

## ドメイン壁境界条件下での対称性付き6頂点模型の分配関数とタウ関数

渡邊, 拓弥  
立教大学大学院理学研究科

笈, 三郎  
立教大学理学部

<https://doi.org/10.15017/1448883>

---

出版情報 : 応用力学研究所研究集会報告. 25A0-S2 (25), pp.157-162, 2014-03. 九州大学応用力学研究所  
バージョン :  
権利関係 :

応用力学研究所研究集会報告 No.25AO-S2  
「非線形波動研究の拡がり」 (研究代表者 増田 哲)

Reports of RIAM Symposium No.25AO-S2

*The breadth and depth of nonlinear wave science*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2013

Article No. 25 (pp. 157 - 162)

# ドメイン壁境界条件下での対称性付き 6 頂点模型の分配関数とタウ関数

渡邊 拓弥 (WATANABE Takuya), 笈 三郎 (KAKEI Saburo)

(Received 15 January 2014; accepted 12 February 2014)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
March, 2014

# ドメイン壁境界条件下での対称性付き6頂点模型の分配関数とタウ関数

立教大学大学院理学研究科 渡邊 拓弥 (WATANABE, Takuya)  
立教大学理学部 笥 三郎 (KAKEI, Saburo)

## 概要

Foda [2], 高崎 [12] らにより, ドメイン壁境界条件における6頂点模型の分配関数には, KP階層のタウ関数の構造が隠れていることが指摘されている. 一方, Kuperberg [6] により, ドメイン壁境界条件に対称性を加えた場合における分配関数も与えられている. 今回は対称性を加えた場合における分配関数にもKP階層のタウ関数の構造が隠れているかを調べる.

## 1 はじめに

可解格子模型の典型例である6頂点模型において, ある特殊な境界条件(ドメイン壁境界条件)の下では分配関数が有限サイズの行列式を用いて表されることが知られている [3, 4]. この行列式表示は, Kuperberg によって, いわゆる「交代符号行列」の数え上げの問題に応用された [1, 5]. Kuperberg はさらに対称性を加えた交代符号行列に対しても, 同様の手法で数え上げが行えることを示している [6].

一方, ドメイン壁境界条件の下での分配関数に現れる行列式に, KP階層のタウ関数の構造が隠れていることが, Foda [2], 高崎 [12] によって指摘されている. そこで本研究では, 対称性を加えた場合の分配関数に現れる行列式に対しても, KP階層のタウ関数の構造を持つかどうかを調べることを目的とする.

## 2 KP階層のタウ関数

まずはKP階層のタウ関数を導入する. KP階層にはいくつかの定式化のやり方があるが, ここでは双線形恒等式から出発する (cf. [7]).

**定義 2.1.** 無限個の変数  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3, \dots)$  の関数  $\tau[\mathbf{t}]$  がKP階層のタウ関数であるとは, 次の双線形恒等式をみたすことである.

$$0 = \oint \frac{d\lambda}{2\pi i} e^{\xi((\mathbf{t}-\mathbf{t}'), \lambda)} \tau[\mathbf{t} - \epsilon(\lambda^{-1})] \tau[\mathbf{t}' + \epsilon(\lambda^{-1})] \quad (1)$$

ただし  $\epsilon(a) = (a, a^2/2, a^3/3, \dots)$  とする.

**定義 2.2.**  $N$  個の変数  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$  と分割  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  (ただし  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$ ) に対して, シューア関数  $s_\lambda(\mathbf{x})$  を次で定義する.

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\det(x_j^{N-i+\lambda_i})}{\det(x_j^{N-i})} = \frac{\det(x_j^{N-i+\lambda_i})}{\Delta(\mathbf{x})} \quad (2)$$

ただし  $\Delta(\mathbf{x})$  は Vandermond 行列式, すなわち  $\Delta(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)$  とする.

上のシューア関数における  $\mathbf{x}$  変数と KP 階層の  $\mathbf{t}$  変数との関係を  $t_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N x_k^n$  によって定める。この関係式を通して上の  $s_\lambda(\mathbf{x})$  を  $\mathbf{t}$  の関数と見なすときには、 $s_\lambda[\mathbf{t}]$  と表すことにする。タウ関数についても、 $\mathbf{t}$  変数の関数とみなすときは  $\tau[\mathbf{t}]$ ,  $\mathbf{x}$  変数の関数とみなすときは  $\tau(\mathbf{x})$  と表すことにする (この記法は Zinn-Justin による [13])。

定理 2.1.  $\tau[\mathbf{t}] \in \mathbb{C}[[\mathbf{t}]]$  を

$$\tau[\mathbf{t}] = \sum_{\lambda} \xi_{\lambda} s_{\lambda}[\mathbf{t}] \quad (3)$$

と展開するとき、双線形恒等式 (1) は (3) の展開係数  $\{\xi_{\lambda}\}_{\lambda}$  に対するプリュッカー関係式と等価である。

特に、分割  $\lambda$  の長さを  $l(\lambda)$  と表すことにすると、 $l(\lambda) > N$  であるすべての  $\lambda$  に対して  $\xi_{\lambda} = 0$  とすることで  $\xi_{\lambda}$  は有限サイズの行列式で表すことができる。

また、次の定理が成り立つ。

定理 2.2 ([8] の (1.16) 式の特別な場合).  $N$  個のべき級数  $f_i(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_{il} x^l$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) に対して、

$$\tau(\mathbf{x}) = \frac{\det(f_i(x_j))_{i,j=1}^N}{\Delta(\mathbf{x})} \quad (4)$$

は KP 階層のタウ関数となる。

この定理の証明は、有限サイズの行列式で表した  $c_{\lambda}$  と分割に対する  $s_{\lambda}$  に対してコーシー・ビネの公式を用いることで得られる。詳しい証明については [12] を参照していただきたい。

### 3 ドメイン壁境界条件付き 6 頂点模型の分配関数と KP 階層のタウ関数

$n$  本の横線と  $n$  本の縦線からなる格子状のグラフに対して、各頂点に対して図 1 の 6 種類のいずれかを配置することを考える (6 頂点模型)。ただし、 $\sigma(a^2) = a^2 - a^{-2}$ ,  $\sigma(az) = az - (az)^{-1}$ ,  $\sigma(a/z) = a/z - z/a$  はそれぞれの配置に対する相対確率 (ボルツマン重率) である。

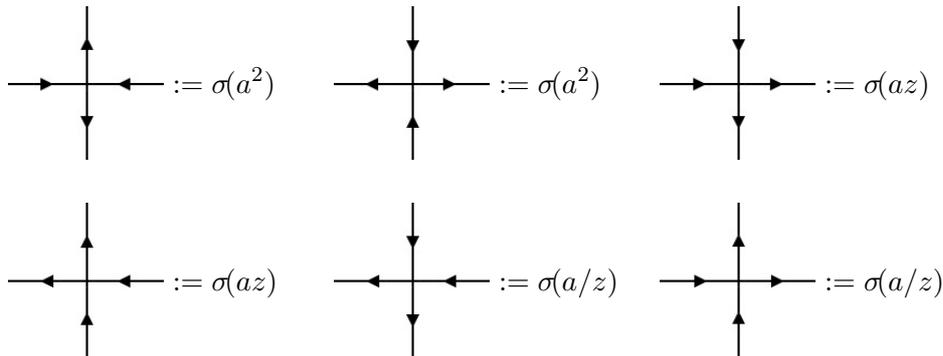


図 1: 6 頂点模型における配置

このとき分配関数  $Z_n$  は

$$Z_n(z, a) = \sum_{\text{配置}} \prod_{\text{頂点}} (\text{各頂点でのボルツマンウエイト})$$

で定義される．一般の場合には分配関数を何か扱いやすい形に書き換えることは難しい問題であるが，“ドメイン壁境界条件” (DWBC : domain wall boundary condition) と呼ばれる境界条件の下では，分配関数  $Z_n(\vec{x}, \vec{y}; a)$  が行列式によって表される [1, 3, 4]．ここで，“ドメイン壁境界条件”とは，図2のような境界条件である（ただし  $x_i, y_j$  はボルツマン重率に対するスペクトルパラメータ）． $n = 6$  の場合に，ドメイン壁境界条件を持つ格子グラフに6頂点配置のグラフを矛盾なく敷き詰めた例が，図3である．

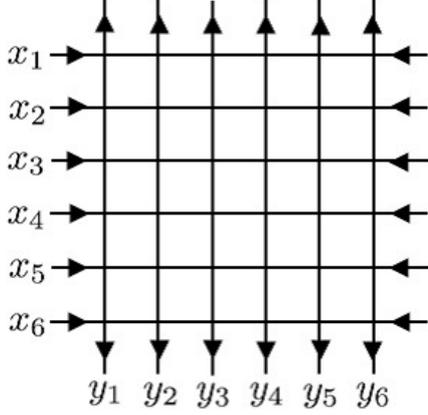


図 2: ドメイン壁境界条件

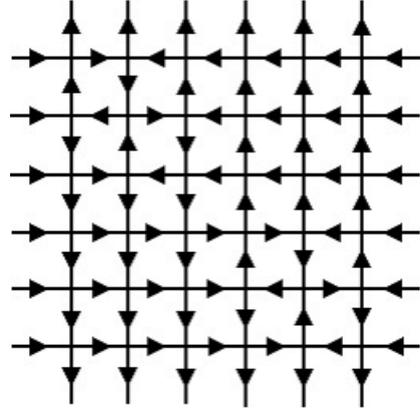


図 3:  $n = 6$  の場合の例

**定理 3.1** (Izergin [3], Korepin [4]). ドメイン壁境界条件の下では，

$$Z_n(\vec{x}, \vec{y}; a) = \frac{\alpha(a^2)^n \prod_{i,j=1}^n \sigma\left(\frac{ax_i}{y_j}\right) \sigma\left(\frac{ay_j}{x_i}\right)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} \sigma\left(\frac{x_j}{x_i}\right) \sigma\left(\frac{y_i}{y_j}\right)} \det \left( \frac{1}{\sigma\left(\frac{ax_i}{y_j}\right) \sigma\left(\frac{ay_j}{x_i}\right)} \right)_{i,j=1}^n. \quad (5)$$

Foda [2], 高崎 [12] らにより，(5) の分配関数には，KP 階層のタウ関数の構造が隠れていることが指摘されている．ここではまずそれを示す手法を，[12] に従って紹介する．

境界条件付き6頂点模型の分配関数である(5)式に対して  $u_i := x_i^2, v_j := y_j^2, q := a^2$  と変数変換をほどこす．このとき  $Z_n(\vec{x}, \vec{y}; a)$  (以降  $Z_n$  と表記する) は

$$Z_n = \frac{\left(q - \frac{1}{q}\right)^n \prod_{i,j=1}^n \frac{1}{qu_i v_j} (qu_i - v_j)(qv_j - u_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{u_i^{\frac{1}{2}} u_j^{\frac{1}{2}} v_i^{\frac{1}{2}} v_j^{\frac{1}{2}}} (u_j - u_i)(v_i - v_j)} \det \left( \frac{qu_i v_j}{(qu_i - v_j)(qv_j - u_i)} \right)_{i,j=1}^n \quad (6)$$

$$= C_n \left(q - \frac{1}{q}\right)^n \frac{\prod_{i,j=1}^n (qu_i - v_j)(qv_j - u_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (u_i - u_j)(v_i - v_j)} \det \left( \frac{1}{(qu_i - v_j)(qv_j - u_i)} \right)_{i,j=1}^n \quad (7)$$

となる．ただし  $C_n$  は  $u, v$  による関数である．

ここで(7)式に対して  $u$  を変数とみてさらに変形をすると，

$$Z_n = C_n \left(q - \frac{1}{q}\right)^n \frac{1}{\Delta(\mathbf{u})\Delta(\mathbf{v})} \det \left( \frac{\prod_{k=1}^n (qu_k - v_j)(qv_k - u_i)}{(qu_i - v_j)(qv_j - u_i)} \right)_{i,j=1}^n \quad (8)$$

が得られ，また(7)式に対して  $v$  を変数とみて同様に変形をすると，

$$Z_n = C_n \left(q - \frac{1}{q}\right)^n \frac{1}{\Delta(\mathbf{u})\Delta(\mathbf{v})} \det \left( \frac{\prod_{k=1}^n (qu_k - v_j)(qv_j - u_k)}{(qu_i - v_j)(qv_j - u_i)} \right)_{i,j=1}^n \quad (9)$$

が得られる。このとき定理 2.2 より, (8) 式には

$$\tau_1(\mathbf{x}) = \frac{\det(f_j(x_i))_{i,j=1}^n}{\Delta(\mathbf{x})}, \quad f_j(x) := \prod_{k \neq j}^n (qx - y_k)(qy_k - x) \quad (10)$$

というタウ関数, (9) 式には,

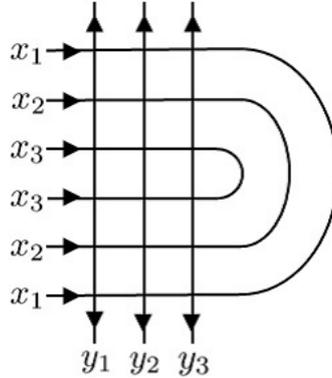
$$\tau_2(\mathbf{y}) = \frac{\det(g_i(y_j))_{i,j=1}^n}{\Delta(\mathbf{y})}, \quad g_i(y) := \prod_{k \neq i}^n (qx_k - y)(qy - x_k) \quad (11)$$

というタウ関数の構造がそれぞれ隠れていることがわかる。

#### 4 180° 回転対称性を持つ場合

ドメイン壁境界条件付き 6 頂点模型のグラフに対して, その部分集合としていくつかの対称性をみたすものを考えることができる。Robbins [9] は (もとは他の集合についてであるが) 対称性として 90° 回転対称や 180° 回転対称など 8 つのクラスをあげている。Kuperberg[6] はこの 8 つのクラスのうちいくつかのクラスに対して, グラフの形と境界条件をうまくとることで分配関数を与えている。

図 3 のドメイン壁境界条件付き 6 頂点模型は 180° 回転対称 (half-turn symmetric) なグラフの例である。このとき, Kuperberg[6] は図のようなグラフと境界条件 ( $x_i, y_j$  は分配関数を定義するためのスペクトルパラメーター) を考え, 次の定理 4.1 のような分配関数を与えている。



定理 4.1 (Kuperberg [6]). サイズ  $2n \times 2n$  の 180° 回転対称な分配関数は次で与えられる。

$$Z_{HT}(2n; \vec{x}, \vec{y}) = \frac{\sigma(a^2)^n \prod_{i,j=1}^n \sigma(ax_i/y_j)^2 \sigma(ay_j/x_i)^2}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} \sigma(x_j/x_i)^2 \sigma(y_i/y_j)^2} \times \det \left( \frac{1}{\sigma(ax_i/y_j) \sigma(ay_j/x_i)} \right) \det \left( \frac{1}{\sigma(ay_j/x_i)} + \frac{1}{\sigma(ax_i/y_j)} \right)_{i,j=1}^n \quad (12)$$

基礎となるグラフの取り方から, (12) 式の分配関数は (偶数  $\times$  偶数) のドメイン壁境界条件付き 6 頂点模型にしか用いることができないことに注意する。

また, (12) は (5) を含むから,  $Z_{HT}(2n; \vec{x}, \vec{y})$  は,

$$Z_{HT} = Z_n \frac{\prod_{i,j=1}^n \sigma(ax_i/y_j) \sigma(ay_j/x_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} \sigma(x_j/x_i) \sigma(y_i/y_j)} \det \left( \frac{1}{\sigma(ay_j/x_i)} + \frac{1}{\sigma(ax_i/y_j)} \right)_{i,j=1}^n \quad (13)$$

と書き直すことができる（以降  $Z_{HT} = Z_{HT}(2n; \vec{x}, \vec{y})$  と略記する）．右辺の  $Z_n$  にはタウ関数の構造が隠れていることは先程紹介したので，ここでは

$$\tilde{Z}_{HT} = \frac{\prod_{i,j=1}^n \sigma(ax_i/y_j) \sigma(ay_j/x_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} \sigma(x_j/x_i) \sigma(y_i/y_j)} \det \left( \frac{1}{\sigma(ay_j/x_i)} + \frac{1}{\sigma(ax_i/y_j)} \right)_{i,j=1}^n \quad (14)$$

とおき， $\tilde{Z}_{HT}$  について考察する． $u_i := x_i^2$ ,  $v_j := y_j^2$ ,  $q := a^2$  と変数変換をほどこすと，(14) の行列式の成分は

$$\frac{1}{\sigma(ay_j/x_i)} + \frac{1}{\sigma(ax_i/y_j)} = \frac{(a^2 x_i^2 - y_j^2) + (a^2 y_j^2 - x_i^2)}{(a^2 y_j^2 - x_i^2)(a^2 x_i^2 - y_j^2)} = \frac{(q-1)(u_i + v_j)}{(qv_j - u_i)(qu_i - v_j)} (qu_i v_j)^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

と書き換えられる．よって  $\tilde{Z}_{HT}$  は，

$$\tilde{Z}_{HT} = \frac{\prod_{i,j=1}^n \frac{1}{qu_i v_j} (qu_i - v_j)(qv_j - u_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{u_i^{\frac{1}{2}} u_j^{\frac{1}{2}} v_i^{\frac{1}{2}} v_j^{\frac{1}{2}}} (u_j - u_i)(v_i - v_j)} \det \left( \frac{(q-1)(u_i + v_j)}{(qv_j - u_i)(qu_i - v_j)} (qu_i v_j)^{\frac{1}{2}} \right)_{i,j=1}^n \quad (16)$$

$$= C'_N \frac{\prod_{i,j=1}^n (qu_i - v_j)(qv_j - u_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (u_i - u_j)(v_i - v_j)} \det \left( \frac{(u_i + v_j)}{(qv_j - u_i)(qu_i - v_j)} \right)_{i,j=1}^n \quad (17)$$

となる．ただし， $C'_N$  は  $u, v$  に関する関数である．

ここで (17) 式に対して  $u$  を変数とみてさらに変形をおこなえば，

$$\tilde{Z}_{HT} = C'_N \frac{1}{\Delta(\mathbf{u})\Delta(\mathbf{v})} \det \left( \frac{(u_i + v_j) \prod_{k=1}^n (qu_i - v_k)(qv_k - u_i)}{(qu_i - v_j)(qv_j - u_i)} \right)_{i,j=1}^n \quad (18)$$

が，また (17) 式に対して  $v$  を変数とみて同様に変形をおこなえば

$$\tilde{Z}_{HT} = C'_N \frac{1}{\Delta(\mathbf{u})\Delta(\mathbf{v})} \det \left( \frac{(u_i + v_j) \prod_{k=1}^n (qu_k - v_j)(qv_j - u_k)}{(qu_i - v_j)(qv_j - u_i)} \right)_{i,j=1}^n \quad (19)$$

が得られる．このとき定理 2.2 より，(18) 式からは

$$\tau_3(\mathbf{x}) = \frac{\det(f_j^{HT}(x_i))_{i,j=1}^n}{\Delta(\mathbf{x})}, \quad f_j^{HT}(x) := (x + y_j) \prod_{k \neq j}^n (qx - y_k)(qy_k - x) \quad (20)$$

というタウ関数，(19) 式からは

$$\tau_4(\mathbf{y}) = \frac{\det(g_i^{HT}(y_j))_{i,j=1}^n}{\Delta(\mathbf{y})}, \quad g_i^{HT}(y) := (x_i + y) \prod_{k \neq i}^n (qx_k - y)(qy - x_i) \quad (21)$$

というタウ関数が，それぞれ得られることがわかる．以上より， $180^\circ$  回転対称なドメイン壁境界条件付き 6 頂点模型の分配関数からは， $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$  の 4 つのタウ関数が隠れていることが分かった．

## 5 まとめ

$180^\circ$  回転対称性を加えた場合におけるドメイン壁境界条件付き 6 頂点模型についても，通常の場合と同様に KP 階層のタウ関数の構造が隠れていることが分かった．しかし，他の対称性，特に  $90^\circ$  回転対称などのパフィアン型の分配関数で表されるものについても類似のことが言えるのかは，現時点では分かっていない．また，そもそもここに現れた KP 階層のタウ関数の構造を，模型の物理量の計算等にどのように利用できるかが分かっているわけではなく，現時点ではまだ多くの課題が残っていると言える．

## 謝辞

本稿の内容に関して有益な助言をいただいた高崎金久先生、武部尚志先生に感謝します。本研究は JSPS 科研費 23540252 の助成を受けたものです。

## 参考文献

- [1] D.M. Bressoud, *Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, Cambridge University Press, Cambridge, (1999)
- [2] O. Foda, M. Wheeler and M. Zuparic, Domain wall partition functions and KP, *J. Stat. Mech.* (2009), P03017.
- [3] A. Izergin, Partition function of the six-vertex model in a finite volume, *Soviet Phys. Dokl.* **32** (1987), 878–879 (English translation)
- [4] V. Korepin, Calculation of norms of Bethe wave functions, *Comm. Math. Phys.* **86** (1982), 391–418.
- [5] G. Kuperberg, Another proof of the alternating-sign matrix conjecture, *IMRN, International Mathematics Research Notices* **1996**, No. 3, 139–150.
- [6] G. Kuperberg, Symmetry class of alternating-sign matrices under one roof, *Annals of Mathematics*, **32** (2002), 835–866.
- [7] A. Nakayashiki, Sigma function as a tau function, *IMRN, International Mathematics Research Notices* **2010** (2009), 373–394.
- [8] A.Yu. Orlov and T. Shiota, Schur function expansion for normal matrix model and associated discrete matrix models, *Phys. Lett. A* **343** (2005), 384–396.
- [9] D. P. Robbins, Symmetry classes of alternating sign matrices ([arXiv:math.CO/0008045](https://arxiv.org/abs/math/0008045))
- [10] M. Sato, Soliton equations as dynamical systems on a infinite dimensional Grassmann manifolds, 京都大学数理解析研究所講究録 **439** (1981), 30–46.
- [11] M. Sato and Y. Sato, Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifold, In *Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Sciences*, edited by P. D. Lax, H. Fujita, and G. Strang, 259–71. Amsterdam: North-Holland, 1982.
- [12] K. Takasaki, KP and Toda tau functions in Bethe ansatz, in *New Trends in Quantum Integrable Systems – Proceedings of the Infinite Analysis 09 : Kyoto, Japan 27-31 July 2009* (Eds.: B. Feigin, M. Jimbo, M. Okado), World Scientific, Singapore (2011), 373–392.
- [13] P. Zinn-Justin, Six-vertex, loop and tiling models: Integrability and combinatorics, [arXiv:0901.0665](https://arxiv.org/abs/0901.0665).