

## 6角形領域における菱形タイリングの分配関数とタウ関数

田村, 律  
立教大学大学院理学研究科

笈, 三郎  
立教大学理学部

<https://doi.org/10.15017/1448884>

---

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 25A0-S2 (26), pp.163-168, 2014-03. 九州大学応用力学研究所  
バージョン：  
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.25AO-S2  
「非線形波動研究の拡がり」 (研究代表者 増田 哲)

Reports of RIAM Symposium No.25AO-S2

*The breadth and depth of nonlinear wave science*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2013

Article No. 26 (pp. 163 - 168)

## 六角形領域における菱形タイリングの 分配関数とタウ関数

田村 律 (TAMURA Tadashi), 笥 三郎 (KAKEI Saburo)

(Received 15 January 2014; accepted 5 March 2014)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
March, 2014

# 六角形領域における菱形タイリングの分配関数とタウ関数

立教大学大学院理学研究科 田村 律 (TAMURA, Tadashi)

立教大学理学部 笥 三郎 (KAKEI, Saburo)

## 概要

六角形領域における菱形タイリングの分配関数は, Hahn アンサンブルに対する行列積分で表されることが, Johansson によって示されている. その分配関数と離散戸田方程式のタウ関数との関係について議論する.

## 1 はじめに

近年, 組合せ論と可積分系との関係が, 様々な角度から研究されている [3, 9, 10, 13, 2]. 本研究では, 六角形領域におけるランダム菱形タイリングに関して, その分配関数と離散戸田方程式のタウ関数との関係について議論することを目的とする.

まずは, 本稿の基礎となる六角形領域と菱形タイリングについて述べる. 座標平面上の基底ベクトルを  $\mathbf{e} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ,  $\mathbf{f} = \left(0, \frac{1}{2}\right)$  と定め,  $a, b, c \in \mathbb{N}$  に対して, 平面上の 6 点  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{0}$  (原点),  $\mathbf{P}_2 = b(\mathbf{e} - \mathbf{f})$ ,  $\mathbf{P}_3 = (a+b)\mathbf{e} + (a-b)\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{P}_4 = (a+b)\mathbf{e} + (a-b+2c)\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{P}_5 = a\mathbf{e} + (a+2c)\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{P}_6 = 2c\mathbf{f}$  を頂点とする六角形を考える (図 1 は  $a = 6, b = 5, c = 8$  の場合).

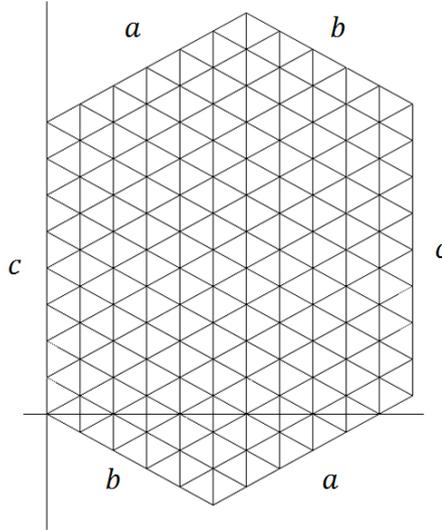


図 1:  $a = 6, b = 5, c = 8$  の六角形領域

図 1 の六角形領域に, 図 2 の 3 種類の菱形タイルを隙間なく配置していくことを考える. ただし, 3 種類の菱形タイルそれぞれに対して, Type 1, Type 2 の菱形タイルには黒丸, Type 3 には白丸を配置する. 図 3 は  $a = 6, b = 5, c = 8$  の六角形領域に対する菱形タイリングの一例である. 菱形タイリングの方法の総数は, (図 3 から分かるように) 縦が  $a$ , 横が  $b$ , 高さが  $c$  の直方体に含

まれる平面分割の総数と等しく,

$$\prod_{k=0}^{a-1} \frac{k!(b+c+k)!}{(b+k)!(c+k)!} \quad (1)$$

で表されることが知られている [1, 3, 10].

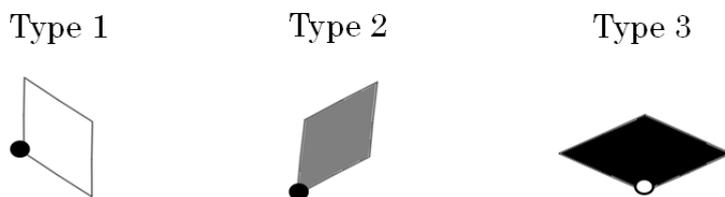


図 2: 3 種類の菱形タイル

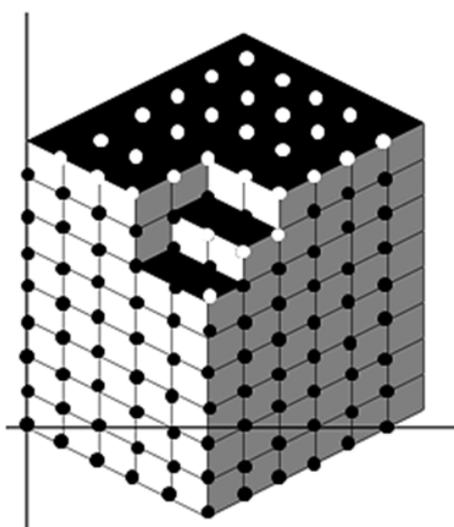


図 3: 菱形タイリングの例:  $x = 6, \xi_1 = 7, \xi_2 = 9, \xi_3 = 11, \xi_4 = 12, \xi_5 = 13$

Johansson[5] は, パラメータ  $a, b, c$  を固定した 6 角形領域 (“ $abc$ -hexagon”) に対する菱形タイリングにおいて, (1) 式で表されるだけのタイリングがすべて同様に確からしいとしたときの, 黒点・白点の配置に関する確率を考察し, 分配関数, およびある種の相関関数は, ランダム行列アンサンブルの 1 つのクラスである「離散直交多項式アンサンブル」と関係することを示した. 本稿では, その分配関数が (非自励) 離散戸田方程式のタウ関数とみなされることを示す.

## 2 菱型タイリングにおける白点の分布確率

以下では  $a, b, c \in \mathbb{N}$  を固定し,

$$\alpha_m = \begin{cases} -m & (0 \leq m \leq b), \\ m - 2b & (b \leq m \leq a), \\ m - 2b & (a \leq m \leq a + b), \end{cases} \quad (2)$$

$$\beta_m = \begin{cases} m + 2(c - 1) & (0 \leq m \leq b), \\ m + 2(c - 1) & (b \leq m \leq a), \\ 2a - m + 2(c - 1) & (a \leq m \leq a + b), \end{cases} \quad (3)$$

$$\gamma_m = \frac{|\beta_m - \alpha_m|}{2}, \quad (4)$$

$$L_m = \gamma_m + 1 - c = \begin{cases} m & (0 \leq m \leq b), \\ b & (b \leq m \leq a), \\ a + b - m & (a \leq m \leq a + b), \end{cases} \quad (5)$$

という記号を用いる.  $0 \leq m < a + b$  なる  $m$  に対し, 直線  $x = m$  を考えると,  $x = m$  上での六角形領域内の白点の個数は  $L_m$  で表される. この  $L_m$  個の白点の位置を  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{L_m}$  で表す. ただし,  $0 \leq \xi_1 < \dots < \xi_{L_m} \leq \gamma_m$  を満たすものとする. さらに, 次の記号を準備しておく.

$$\begin{aligned} a_m &= |a - m|, & b_m &= |b - m|, \\ \Delta_L(\xi) &= \prod_{1 \leq i < j \leq L} (\xi_j - \xi_i), \\ w_N^{(a,b)}(t) &= \frac{(N + a - t)!(b + t)!}{t!(N - t)!} \end{aligned} \quad (6)$$

**定理 1** (Johansson [5]).  $abc$ -hexagon に対する (1) 式で表されるだけのタイリングがすべて同様に確からしいとする. このとき, 直線  $x = m$  上の白点の配置が  $\xi_1, \dots, \xi_{L_m}$  となる確率  $P_{\gamma_m, L_m}^{(a_m, b_m)}[\xi]$  は

$$P_{\gamma_m, L_m}^{(a_m, b_m)}[\xi] = \frac{1}{Z_{\gamma_m, L_m}^{(a_m, b_m)}} \Delta_{L_m}(\xi)^2 \prod_{j=1}^{L_m} w_{L_m}^{(a_m, b_m)}(\xi_j) \quad (7)$$

で与えられる. ただし  $Z_{N,m}^{(\alpha,\beta)}$  は分配関数 (規格化定数) である:

$$Z_{N,m}^{(\alpha,\beta)} = \sum_{h \in \{0, \dots, N\}^m} \Delta_m(h)^2 \prod_{j=1}^m w_m^{(\alpha,\beta)}(h_j). \quad (8)$$

この  $Z_{N,m}^{(\alpha,\beta)}$  はランダム行列理論における行列積分の離散測度版とみなすことができ, 離散直交多項式核に対応している. 特に今の場合, (6) の重み  $w_N^{(a,b)}(t)$  は Hahn 多項式に対する内積を定めるものなので, “Hahn アンサンブル” と呼ばれている [2, 4, 5].

### 3 非自励離散 2 次元戸田分子方程式

2 次元戸田分子方程式

$$\frac{\partial^2 \tau_n}{\partial x \partial y} \tau_n - \frac{\partial \tau_n}{\partial x} \frac{\partial \tau_n}{\partial y} = \tau_{n+1} \tau_{n-1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \tau_{-1} = 0) \quad (9)$$

は, 2 方向ロンスキアン型の解を持つことが知られている [7]:

$$\tau_n(x, y) = \det \left( \frac{\partial^{i+j-2} f(x, y)}{\partial x^{i-1} \partial y^{j-1}} \right)_{i,j=1}^n. \quad (10)$$

方程式 (9) の 1 つの離散化として, 広田は次の方程式を提出した [6]:

$$\tau_n(x + \delta, y + \varepsilon) \tau_n(x, y) - \tau_n(x + \delta, y) \tau_n(x, y + \varepsilon) = \delta \varepsilon \tau_{n+1}(x, y) \tau_{n-1}(x + \delta, y + \varepsilon). \quad (11)$$

ここでは, 方程式 (11) の “非自励化” を考える.

定理 2 (非自励離散 2 次元戸田分子方程式 (cf. [11, 12])). タウ関数  $\tau_n(l, m)$  を次で定義する:

$$\tau_n(l, m) := \begin{vmatrix} g_{i,j}(l, m) & g_{i,j+1}(l, m) & \cdots & g_{i,j+n-1}(l, m) \\ g_{i+1,j}(l, m) & g_{i+1,j+1}(l, m) & \cdots & g_{i+1,j+n-1}(l, m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{i+n-1,j}(l, m) & g_{i+n-1,j+1}(l, m) & \cdots & g_{i+n-1,j+n-1}(l, m) \end{vmatrix} \quad (12)$$

ただし, 成分  $g_{ij} = g_{ij}(l, m)$  は次の「分散関係式」を満たすものとする:

$$g_{ij}(l+1, m) = g_{ij}(l, m) + a_l g_{i+1,j}(l, m), \quad g_{ij}(l, m+1) = g_{ij}(l, m) + b_m g_{i,j+1}(l, m). \quad (13)$$

このとき,

$$\begin{aligned} \tau_n(l, m)\tau_n(l+1, m+1) - \tau_n(l+1, m)\tau_n(l, m+1) \\ = a_{l-1}b_{m-1}\tau_{n+1}(l, m)\tau_{n-1}(l+1, m+1). \end{aligned} \quad (14)$$

(注 1) 方程式 (14) は文献 [11, 12] で扱われている方程式と同じものであり, 行列式型の解も [11] で議論されている. 以下では, 行列式の恒等式による初等的な証明を紹介する.

(注 2) (14) で, パラメータ  $\{a_l\}, \{b_m\}$  が  $l, m$  によらない定数である場合が (11) である. また,  $\{a_l\}, \{b_m\}$  を適当に特殊化すれば, [8] の “ $q$  離散戸田分子方程式” が得られる.

[定理 2 の証明]. 証明は, 連続の場合に (10) が (9) の解になることの証明と同様に, 行列式に対する「ヤコビの恒等式」を用いる.

まず, 関係式 (13) を用いて,

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}(l-1, m) &= \begin{vmatrix} g_{i,j}(l-1, m) & \cdots & g_{i,j+N-1}(l-1, m) & g_{i,j+N}(l-1, m) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{i+N-1,j}(l-1, m) & \cdots & g_{i+N-1,j+N-1}(l-1, m) & g_{i+N-1,j+N}(l-1, m) \\ g_{i+N,j}(l-1, m) & \cdots & g_{i+N,j+N-1}(l-1, m) & g_{i+N,j+N}(l-1, m) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} g_{i,j}(l, m) & \cdots & g_{i,j+n-1}(l, m) & g_{i,j+n}(l, m) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{i+n-1,j}(l, m) & \cdots & g_{i+n-1,j+n-1}(l, m) & g_{i+n-1,j+n}(l, m) \\ g_{i+n,j}(l-1, m) & \cdots & g_{i+n,j+n-1}(l-1, m) & g_{i+n,j+n}(l-1, m) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

と書き換える. 同様にして,

$$\tau_{n+1}(l, m-1) = \begin{vmatrix} g_{i,j}(l, m) & \cdots & g_{i,j+n-1}(l, m) & g_{i,j+n}(l, m-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{i+n-1,j}(l, m) & \cdots & g_{i+n-1,j+n-1}(l, m) & g_{i+n-1,j+n}(l, m-1) \\ g_{i+n,j}(l, m) & \cdots & g_{i+n,j+n-1}(l, m) & g_{i+n,j+n}(l, m-1) \end{vmatrix}, \quad (16)$$

$$\tau_{n+1}(l-1, m-1) = \begin{vmatrix} g_{i,j}(l, m) & \cdots & g_{i,j+n-1}(l, m) & g_{i,j+n}(l, m-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{i+n-1,j}(l, m) & \cdots & g_{i+n-1,j+n-1}(l, m) & g_{i+n-1,j+n}(l, m-1) \\ g_{i+n,j}(l-1, m) & \cdots & g_{i+n,j+n-1}(l-1, m) & g_{i+n,j+n}(l-1, m-1) \end{vmatrix} \quad (17)$$

となる. ここで,  $(n+2)$  次行列式

$$D = \begin{vmatrix} g_{i,j}(l, m) & \cdots & g_{i,j+n-1}(l, m) & g_{i,j+n}(l, m) & g_{i,j+n}(l, m-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{i+n-1,j}(l, m) & \cdots & g_{i+n-1,j+n-1}(l, m) & g_{i+n-1,j+n}(l, m) & g_{i+n-1,j+n}(l, m-1) \\ g_{i+n,j}(l, m) & \cdots & g_{i+n,j+n-1}(l, m) & g_{i+n,j+n}(l, m) & g_{i+n,j+n}(l, m-1) \\ g_{i+n,j}(l-1, m) & \cdots & g_{i+n,j+n-1}(l-1, m) & g_{i+n,j+n}(l-1, m) & g_{i+n,j+n}(l-1, m-1) \end{vmatrix} \quad (18)$$

に対するヤコビの恒等式 [6, 7] (“Dodgson condensation” [3])

$$D \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} n+2 \\ n+2 \end{pmatrix} - D \begin{pmatrix} n+1 \\ n+2 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} n+2 \\ n+1 \end{pmatrix} = D \cdot D \begin{pmatrix} n+1, n+2 \\ n+1, n+2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

を考える. ただし,  $D \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$  は  $(n+2)$  次行列式  $D$  から  $i$  行  $j$  列を取り除いた小行列式,  $D \begin{pmatrix} i_1, i_2 \\ j_1, j_2 \end{pmatrix}$  は  $i_1$  行,  $i_2$  行,  $j_1$  列,  $j_2$  列を取り除いた小行列式を意味する. ここに (15), (16), (17) 等を用いれば, (14) が成り立つことが示される.  $\square$

## 4 Hahn アンサンブルの分配関数と戸田方程式

分配関数 (8) と非自励離散 2 次元戸田分子方程式 (14) との関係を見るために, Hahn weight  $w_N^{(a,b)}(t)$  に若干手を加えて,

$$\tilde{w}_N^{(a,b)}(t) = \frac{1}{a!b!} w_N^{(a,b)}(t) = \prod_{k=1}^a \left(1 + \frac{N-t}{k}\right) \cdot \prod_{k=1}^b \left(1 + \frac{t}{k}\right) \quad (20)$$

のように変形する. こうすると,

$$\tilde{w}_N^{(a+1,b)}(t) - \tilde{w}_N^{(a,b)}(t) = \frac{N-t}{a+1} \tilde{w}_N^{(a,b)}(t), \quad \tilde{w}_N^{(a,b+1)}(t) - \tilde{w}_N^{(a,b)}(t) = \frac{t}{b+1} \tilde{w}_N^{(a,b)}(t) \quad (21)$$

が成り立つことが見て取れる. さらに記号を  $a \rightarrow l, b \rightarrow m$  に変え,  $a_l = \frac{1}{l+1}, b_m = \frac{1}{m+1}$  とすれば,

$$\frac{\tilde{w}_N^{(l+1,m)}(t) - \tilde{w}_N^{(l,m)}(t)}{a_l} = (N-t) \tilde{w}_N^{(l,m)}(t), \quad \frac{\tilde{w}_N^{(l,m+1)}(t) - \tilde{w}_N^{(l,m)}(t)}{b_m} = t \tilde{w}_N^{(l,m)}(t) \quad (22)$$

が得られる.

一方, Vandermonde 行列式  $\Delta_L(\xi_1, \dots, \xi_L) = \prod_{1 \leq i < j \leq L} (\xi_j - \xi_i) = \det(\xi_i^{j-1})_{i,j=1}^L$  を用いて (8) を変形すると,

$$\begin{aligned} Z_{\gamma,L}^{(a,b)} &= \det \left( \sum_{\xi=0}^{\gamma} \xi^{i+j-2} w_{\gamma}^{(a,b)}(\xi) \right)_{i,j=1}^L \\ &= (-1)^{L(L-1)/2} (a!b!)^L \det \left( \sum_{\xi=0}^{\gamma} \xi^{i-1} (N-\xi)^{j-1} \tilde{w}_{\gamma}^{(a,b)}(\xi) \right)_{i,j=1}^L \end{aligned} \quad (23)$$

と表される. ここで

$$g_{ij}(a,b) = \sum_{\xi=0}^{\gamma} \xi^{i-1} (N-\xi)^{j-1} \tilde{w}_{\gamma}^{(a,b)}(\xi) \quad (24)$$

とおき, 記号を  $a \rightarrow l, b \rightarrow m, L \rightarrow n$  に変えると,

$$Z_{\gamma,n}^{(l,m)} = (-1)^{n(n-1)/2} (a!b!)^n \tau_n(l,m), \quad \tau_n(l,m) = \det(g_{i,j}(l,m))_{i,j=1}^n \quad (25)$$

という表示が得られる. (22) を用いれば, (24) の  $g_{ij}(l,m)$  が (13) を満たすことが分かるので, Hahn アンサンブルの分配関数  $Z_{\gamma,n}^{(l,m)}$  は非自励離散 2 次元戸田分子方程式のタウ関数の構造を持つことが示された.

## 5 まとめと今後の課題

本稿では、六角形領域の菱型タイリングに現れる分配関数と、非自励離散2次元戸田分子方程式との関係を議論した。より一般の直交多項式アンサンブル [2, 4, 5] に対しても同様のことが期待できる。例えば、Aztec diamond のランダムミノタイリングには Krawtchouk アンサンブルが現れるが、そこでの分配関数についても同様の議論を行うことが可能である。また、行列式ではなく Pfaffian が現れる状況を調べることも、興味深い課題と言える。

謝辞 多数の有益なコメントをいただいた査読者の方に感謝致します。本研究は JSPS 科研費 23540252 の助成を受けたものです。

## 参考文献

- [1] G.E. Andrews and K. Eriksson, *Integer Partitions*, Second Edition, Cambridge University Press, 2004 (佐藤文広訳, 整数の分割, 数学書房, 2006 年).
- [2] J. Baik, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin and P.D. Miller, *Discrete Orthogonal Polynomials: Asymptotics and Applications*, Princeton Univ. Press, 2007.
- [3] D.M. Bressoud, *Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [4] K. Johansson, Discrete orthogonal polynomial ensembles and the Plancherel measure, *Ann. of Math.* **153** (2001), 259–296.
- [5] K. Johansson, Non-intersecting paths, random tilings and random matrices, *Probab. Theory Relat. Fields* **123** (2002), 225–280.
- [6] R. Hirota, Discrete two-dimensional Toda molecule equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **56** (1987), 4285–4288.
- [7] 広田良吾, 直接法によるソリトンの数理, 岩波書店, 1992 年.
- [8] K. Kajiwara, Y. Ohta and J. Satsuma,  $q$ -discrete Toda molecule equation, *Phys. Lett. A* **180** (1993), 249–256.
- [9] 上岡修平, 平面路の数え上げと離散可積分系, 京都大学数理解析研究所講究録 **1650** (2009), 173–189.
- [10] 高崎金久, 線形代数と数え上げ, 日本評論社, 2012 年.
- [11] S. Tsujimoto, Determinant solutions of the nonautonomous discrete Toda equation associated with the deautonomized discrete KP hierarchy, *J. Syst. Sci. Complex.* **23** (2010), 153–176.
- [12] R. Willox, T. Tokihiro and J. Satsuma, Darboux and binary Darboux transformations for the nonautonomous discrete KP equation, *J. Math. Phys.* **38**: (1997), 6455–6469.
- [13] 山田裕史, 組合せ論プロムナード, 日本評論社, 2009 年.