, f_2 が存在する.

$$f_1 \circ k_1 = k_2 \circ k_1 \text{ から } f_2 \circ f_1 \circ k_1 = f_2 \circ k_2 \circ k_1 = k_1 \circ k_2 \circ k_1 = k_1$$

$$f_2 \circ k_2 = k_1 \circ k_2 \text{ から } f_1 \circ f_2 \circ k_2 = f_1 \circ k_1 \circ k_2 = k_2 \circ k_1 \circ k_2 = k_2$$

すなわち, $f_2 \circ f_1 \circ h_1 = h_1$, $f_1 \circ f_2 \circ h_2 = h_2$.

$f_2 \circ f_1$ は h_1 の *extension* である. また $\mathcal{A}_1$ の上の *identity homomorphism* もまた h_1 の *extension* である. しかるに h_1 の *extension* の *uniqueness* から, $f_2 \circ f_1 = \text{identity}$. 同様にして $f_1 \circ f_2 = \text{identity}$. したがって f_1 も f_2 もそれぞれ *isomorphism* である. *q. e. d.*

Corollary 1. $\mathcal{B}$ を濃度 $\alpha \geq \aleph_0$ の free Boolean algebra, $\mathcal{C}$ をその set of free generators とすれば, $\mathcal{C}$ は independent indexed set である.

Proof. $\mathcal{C}$ の power は α であるから Theorem 4 によって $\mathcal{B}_\alpha$ から $\mathcal{B}$ の上への *isomorphism* h が存在し, $t_1(R) = \{t_1(x)\}_{x \in R}$ は independent indexed set であるから, $h(t_1(R)) = \mathcal{C}$ も同様に $\mathcal{B}$ の中の independent indexed set となる. *q. e. d.*

§3. Separable Boolean algebra

Boolean algebra $\mathcal{A}$ の subset $\mathcal{D}$ について勝手な $u \in \mathcal{A}$, $u \neq 0$ に対して $0 \neq v \subseteq u$ となる $v \in \mathcal{D}$ が存在するとき, $\mathcal{D}$ を dense (in $\mathcal{A}$) であるという. $\mathcal{A}$ が高々可算個である dense subset $\mathcal{D}$ を含むとき, $\mathcal{A}$ は separable であるという.

Theorem 5. 濃度 $\alpha > \aleph_0$ をもつ free Boolean algebra $\mathcal{A}$ は separable ではない.

Proof. $\mathcal{A}$ は free であるから, Theorem 4 の Corollary 1 によって $\mathcal{A}$ を generate する set of free generators i.e. independent indexed set $\{u_x\}_{x \in X}$ ($\bar{X} = \alpha$) がある.

$$(*) \quad \varepsilon_1 u_{x_1} \cap \varepsilon_2 u_{x_2} \cap \cdots \cap \varepsilon_n u_{x_n} \neq 0$$

$$(x_i \in X, i \neq j \text{ ならば } x_i \neq x_j, \varepsilon_i = -1 \text{ or } 1)$$

(*) のような形をしたものの全体の集合を $\mathcal{H}$ とする. いま $\mathcal{A}$ が separable であるとして, その高々可算個の dense set を $\mathcal{D} = \{u_i\}$ と

(22)

しよう. $\{u_x\}_{x \in X}$ は $\mathcal{A}$ の set of generators であるから, 任意の $u_i \neq 0$ に対して $u_i \supseteq v$ なる $v \in \mathcal{H}$ が存在する.

$v = \varepsilon_1 u_{x_1} \cap \varepsilon_2 u_{x_2} \cap \cdots \cap \varepsilon_n u_{x_n}$ と表現されるが, $\{u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}\} = \mathcal{K}_i$ とおき, おのおのの u_i に対し $\mathcal{K}_i$ を作り $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{K}_i = \mathcal{K}$ とおけば, $\mathcal{K}$ の濃度は $\leq \aleph_0$ である. ゆえに $\{u_x\}_{x \in X} - \mathcal{K} \neq \emptyset$.

$u \in \{u_x\}_{x \in X} - \mathcal{K}$ なる u をとれば, $u \neq 0$ であるから, ある u_i があって

$$(**) \quad u \supseteq u_i \supseteq \varepsilon_1 u_{x_1} \cap \varepsilon_2 u_{x_2} \cap \cdots \cap \varepsilon_n u_{x_n} \in \mathcal{H}$$

u は $u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}$ のいずれとも異なるから

$$u' \cap \varepsilon_1 u_{x_1} \cap \varepsilon_2 u_{x_2} \cap \cdots \cap \varepsilon_n u_{x_n} \neq 0$$

でなければならない. ところが $(**)$ によって

$$u' \cap \varepsilon_1 u_{x_1} \cap \varepsilon_2 u_{x_2} \cap \cdots \cap \varepsilon_n u_{x_n} = 0$$

これは明らかに矛盾である.

故に $\mathcal{A}$ は separable ではないことが証明された. *q. e. d.*

ある集合 X の subsets が作る field $\mathcal{F}$ について, X の相異なる 2 点 x, y に対して $x \in u$ かつ $y \notin u$ となるような $u \in \mathcal{F}$ があるとき, field $\mathcal{F}$ は separating であるという.

Theorem 6. 濃度 2^α である任意の集合 X に対して, 濃度が α である X の subsets からなる separating field $\mathcal{F}$ が存在する.

Proof. Cantor space H_α の濃度は 2^α である. H_α の dual algebra $\mathcal{B}_\alpha$ は separating field であり, Theorem 3 によってその濃度は α である. しかるに H_α と X の濃度は同じであるから, H_α から X の上への one-to-one mapping f がある. この f を用いて family $\mathcal{F} = \{f(u)\}_{u \in \mathcal{B}_\alpha}$ を作れば, $\mathcal{F}$ が求めるものであることは明らかである. *q. e. d.*

Theorem 7. 任意の濃度 $\alpha \geq \aleph_0$ に対して, Cantor space H_{2^α} は濃度 α の dense subset を含む.

Proof. $H_{2^\alpha} = \prod_{x \in R} H_x$ ($|R| = 2^\alpha$) である. Theorem 6 によって濃度 α である R の subsets からなる separating field $\mathcal{F}$ が

存在する。おのこの $u \in \mathcal{F}$ に対して,

$$x \in u \quad \text{ならば} \quad h_u(x) = 1$$

$$x \notin u \quad \text{ならば} \quad h_u(x) = 0$$

であるような H_{2^α} の要素 h_u を対応せしめる。このような $h_u (u \in \mathcal{F})$ 全体の集合 X の濃度は α である。field $\mathcal{F}$ は *separating* であるから、 R の相異なる *points* からなる勝手な組 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ および 1 または -1 からなる *sequence* $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ に対して

$$\varepsilon_i = 1 \quad \text{ならば} \quad x_i \in u$$

$$\varepsilon_i = -1 \quad \text{ならば} \quad x_i \notin u$$

となる $u \in \mathcal{F}$ がとれる。 $G_x = \{h \in H_{2^\alpha} : h(x) = 1\}$ と定義すれば、このことは

$$h_u \in \varepsilon_1 G_{x_1} \cap \varepsilon_2 G_{x_2} \cap \dots \cap \varepsilon_n G_{x_n}$$

であることを意味する。 $\varepsilon_1 G_{x_1} \cap \dots \cap \varepsilon_n G_{x_n}$ なる形の set は H_{2^α} の *open base* を作るので、 X はたしかに H_{2^α} の中の *dense subset* である。 *q. e. d.*

Theorem 8. 濃度 $\alpha \geq \aleph_0$ である任意の set X のすべての *subsets* からなる field $\mathcal{F}$ は $\mathcal{B}_{2^\alpha}$ に *isomorphic* である *subfield* $\mathcal{F}'$ を含む。したがって $\mathcal{F}'$ は *free Boolean algebra* である。

Proof. Theorem 7 によって、 X は Cantor space H_{2^α} の濃度 α の *dense subset* であるとして証明すれば十分である。故に $\mathcal{B}_{2^\alpha}$ から $\mathcal{F}$ の中への mapping h を

$$h(u) = u \cap X \quad (u \in \mathcal{B}_{2^\alpha})$$

と定義すれば、 X が H_{2^α} で *dense* であることから h は *isomorphism (into)* である。Theorem 3 によって $\mathcal{B}_{2^\alpha}$ は *free* である。したがって *isomorphic image* $\{h(u)\}_{u \in \mathcal{B}_{2^\alpha}}$ は *free Boolean algebra* である。 *q. e. d.*

Theorem 8 において $\alpha = \aleph_0$ としたとき、field $\mathcal{F}$ は明らかに *separable Boolean algebra* である。ところが $\mathcal{B}_{2^{\aleph_0}}$ に *isomorphic* な $\mathcal{F}$ の *subfield* $\mathcal{F}'$ は *free* である。ゆえに Theorem 5 に

(24)

よって $\mathcal{A}'$ は separable Boolean algebra ではない。

従って, separable Boolean algebra の subalgebra は必ずしもまた separable ではないという counter-example ができたわけである。

§4. Necessary condition for separability

Theorem 9. 任意の separable Boolean algebra $\mathcal{A}$ の dual space A は separable space である。

Proof. $\mathcal{A}$ の高々可算個の dense set を $\{u_i\}$ とおく. $\{a: a(u_i)=1\} = A_i$ ($i=1, 2, \dots$) とおき, おのおのの A_i の中から一つずつ任意の点 a_i を選びだし, かかる a_i 全体の集合 X が A で dense であることを証明しよう. a_0 を $a_0 \neq a_i$ ($i=1, 2, \dots$) なる A の任意の点とする. a_0 を含む任意の開集合 G をとれば, Theorem 2 によって $a_0 \in \{a: a(u)=1\} \subseteq G$ を満足する open-closed set $\{a: a(u)=1\}$ が存在する. $\mathcal{A}$ は separable であるから, この u に対し $u \equiv u_i \neq 0$ なる u_i がとれ, $A_i \subseteq \{a: a(u)=1\}$ がなりたつ. 故に G の中に $a_0 \neq a_i$ なる $a_i \in X$ が含まれることになり, X は dense であることがわかる. $q.e.d.$

Cantor space H_2^* は Boolean space であり, Theorem 7 によって H_2^* は separable space である. しかしその dual algebra $\mathcal{B}_2^*$ は free Boolean algebra であるから separable ではない. したがって Boolean algebra が separable であるためにはその dual space が separable であることが必要条件ではあるが十分条件ではないことが示されたわけである。