

# セルオートマトンを用いた信号機のある交通流の解析

伊藤, 秀剛  
東京大学工学部

西成, 活裕  
東京大学先端科学技術センター

<https://doi.org/10.15017/1448880>

---

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 25A0-S2 (22), pp.139-144, 2014-03. 九州大学応用力学研究所  
バージョン：  
権利関係：



応用力学研究所研究集会報告 No.25AO-S2  
「非線形波動研究の拡がり」 (研究代表者 増田 哲)

Reports of RIAM Symposium No.25AO-S2

*The breadth and depth of nonlinear wave science*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2013

Article No. 22 (pp. 139 - 144)

# セルオートマトンを用いた 信号機のある交通流の解析

伊藤 秀剛 (ITO Hidetaka), 西成 活裕 (NISHINARI  
Katsuhiko)

(Received 31 December 2013; accepted 4 March 2014)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
March, 2014

# セルオートマトンを用いた信号機のある交通流の解析

東京大学工学部

伊藤 秀剛 (Ito Hidetaka)

東京大学先端科学技術センター 西成 活裕 (Nishinari Katsuhiro)

## 概要

本論文では、車の流れを完全非対称単純排他過程 (TASEP)、歩行者を離散時間で更新する待ち行列にてモデル化することで、新しい境界条件に従う TASEP モデルを考案する。まず、モデルを用いて交差点における車の流量をモンテカルロシミュレーションにより解析した。結果、歩行者が交差点をふさぐ平均時間を単純に考慮した TASEP モデルと比べ、流量が減少することを発見した。また、平均場近似を用いた数理解析により導いた近似解は、幅広い歩行者流入量の範囲内においてよい近似を見せることを示した。さらに、このモデルに信号機を加えたモデルを考案し、近似解を導出した。

## 1 序論

交通渋滞は世界的な問題の一つである [Helbing(2001)]。車は一台一台が無視できない大きさの体積を持ち、それぞれの車がぶつかり合うことはない。また、自らが外力なしに運動を行う粒子である。前者は排他体積効果、後者は自己駆動粒子と呼ばれる。車の流れをモデル化するためには、以上二点を満たすものでなくてはならない。そのようなモデルの一つに完全非対称単純排他過程 (TASEP) がある [Blythe and Evans(2007)]。TASEP とは、セルオートマトンを用いた離散時間かつ離散座標のモデルである。ASEP は一次元のセルに区切られたレーン内で定義される。レーンには  $N$  個のセルが存在している。レーンには進行方向が存在する。最も後方のセルから順番に  $1, 2, \dots, N$  番目のセルと呼ぶこととする。それぞれのセルは粒子がある、粒子がないという二種類の状態を持つ。各セルの状態は離散時間で全てのセルについて一斉にアップデートされる (パラレルアップデート)。アップデートの際は、自らのセルに粒子があるかどうか、また自分の一つ前方のセルに粒子があるかどうかを確認される。自らのセルに粒子があり、前方のセルに粒子がない場合にのみ、確率  $p$  で粒子はセル一つ分だけ前進する。この操作を繰り返すことにより、粒子は前進してゆく。次に、境界条件について説明する。 $N$  個のセルの両端は別のルールによってアップデートされる。このように両端を持つ TASEP を開放系と呼ぶ。まず、1 番目のセルのアップデートルールを説明する。アップデート時、1 番目のセルに粒子が存在しているかが調べられる。そして、粒子が存在していない場合には、確率  $\alpha$  にて粒子が挿入される、つまり粒子が流入する。次に、 $N$  番目のセルについて説明する。アップデートでは、 $N$  番目のセルの粒子の存在が調べられる。

粒子が存在している場合に限り、確率  $\beta$  にてその粒子が取り除かれる、つまり粒子が流出する。すべてのセルを同時に更新する方法をパラレルアップデートと呼び、この方法での TASEP は交通流で最も有名なモデルの一つである NS モデルの最高速度 1 の時と同じモデルとなる [Nagel and Schreckenberg(1992)]。以上のルールに従う TASEP は厳密解がすでに求まっており、三種類の相を持つことが知られている [de Gier and Nienhuis(1999)]。三種類の相はそれぞれ LD、HD、MC である。LD は密度の低い状態、HD は密度が高い状態、MC は流量が最大になる状態をあらわしている。LD と HD の二つの状態が変化する相転移線 (共存線) 上にパラメータを設定すると、密度が不連続に変化する部分、つまり衝撃波が観測される。交通流の研究では、この相転移ラインが自然流と渋滞を分けるラインである。近年はこのモデルをベースとして多様な分野の研究がなされている [Woelki(2013), Wood(2009)]。

## 2 交差点における交通流のモデル

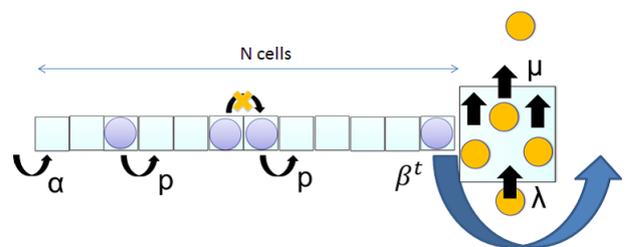


図 1: Model

本論文において用いられたモデルは開放系 TASEP の境界条件を変更したものである。交差点を想像すると、左折する車の流れは横断歩道上の歩行者によってさえぎ

られる。歩行者が一人でも存在している場合は、車は流ることができない。そのことを境界条件としてモデルに加える。

まず、歩行者のモデルについて説明する。歩行者は次々と横断歩道内に流入し、いくらかの時間だけ横断歩道上に存在した後、横断歩道を出ていく。そのような挙動をする歩行者は、離散時間でアップデートされる待ち行列によってモデル化される。横断歩道上には、何人かの歩行者が存在している。横断歩道上の歩行者の数には上限はない。歩行者の移動は車に影響を受けることはない。そして、単位ステップ時間ごとに、歩行者がレート  $\lambda$  のポアソン分布に従い流入する。つまり、 $n$  人歩行者が流入する確率が  $\frac{1}{n!} \lambda^n e^{-\lambda}$  である。また、同時にアップデート時に交差点を渡っている歩行者は確率  $\mu$  で横断歩道から流出する。流出の判定は、歩行者一人ひとり別々に行う。つまり、 $m$  人の歩行者が存在していれば、 $m$  回流出の判定を行う。このモデルは連続時間における M/M/ $\infty$  型待ち行列の離散型に対応している。

次に、変更した TASEP のモデルについて説明する。変更する条件は、 $N$  番目の最後のセルの境界条件である。このモデルにおいて、最後のセルは横断歩道の前の位置を表している。 $N$  番目のセルにいる車は歩行者がいるときには流出することができない。歩行者がいない状態に限り、確率  $p$  で系の外へ流出することができる。このルールの変更によって、通常の流出レート  $\beta$  とは違い、流出確率が時間に依存した関数としてあらわされる。この点が、通常の開放系 TASEP と異なる点である。

### 3 交差点の交通モデルと新しい境界条件を持つ TASEP モデルの等価性

歩行者によって流量が制限される車の流れが、新しい境界条件を持つ TASEP となっていることを説明する。歩行者のモデルは定常状態における厳密解がわかり、横断歩道上に  $j$  人の歩行者が存在している確率が  $p_j = \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$  である。歩行者の数の解を使って、車のモデルの境界条件を書き換えることができる。車の目線から見ると、歩行者が一人でも存在しているのかどうかのみが問題であるので、歩行者が一人以上いる状態をすべて一括で考える。歩行者のいる状態を "open"、歩行者のいない状態を "closed" と表記する。この表記のもとでは、歩行者が横断歩道上に存在せず、車が流出できる状態となる平均の確率は  $Prob(open) = p_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$  である。つまり、平均的な出口における流出確率はこれに移動確率  $p$  をかけて  $\langle \beta^t \rangle = pe^{-\frac{\lambda}{\mu}}$  である。ここで、この TASEP モデルの流出における境界条件は、毎回独立で

ある通常の TASEP とは違い独立ではないがマルコフ性を持った条件になっていることがわかる。つまり、それぞれ open や closed であるときに、次のステップで open のまま維持されるか、それとも closed の状態になるかという遷移確率が求められる。この遷移確率は、open の場合は open のまま維持する確率が高めであり、逆に closed の場合も closed のままである確率が比較的高くなる。歩行者が一度横断歩道内に流入するとある程度の時間は歩行者が横断歩道上に存在する時間が継続し、逆に横断歩道に歩行者が存在しない場合は新たな歩行者が流入するまで歩行者がいない状態が続くためである。ここで、 $\mu$  が大きければ通常の TASEP に近く、たとえば平均の open 状態になる確率である  $e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$  が同一の場合であっても、歩行者の状態は現在の状態の次の状態への依存度が低下するが、 $\mu$  が小さければ上述の効果が大きく現在の状態を維持しやすくなる。これは、 $\mu$  が小さければ小さいほど、歩行者が長い時間横断歩道内にとどまるからである。 $\mu = 1$  の時は通常の TASEP と等価なモデルとなる。

ここで、このモデルを通常の開放系 TASEP と同様の  $\beta$  を用いた記法であらわす。この時に、開放系 TASEP の  $\beta$  に対応する指標として、出口における流出確率の平均  $\langle \beta^t \rangle$  を使用する。すると、このモデルは TASEP と同様に扱うことができる。

表 1: open と closed の遷移確率。現在の状態が open であるのか closed であるのかによって次の状態がどのようになるのかの確率が違う。

	now	open	closed
next			
open		$e^{-\lambda}$	$\frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\lambda})}}{1-e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}$
closed		$1 - e^{-\lambda}$	$1 - \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\lambda})}}{1-e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}$

### 4 モンテカルロシミュレーションの結果

新しい境界条件を持つ TASEP のシミュレーション結果 ( $p = 0.72$ ,  $\mu = 0.2$ ) は (図 2) である。x 軸は流入レート  $\alpha$  であり、y 軸は流出確率の平均である  $\langle \beta^t \rangle$  である。結果は密度プロットになっており、y 軸に近い部分が LD、x 軸に近い部分が HD、赤い部分が MC に対応している。通常の TASEP と比べて、HD における流量が低下している。そのことにより、相転移位置が上方に移動している。これは、新しい境界条件の影響である。(図 3) は 1 番目のセルから  $N$  番目のセルまでにおいて

粒子が存在している確率（密度）である。左側が1番目のセル、つまり入口に近い部分である。右側が  $N$  番目のセルであり、出口に近いセルである。注目すべきは紫色と黄緑色のプロットである。紫色はすべての場合における密度平均を取った場合のプロットである。それと比べて、黄緑色のプロットは、出口が open である場合に粒子が存在しているかの確率（密度）をプロットしたものである。出口付近では、紫色のプロットと黄緑色のプロットがずれている。つまり、出口付近では出口が open であるかどうかによって、平均密度が変わってくることを示している。その理由について考察する。ここで重要な役割を示すのが  $\mu$  の値である。新しい境界条件によって、open の場合はその状態をより持続させる。また、closed の場合も同様である。このことから、車の粒子は一度流出可能である open の状態になると長いステップ数流出可能になる。TASEP には排除体積効果があるため、それぞれの粒子の相互作用が働き、一度出口の境界が open になってから実際に車が流出する確率は(図4)のように変わっていく。この確率は大局的に見て減少していくのがわかる。また、同様に粒子の存在する確率、密度も低下していく。その作用によって、平均的に見れば同じ確率だけ open になっていたとしても、 $\mu$  の値が小さくなれば小さくなるほど、長時間 open が継続し、流量も少なくなる。よって、HD の総合的な流量が低下し、渋滞が起きやすくなることから渋滞の境目を決める相転移位置が上方にシフトする。 $\mu = 1$  と  $\mu \rightarrow 0$  のケースについて  $\langle \beta^t \rangle$  に対する流量を示したものが(図5)である。 $\mu = 1$  の時は通常の TASEP と同じであるのでこの効果は全くなく、 $\mu \rightarrow 0$  の時が最もこの効果が大きくなる。この場合は流量は平均流出確率  $\langle \beta^t \rangle$  に比例する。これは一度歩行者が流入すると非常に長い時間流出しないため、(図4)における、 $x$  の大きい流量が実現されている状態である。その他のケースについては、流量がこの二つのケースの間となり、 $\mu$  の低下とともに徐々に流量は減少していく。

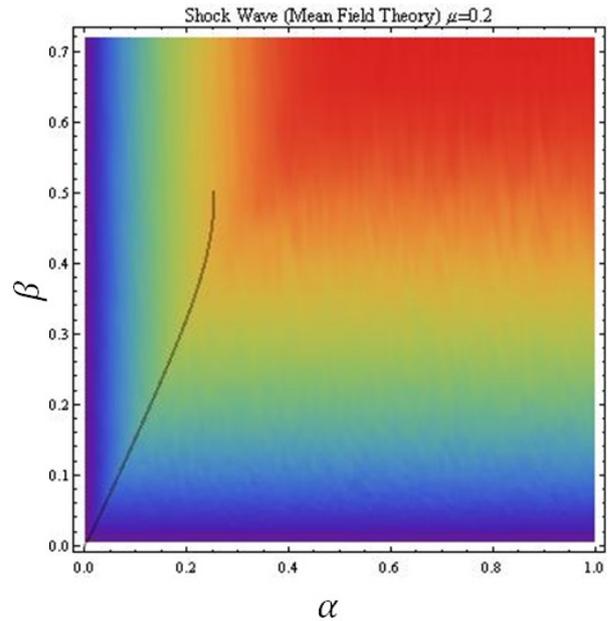


図 2:  $p = 0.72$  かつ  $\mu = 0.2$  とした場合のシミュレーションの結果。 $x$  軸は流入レート  $\alpha$  であり、 $y$  軸は流出確率の平均である  $\langle \beta^t \rangle$  である。結果は密度プロットになっており、 $y$  軸に近い部分が LD、 $x$  軸に近い部分が HD、赤い部分が MC に対応している。通常の TASEP の結果と比べると HD の流量が異なる。それに伴い相転移位置が移動している。黒い線は平均場近似によって出された近似的な相転移線である。

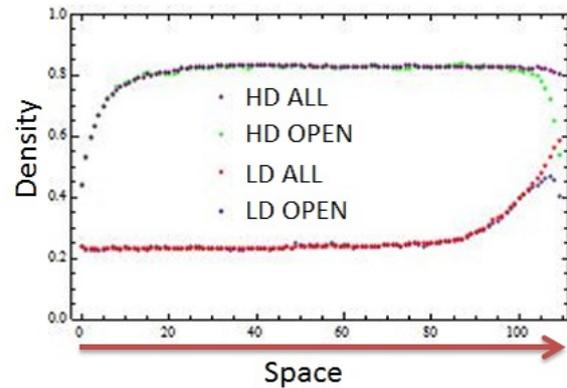


図 3: 1 番目のセルから  $N$  番目のセルまでの粒子が存在している確率（密度）。青色がすべての場合について密度を平均した場合、黄緑色が出口が open である場合のみについて密度を平均したもの。出口付近においては、粒子が存在する確率が出口状態に依存していることがわかる。

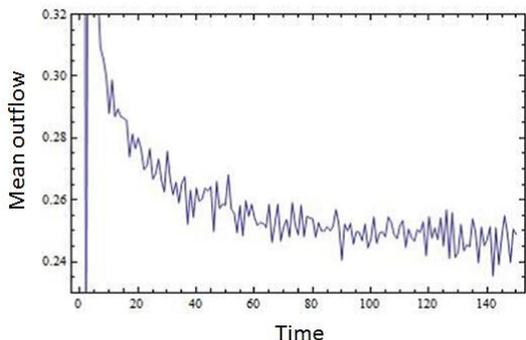


図 4: セルに粒子が詰まっている状態から出口の境界条件を open の状態に固定したときの、粒子が流出する確率の変化。初めて出口が open に変わった時は、粒子が流出する確率は  $p$  である。しかし、その次の時間に粒子が流出する確率はそれより小さくなる。この値は出口が open になってから奇数の時は大きめの値、偶数のときは小さめの値を取るが、大局的に見ると open になってから時間が経過していけばして行くほど確率が減少してゆく。

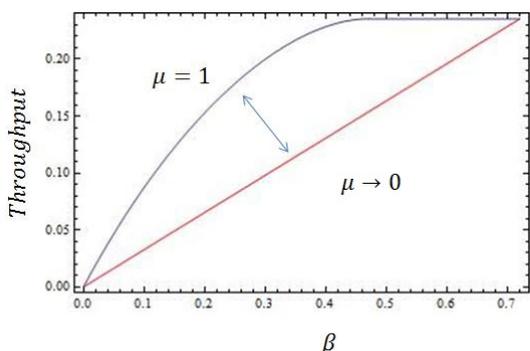


図 5:  $\mu = 1$  の時と  $\mu \rightarrow 0$  の時の HD、MC 相における流量の比較。それぞれ流量の最大値、最小値をあらわしている。 $\mu$  の値が減少すると、それに従い流量の曲線が値が小さくなる方向へ変化していく。

## 5 平均場近似による HD 相の近似解とそれを用いた相転移位置の予測

新しい境界条件を持つ TASEP の流量の近似解を導出する。ここで、LD と MC における流量は出口の境界条件によらないことがわかっているので、通常の TASEP の厳密解と等しい。そこで、出口の境界上限の影響が存在する HD の相における解を導出する。解を導出する際には平均場近似を使用する。本来、すべてのセルの粒子は相関関係を持っている。しかし、それぞれの相関関

係を無視することで近似的な解を得られる。同様に、出口周辺のセルにおいてある出口状態で粒子存在確率（密度）が等しいという仮定を置く。この仮定は (図 3) において、出口付近の粒子の存在確率（密度）が出口状態が open であるか closed であるかに依存しているものの、出口に最も近いセルとその隣のセルではその密度の差は小さく、また HD の相では出口状態を考えなければ平均密度はほぼ等しいことがわかっているため、妥当な近似の仕方であるといえる。平均場近似によって、それぞれのセルは四種類の状態を独立に持つことになる。その四種類とは、出口が open であるのか closed であるのかという二種類と、セルに粒子がいるかどうかの二種類の二通りを掛け合わせた、四種類である。その四種類の状態を  $\rho_{0,open}$ 、 $\rho_{1,open}$ 、 $\rho_{0,closed}$ 、 $\rho_{1,closed}$  とおく。0 は粒子がない状態、1 は粒子がいる状態をあらわす。それぞれ四種類の状態に対応して、状態遷移に関する四つの方程式を立てることができる。それらを連立二次方程式として解き、不適な解を除く。残った適する解を用いて  $p\rho_{1,open}$  を計算すると、それが流量である。

以上の方法を用いて導出した平均場近似解とシミュレーションを比較する。x 軸を  $\langle \beta^t \rangle$  とした場合は (図 6) となる。シミュレーションは  $\alpha$  を十分に大きな値としており、HD 相が現れるように調整している。流量が最大になっていない部分が HD の相に対応する部分である。(図 5) と同様の図の  $\mu = 0.2$  の場合に当たる。HD 相における平均場近似解は  $\langle \beta^t \rangle$  の小さな範囲内においてはよい近似を示していることがわかる。途中からずれてしまっているのは、平均場近似による近似のずれが大きくなってしまうこと、また粒子の存在確率が出口状態に大きく依存するようになることから、仮定からのずれが生じるからである。このグラフを見方を変えて、x 軸を歩行者の流入量  $\lambda$  に置き換えると、ほぼすべての x においてよい近似であることがわかる。 $\lambda$  の増加によって、車が通過できる open 状態になる平均確率が指数関数的に減少することから、すぐさま平均場近似で近似できる範囲内に入るからである。本論文における、歩行者の効果を知る点では、平均場近似はよい結果を与えているといえる。

この近似解を用いて、自然流と渋滞を分ける相転移線（共存線）を求める。相転移線は LD における流量と HD における流量が等しくなり、共存可能になるときの流入、流出レートの関係性をあらわす線である。導出では先程の近似解と、LD における TASEP の厳密解  $\frac{\alpha(p-\alpha)}{p-\alpha^2}$  を等値し、数値解をプロットする。そのうち適切な範囲内を取り出したものが (図 2) の黒線である。この線はある程度の範囲内まで正確に二つの相の境界を示している。

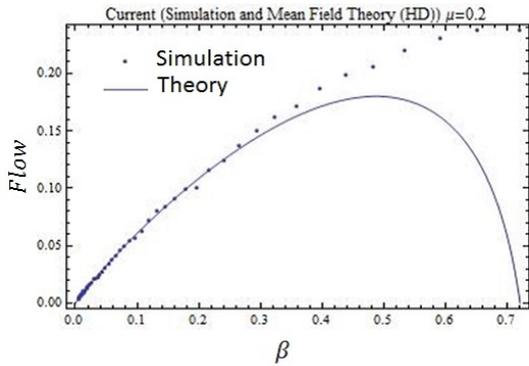


図 6:  $\mu = 0.2$ ,  $p = 0.72$  における平均場近似による解とシミュレーション結果の比較。x 軸を  $\langle \beta^t \rangle$  としている。平均場近似による解は  $\langle \beta^t \rangle$  の小さい範囲で正確な近似を示す。平均場近似は  $\langle \beta^t \rangle = 0, p$  において流量がなくなるが、これは通常の TASEP の HD における厳密解が同様に  $\langle \beta^t \rangle = 0, p$  で流量 0 になることに対応しており、自然である。

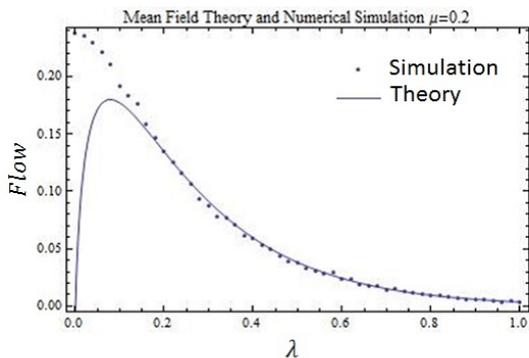


図 7:  $\mu = 0.2$ ,  $p = 0.72$  における平均場近似による解とシミュレーション結果の比較。x 軸は歩行者の流入レート  $\lambda$  としている。ほぼすべての歩行者流入レートにおいて近似とシミュレーション結果は一致している。

## 6 信号機がある場合

信号機がある場合、車だけでなく歩行者も赤信号により流出を止められる。このことにより、歩行者が青信号になった瞬間に大量に歩行者が流れる過渡現象が生じる。この現象は非定常の現象である。(図 8) は信号機のある流れにおける時空図である。時間を横軸、 $N$  個のセルを縦軸に並べた場合に、車が存在していれば黒、存在していなければ青で表示されている。出口は最も上方の部分である。この図から青信号になってからもある程度の時間は車が流出できずにたまったままであることがわかる。このように過渡現象が車の流れを止めている。

る。過渡現象により車が流出できない時間を除いた時間が車両に対する実質的な青信号の時間である。その時間は青信号時間  $T$ 、赤信号時間  $T'$  を用いて近似的に  $T - \frac{1}{-\ln(1-\mu)} (\ln T' \lambda + \gamma + \frac{1}{2T' \lambda} - \frac{1}{12(T' \lambda)^2} + \frac{1}{120(T' \lambda)^4})$  である。ある程度の歩行者流入量がある場合は、車の流量は信号機の実質的な青の継続時間に比例するとみなすことができる。以上の理論的考察と、平均場近似による解を合わせる。その結果が (図 9) である。近似解はほぼすべての歩行者流入量の範囲内でよい近似を示している。

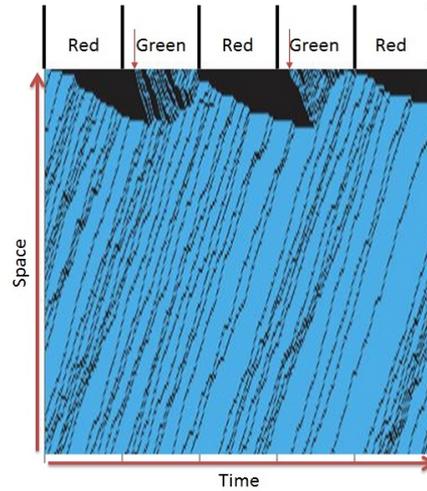


図 8: 信号機と歩行者流入がある場合の時空図。青信号と赤信号で周期的に出口周辺の様子が変化する。青信号になった直後は粒子が流れていないことが見て取れる。それは、青信号になり一斉に横断し始めた歩行者によって、車両が実質的に進めない時間が存在するからである。

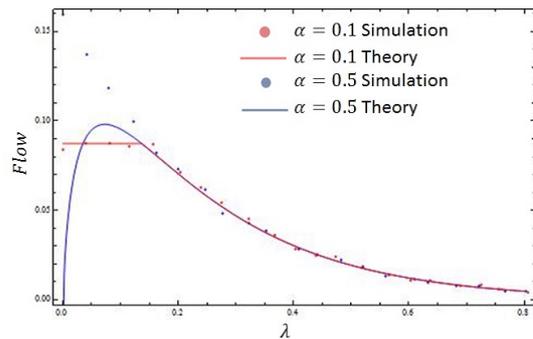


図 9: x 軸を歩行者の流入量とした場合の信号機の存在を考慮した平均場近似解とシミュレーションの比較。青信号の継続時間は全体の 60 パーセントである。青い点は流入量が多いときをあらわしており、歩行者が少なくなると MC 相になる。赤い点は流入量が多くない場合であり、その場合は歩行者が一定量までは LD 相、つまり自由流である。流量が減少し始める部分が渋滞流に変わる相転移をあらわしている。

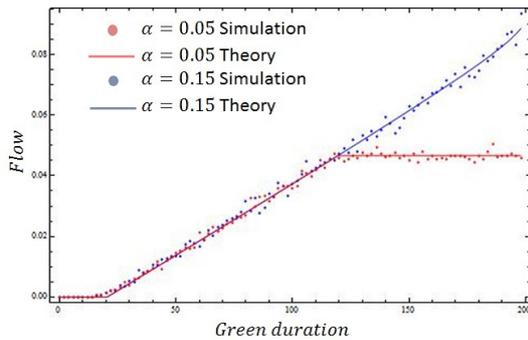


図 10: x 軸を青信号の長さとした場合の信号機の存在を考慮した平均場近似解とシミュレーションの比較。歩行者の流入レートは 0.2 である。青信号時間が極端に短い場合には流量がない状態があることがわかる。これは、たまった歩行者が流れる過渡現象による時間のみで青信号の継続時間が終了してしまったことを意味する。

## 7 結論

本論文では、歩行者が交差点に進入する場合に車両が横断歩道を渡る、また交差点を左折する際の流れをモデル化し、その流量をシミュレーションを用いて解析した。また、理論解析によって、このモデルが流出確率を独立からマルコフ過程に変えた、新しい境界条件を持つ TASEP であることを示し、定性的な性質を理解した。そして平均場近似によって、密度の高いときの流量の近似解を求めた。さらに加えて、信号機を用いた場合の歩行者の流れの非定常現象について考察し、信号機と歩行者が存在する場合の車両の流量の近似解を導出し、シミュレーションとある一定の範囲内においてよい近似を示すことを確認した。本研究によって、累計としては同じ時間交差点内に存在し、車両の通過可能時間の平均が等し

い場合でも自転車のような交差点を素早く通過する乗り物に比べ、歩行者の存在する交差点は、より流量の低下が起きやすいことが示された。さらに、流量は歩行者の流入量にしたがって指数関数型の減少を見せるため、少ない歩行者量でも交通容量の減少が大きいことがわかった。本研究では、歩行者は必ず優先されるべきであるとの仮定を置いている。つまり、歩行者を押しつけて車両が通過することはない。現実的には逆の場合もあり得るだろう。しかしながら、それはより危険な交通環境を生み出す行為である。実際に、歩行者にとって安全であり、多くの交通容量を確保できる環境を作り出すことが求められる。その際に本研究での結果が良い示唆を与えるだろう。

## 参考文献

- [Helbing(2001)] D. Helbing, Rev. Mod. Phys. **73**, 1067 (2001).
- [Blythe and Evans(2007)] R. Blythe and M. Evans, J. Phys. A **40**, R333 (2007).
- [Nagel and Schreckenberg(1992)] K. Nagel and M. Schreckenberg, J. Phys. I (France) **2**, 2221 (1992).
- [de Gier and Nienhuis(1999)] J. de Gier and B. Nienhuis, Phys. Rev. E **59**, 4899 (1999).
- [Woelki(2013)] M. Woelki, Phys. Rev. E **87**, 062818 (2013).
- [Wood(2009)] A. J. Wood, J. Phys. A **42**, 445002 (2009).