

4つの確率変数を含む統合確率粒子系

木村, 俊之
早稲田大学基幹理工学研究科

高橋, 大輔
早稲田大学基幹理工学研究科

<https://doi.org/10.15017/1448879>

出版情報 : 応用力学研究所研究集会報告. 25A0-S2 (21), pp.133-138, 2014-03. 九州大学応用力学研究
所
バージョン :
権利関係 :

応用力学研究所研究集会報告 No.25AO-S2
「非線形波動研究の拡がり」 (研究代表者 増田 哲)

Reports of RIAM Symposium No.25AO-S2

The breadth and depth of nonlinear wave science

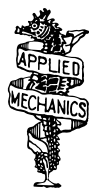
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2013

Article No. 21 (pp. 133 - 138)

4つの確率変数を含む統合確率粒子系

木村 俊之 (KIMURA Toshiyuki), 高橋 大輔
(TAKAHASHI Daisuke)

(Received 23 November 2013; accepted 7 March 2014)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2014

4つの確率変数を含む統合確率粒子系

早稲田大学基幹理工学研究科 木村俊之 (KIMURA Toshiyuki)

早稲田大学基幹理工学研究科 高橋大輔 (DAISUKE Takahashi)

概要

4近傍以下の決定論的な粒子系の時間発展は Max-Plus 代数を用いて特別な形式で表すことができ、この形式により系の漸近挙動が容易に把握できることが知られている。我々はそれらの粒子系を確率変数を用いて1つの式で表し、解の確率的な振る舞いを粒子モデルで説明することに成功した。さらに、ある仮定のもとで基本図の理論曲線を導出し、数値実験の結果と比較した。

1 はじめに

時刻 $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ および位置 $j \in \mathbb{Z}$ において、状態変数 $u_j^n \in \{0, 1\}$ に対する次の時間発展方程式を考える:

$$u_j^{n+1} = f\left(u_{j-\lceil \frac{N-1}{2} \rceil}^n, \dots, u_j^n, \dots, u_{j+\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}^n\right). \quad (1)$$

ここで $N \in \mathbb{N}$ は j を含む周囲の位置の個数 (近傍数)、 $f: \{0, 1\}^N \rightarrow \{0, 1\}$ は時間発展の規則を表す。このとき

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j^{n+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

を満たすならば、この系を N 近傍の粒子セルオートマトン (Particle Cellular Automaton, PCA) と呼ぶことにする。簡単のために空間方向に関して周期 $K (> N)$ の周期境界条件を付加する。このとき服部と武末 [1] によると、時間発展方程式 (1) は関数 $q: \{0, 1\}^{N-1} \rightarrow \{0, 1\}$ および

$$q_j^n := q\left(u_{j+1-\lceil \frac{N-1}{2} \rceil}^n, \dots, u_j^n, \dots, u_{j+\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}^n\right)$$

を用いて、次の様に表すことができる:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + q_{j-1}^n - q_j^n. \quad (3)$$

u_j^n は時刻 n における位置 j での粒子の量を表しており、PCA は式 (2) から空間内の粒子の総量が一定である系となっている。また q_j^n は流束 (flux) と呼ばれ、時刻 n において位置 j から $j+1$ に流入する粒子の移動量 (負ならば逆方向) を表している。

等価なものを同一視して、1近傍の PCA は1種類 (PCA1)、3近傍の PCA も PCA1 および互いに等価なものを除いて1種類 (PCA3)、4近傍の PCA は同様に4種類 (PCA4-1, PCA4-2, PCA4-3, PCA4-4) 存在し、2近傍の PCA は等価なもの以外存在しないことが知られている [2]。また4近傍までの PCA は既に解析されており、PCA4-4 を除いて初期値問題が厳密に解かれている [2]。PCA3, PCA4-1, PCA4-2, PCA4-3 の

時間発展は Max-Plus 代数 [3] を用いてそれぞれ

$$\begin{aligned} q_j^n &= \min(u_j^n, 1 - u_{j+1}^n), \\ q_j^n &= \min(u_{j-1}^n + u_j^n, 1 - u_{j+1}^n), \\ q_j^n &= \min(\max(-u_{j+1}^n, u_{j-1}^n + u_j^n - 1), 1 - u_{j+1}^n), \\ q_j^n &= \min(\max(0, u_{j-1}^n + u_j^n - 1), 1 - u_{j+1}^n) \end{aligned}$$

と表される。なお、Max-Plus 演算による 2 進系の表現は一意でないが、上記は Max-Plus 演算の公式を用いて初期値問題が解けるような表現を選んでいる。ただし PCA4-4 はこのように表現できない [2]。また、各 PCA の流束表現に確率変数が効くような項を入れることで粒子が確率的に振る舞う系 (Stochastic PCA, SPCA) をつくることにも成功しており、基本図に対する理論的な解析もなされている [4]。それらの確率系は SPCA3, 4-1, 4-2, 4-3 と名付けられ、時間発展はそれぞれ

$$\begin{aligned} q_j^n &= \min(X_j^n, u_j^n, 1 - u_{j+1}^n), \\ q_j^n &= \min(X_j^n + Y_j^n, X_{j-1}^n + u_j^n, u_{j-1}^n + u_j^n, 1 - u_{j+1}^n), \\ q_j^n &= \min(\max(-X_j^n, -u_{j+1}^n, \min(Y_j^n, u_{j-1}^n + u_j^n - 1)), 1 - u_{j+1}^n), \\ q_j^n &= \min(\max(0, \min(X_j^n, u_{j-1}^n + u_j^n - 1)), 1 - u_{j+1}^n) \end{aligned}$$

で定義される。ただし $X_j^n, Y_j^n \in \{0, 1\}$ は n, j に依存する確率変数であり、それぞれ確率 $x, y \in [0, 1]$ で 1 をとり、そうでなければ 0 をとるものとする。

2 4 近傍統合確率粒子系

式の見やすさのために、次の \max, \min に関する表記方法を用いる:

$$\max \begin{bmatrix} m_{11}, & \cdots & m_{1l_1} \\ & \vdots & \\ m_{k1}, & \cdots & m_{kl_k} \end{bmatrix} := \max_{1 \leq i \leq k} \left(\max_{1 \leq j \leq l_i} m_{ij} \right), \quad \min \begin{bmatrix} m_{11}, & \cdots & m_{1l_1} \\ & \vdots & \\ m_{k1}, & \cdots & m_{kl_k} \end{bmatrix} := \min_{1 \leq i \leq k} \left(\min_{1 \leq j \leq l_i} m_{ij} \right).$$

ただし $l_1, \dots, l_k \in \mathbb{N}$ は互いに等しいとは限らないので、 $[\]$ 内は一般に長方形の行列形式とは限らない。我々は SPCA3, 4-1, 4-2, 4-3 を 4 つの確率変数を用いて 1 つの系に統合した以下の 4 近傍統合確率粒子系を提案する:

$$q_j^n = \min \left[\max \left[\min \begin{bmatrix} X_j^n + Y_j^n, & 1 - Z_{j-1}^n + u_j^n \\ X_{j-1}^n + u_j^n, & u_{j-1}^n + u_j^n - Z_j^n \\ -Z_{j-1}^n, & -Z_{j+1}^n, & -W_j^n, & -u_{j+1}^n \end{bmatrix}, 1 - u_{j+1}^n \right] \right]. \quad (4)$$

ここで $X_j^n, Y_j^n, Z_j^n, W_j^n \in \{0, 1\}$ は n, j に関する確率変数列であって、それぞれ確率 $x, y, z, w \in [0, 1]$ で 1 をとり、そうでなければ 0 をとるものとする。流束表現 (4) で表される SPCA を、USPCA4(Unified SPCA) と呼ぶことにする。この系では、初期値 $\{u_j^0\}_{j \in \mathbb{Z}}$ で $\forall j \in \mathbb{Z}$ に対して $u_j^0 \in \{0, 1\}$ ならば、 $\forall n \in \mathbb{N}$ および $\forall j \in \mathbb{Z}$ に対して $u_j^n \in \{0, 1\}$ となることが確認できる。また USPCA4 が各 SPCA を含んでいることは、図 1 のように特別な場合を考えることで確認できる。例えば USPCA4 から SPCA4-1 を導くには $z = 0$ とすればよい。実際、流束表現 (4) は

$$q_j^n = \min \left[\max \left[\min \begin{bmatrix} X_j^n + Y_j^n, & 1 + u_j^n \\ X_{j-1}^n + u_j^n, & u_{j-1}^n + u_j^n \\ 0, & 0, & -W_j^n, & -u_{j+1}^n \end{bmatrix}, 1 - u_{j+1}^n \right] \right] \quad (5)$$

となるが、任意の n, j に対して $u_j^n \in \{0, 1\}$ および $X_j^n, Y_j^n, W_j^n \in \{0, 1\}$ であることから、変数の大小関係を用いれば (5) が SPCA4-1 の流束表現となることが分かる。なお、PCA1 の流束表現は $q_j^n = 0$ である。

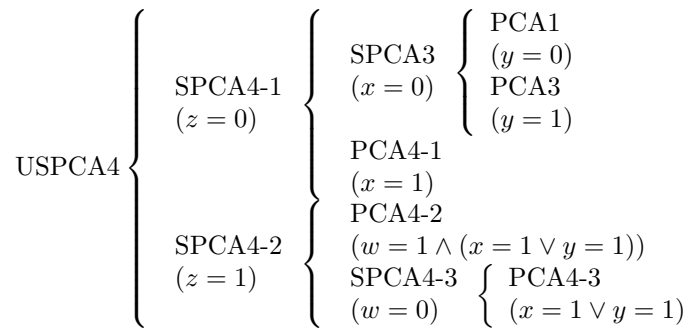


図 1. 各 PCA の包含関係

3 解の振る舞い

USPCA4 の解の確率的な振る舞いは、図 2 のような規則に従って移動する粒子モデルで説明できる。ただし $p_1, p_2, p_3, p_4 \in [0, 1]$ は次のように与えられる:

$$\begin{cases} p_1 = x(x+y-xy)(1-z)^2 \\ p_2 = (x+y-xy)(1-z) \\ p_3 = x+y-xy \\ p_4 = z^3w \end{cases}$$

図 2 の規則を説明する。0, 1 は粒子の個数を表し、それらの列は左から位置 $j-1, j, j+1$ にある粒子の個数を表す。図に示した 4 通りの粒子配列のときのみ粒子の確率的な移動が確率 p_i で矢印の方向に起こる。なお、全ての粒子は新たに生成したり消滅したりせず、移動のみである。また図 2 以外の場合には粒子は移動しないとする。例えば時刻 n で 100 の配列があるとき、その配列は次の時刻 $n+1$ で確率 p_1 で 001 となり、確率 $1-p_1$ で 100 のままである。実際の USPCA4 の 2 通りの数値シミュレーションの結果を図 3 に示す。見やすさのために 0 は白、1 は黒で表した。

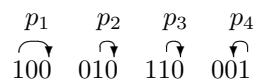


図 2. 確率的な振る舞いの規則

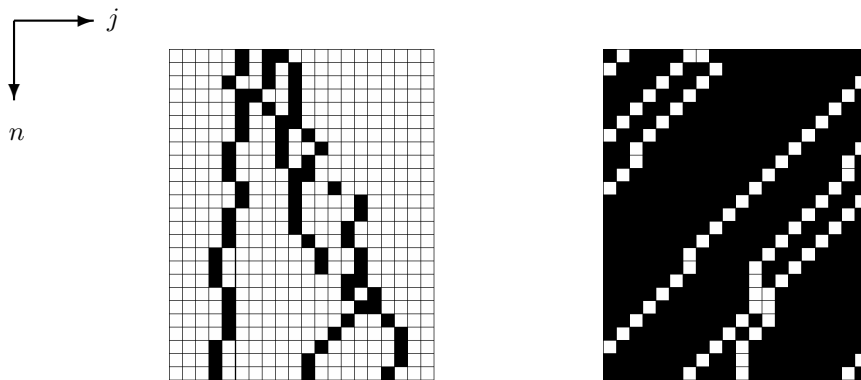


図 3. $(x, y, z, w) = (0.8, 0.6, 0.7, 0.9)$ での数値シミュレーション

4 基本図の理論曲線

周期空間内の粒子密度 ρ 、空間平均流束 Q^n および長時間平均流束 Q を次のように導入する:

$$\rho \equiv \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K u_j^n, \quad Q^n \equiv \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K q_j^n, \quad Q \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} Q^n.$$

ただし、 ρ は PCA の定義から n に依存しない。横軸に ρ をとり縦軸に Q をとったグラフは基本図と呼ばれる。この節では基本図における Q の ρ 依存性を確率パラメータ p_1, p_2, p_3, p_4 を用いて理論的に表現することを試みる。ただし、このような表現が可能となるためには、まず少なくとも Q が ρ に対して一価であることが必要である。さらに導出のためには多くの確率論的前提が必要となる。これらの前提の理論的検証は将来の課題であるが、数値計算により裏付けが得られている。以下では Q の ρ 依存性の導出について順を追って説明し、確率論的前提に関する数値実験についても触れる。まず、次の記号を導入する:

$$P_{a_1 \dots a_L}^n := \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \prod_{i=1}^L \delta_{a_i u_{j+i}^n}, \quad (6)$$

$$P_{a_1 \dots a_L}^\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} P_{a_1 \dots a_L}^n. \quad (7)$$

ただし $L \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_L \in \{0, 1\}$ 、 δ は Kronecker デルタであり、 $P_{a_1 \dots a_L}^n$ は無限に広い空間において $u_{j+1}^n, \dots, u_{j+L}^n$ の値が a_1, \dots, a_L となる j の個数の割合を表す。例えば図 3 の左では $P_{010}^0 = 1/20$, $P_{010}^1 = 3/20$ となる。式 (7) の $P_{a_1 \dots a_L}^n$ について、 $\forall n \in \mathbb{N}_0, \forall j \in \mathbb{Z}$ に対して $u_j^n \in \{0, 1\}$ より

$$P_{0a_1 \dots a_L}^n + P_{1a_1 \dots a_L}^n = P_{a_1 \dots a_L 0}^n + P_{a_1 \dots a_L 1}^n = P_{a_1 \dots a_L}^n \quad (8)$$

が $\forall n \in \mathbb{N}_0$ に対して成り立つ。これを用いると ρ の定義から

$$\begin{aligned} P_1^n &= \rho, & P_0^n &= 1 - \rho, \\ P_{11}^n &= -P_{10}^n + \rho, & P_{01}^n &= P_{10}^n, & P_{00}^n &= -P_{10}^n + 1 - \rho, \\ P_{101}^n &= -P_{100}^n + P_{10}^n, & P_{001}^n &= P_{100}^n, & P_{000}^n &= -P_{100}^n - P_{10}^n + 1 - \rho, \\ P_{111}^n &= -P_{110}^n - P_{10}^n + \rho, & P_{011}^n &= P_{110}^n, & P_{010}^n &= -P_{110}^n + P_{10}^n, \end{aligned} \quad (9)$$

が $\forall n \in \mathbb{N}_0$ に対して成り立つ。また確率論的検証を必要とするが、数値的に裏付けされている公式として、 $\forall L \in \mathbb{N}, \forall a_1, \dots, a_L \in \{0, 1\}$ に対して次式が成り立つ:

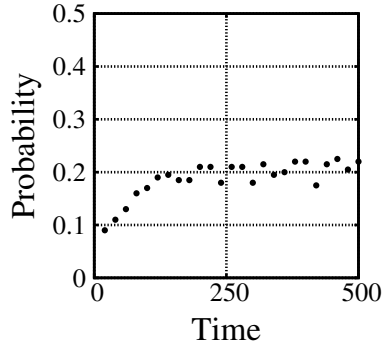
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_{a_1 \dots a_L}^{n+1} - P_{a_1 \dots a_L}^n) = 0. \quad (10)$$

図 4 はこのことを数値的に確認した結果の一例である。 $P_{a_1 \dots a_L}^n$ は状態変数 $\{u_j^n\}$ および確率変数 $\{X_j^n\}, \{Y_j^n\}, \{Z_j^n\}, \{W_j^n\}$ に従って時間発展するが、その規則は図 2 に従う。例えば $P_{10}^n, P_{000}^n, P_{111}^n$ については式 (8) を用いて整理するとそれぞれ次のようになる:

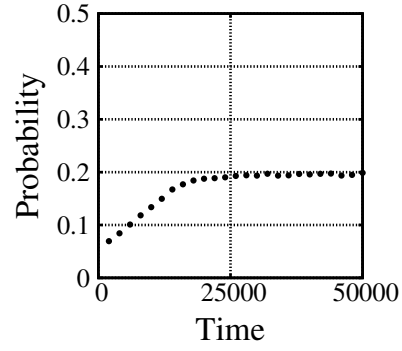
$$\begin{aligned} P_{10}^{n+1} - P_{10}^n &= -p_1 P_{1001}^n - p_2 P_{0101}^n + p_3 P_{1100}^n + p_4 P_{0011}^n \\ &\quad - p_4 (p_1 P_{10001}^n + p_2 P_{01001}^n + p_3 (P_{11001}^n + P_{00110}^n)) \\ &\quad + p_2 (p_1 P_{10010}^n + p_2 P_{01010}^n + p_3 P_{11010}^n), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} P_{111}^{n+1} - P_{111}^n &= p_1 P_{10011}^n + p_2 P_{01011}^n + p_3 (P_{11011}^n - P_{1110}^n) - p_4 P_{00111}^n \\ &\quad - p_3 (p_1 P_{100110}^n + p_2 P_{010110}^n + p_3 P_{110110}^n - p_4 P_{001110}^n), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} P_{000}^{n+1} - P_{000}^n &= p_1 (P_{0100}^n - P_{10000}^n) + p_2 (P_{0010}^n - P_{01000}^n) \\ &\quad - p_3 P_{11000}^n + p_4 (P_{00100}^n - P_{0001}^n) \\ &\quad + p_4 (p_1 (P_{100001}^n + P_{001100}^n) + p_2 (P_{010001}^n + P_{001010}^n) \\ &\quad \quad + p_3 P_{110001}^n - p_4 P_{001001}^n) \\ &\quad - p_2 (p_1 P_{100010}^n + p_2 P_{010010}^n + p_3 P_{110010}^n) \\ &\quad - p_1 (p_1 P_{100100}^n + p_2 P_{010100}^n + p_3 P_{110100}^n). \end{aligned} \quad (13)$$



(a) $K = 200$



(b) $K = 20000$

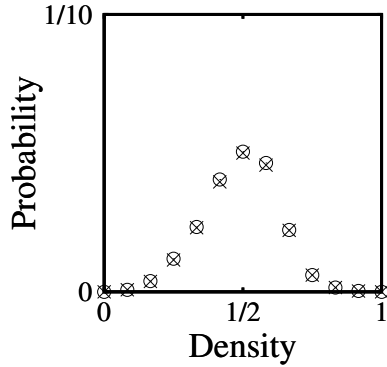
図 4. $(x, y, z, w) = (0.1, 0.4, 0.9, 0.8)$ における P_{100}^n の時間発展

5 理論曲線を求めるための仮設公式

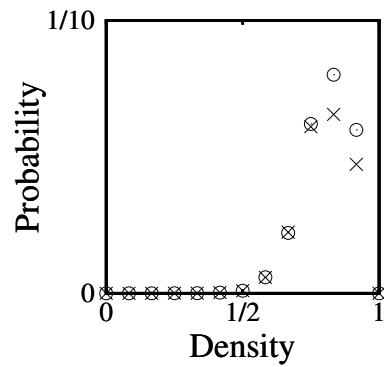
P^n に関する方程式を解くために、 $L \geq 4$ および $n \rightarrow \infty$ において次の式を仮設公式として与える:

$$P_{a_1 a_2 \dots a_{L-1} a_L}^\infty = \frac{P_{a_1 a_2 \dots a_{L-1}}^\infty P_{a_2 \dots a_{L-1} a_L}^\infty}{P_{a_2 \dots a_{L-1}}^\infty}. \quad (14)$$

この式は条件付き確率の公式ではない。また、図 5(b) のように部分的に式 (14) が成り立っていないことが数値実験上で確認できる。しかし、式 (14) は SPCA3, 4-1, 4-2, 4-3 では数値実験において確認されている [4]。本稿では USPCA4 で式 (14) を適用し、基本図の数値実験の結果と比較する。



(a) $P_{0101}^n P_{10}^n$ と $P_{010}^n P_{101}^n$



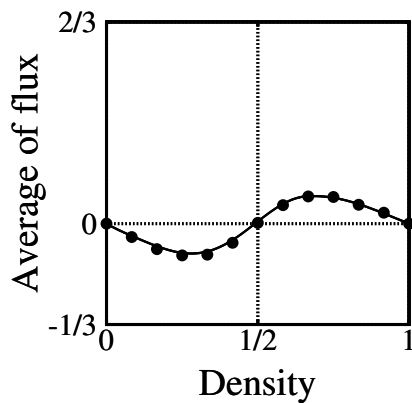
(b) $P_{1110}^n P_{11}^n$ と $P_{111}^n P_{110}^n$

図 5. $(x, y, z, w) = (0.8, 0.6, 0.7, 0.9)$ における (14) に対する数値実験

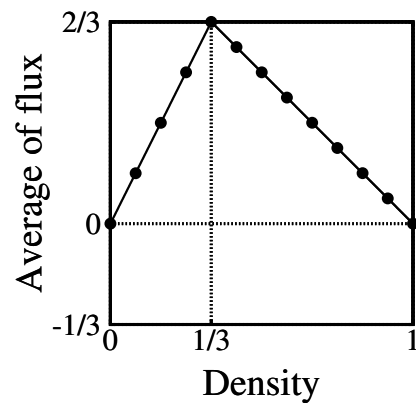
方程式 (11), (12), (13) を (8), (9), (10) および仮設 (14) を用いて整理することで、 $P_{10}^\infty, P_{100}^\infty, P_{110}^\infty$ に関する連立の代数方程式が得られる。それを解けば $P_{10}^\infty, P_{100}^\infty, P_{110}^\infty$ が ρ, p_1, p_2, p_3, p_4 によって表せる。そして Q は図 2 の規則および (8) から

$$Q = p_1 P_{100}^\infty + p_2 P_{010}^\infty + p_3 P_{110}^\infty - p_4 P_{001}^\infty = p_2 P_{10}^\infty + (p_1 - p_4) P_{100}^\infty + (p_3 - p_2) P_{110}^\infty \quad (15)$$

で与えられるので、やはり ρ, p_1, p_2, p_3, p_4 で表せる。以上の理論計算によって得られた Q と数値実験との比較を図 6 に示す。



(a) $(x, y, z, w) = (0.1, 0.4, 0.9, 0.8)$



(b) $(x, y, z, w) = (1, 0, 0, 0)$

図 6. 実験値と理論曲線の比較

6 まとめと今後の展望

本稿では 4 つの確率変数を用いて、1 つの例外を除き 4 近傍までの全ての粒子系を統合した統合確率粒子系を構築することに成功した。また、仮設 (14) を置くことで基本図の理論曲線が求められることを示した。今後の課題として、その仮設の成立・不成立条件の解明、あるいは仮設の式に替わる等式の発見が挙げられる。また 5 近傍、さらにより一般的な N 近傍の粒子系を統合したモデルの構築および解析も望まれる。

参考文献

- [1] T. Hattori and S. Takesue (1991). “Additive conserved quantities in discrete-time lattice dynamical systems,” *Physica D*, **49**, 295-322.
- [2] D. Takahashi, J. Matsukidaira, H. Hara, and B. Feng (2011). “Max-plus analysis on some binary particle systems,” *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**, 135102.
- [3] S. Gaubert and M. Plus (1997). “Max-plus linear stochastic systems and perturbation analysis,” *Lecture Notes Comput. Sci.*, **1200**, 261-282.
- [4] H. Kuwabara, T. Ikegami and D. Takahashi (2013). “確率変数を含む粒子セルオートマトンについて (理論),” *JSIAM*, **23**, 1-13.