

超離散周期戸田格子の幾何学的実現

野邊, 厚
千葉大学教育学部

<https://doi.org/10.15017/1448875>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 25A0-S2 (18), pp.114-120, 2014-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.25AO-S2
「非線形波動研究の拡がり」 (研究代表者 増田 哲)

Reports of RIAM Symposium No.25AO-S2

The breadth and depth of nonlinear wave science

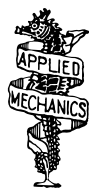
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2013

Article No. 18 (pp. 114 - 120)

超離散周期戸田格子の幾何学的実現

野邊 厚 (NOBE Atsushi)

(Received 14 January 2014; accepted 10 March 2014)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2014

超離散周期戸田格子の幾何学的実現

野邊 厚

ATSUSHI NOBE

千葉大学教育学部

概要

周期離散戸田格子の時間発展はそのスペクトル曲線である超楕円曲線と他の平面曲線との交叉を用いて幾何学的に実現できる．また，このような幾何学的枠組みは超離散化の手法を用いてトロピカル幾何学に翻訳可能である．本稿では，その帰結として得られる，超離散周期戸田格子のトロピカル平面曲線を用いた幾何学的実現について概観する．

1 超離散周期戸田格子

次の写像 $\zeta : \mathbb{R}^{2g+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2g+2}$ の定める離散力学系を超離散周期戸田格子とよぶ：

$$(\mathbf{J}, \mathbf{W}) = (J_1, \dots, J_{g+1}, W_1, \dots, W_{g+1}) \mapsto (\bar{\mathbf{J}}, \bar{\mathbf{W}}) = (\bar{J}_1, \dots, \bar{J}_{g+1}, \bar{W}_1, \dots, \bar{W}_{g+1})$$

ここで

$$\bar{J}_i = [W_i, X_i + J_i], \quad \bar{W}_i = J_{i+1} + W_i - \bar{J}_i, \quad X_i = \left[\sum_{l=1}^k (J_{i-l} - W_{i-l}) \right]_{0 \leq k \leq g} \quad (1)$$

($i = 1, 2, \dots, g+1$) であり，下のように記号を定める：

$$[A, B, \dots] := \min(A, B, \dots), \quad [A, B, \dots] := \max(A, B, \dots) \quad \text{for } A, B, \dots \in \mathbb{R}$$

さらに， $\sum_{l=1}^0 (J_{i-l} - W_{i-l}) = 0$ および $\sum_{i=1}^{g+1} J_i < \sum_{i=1}^{g+1} W_i$ と仮定する．写像 ζ の t 回 ($t = 0, 1, \dots$) の繰り返しに対しては上付き添え字で表すものとする：

$$(\mathbf{J}^t, \mathbf{W}^t) = (J_1^t, \dots, J_{g+1}^t, W_1^t, \dots, W_{g+1}^t) := \underbrace{\zeta \circ \zeta \circ \dots \circ \zeta}_{t}(\mathbf{J}, \mathbf{W})$$

超離散周期戸田格子は周期離散戸田格子の超離散化であることが知られている．初期値を正整数にとる場合，周期的境界をもつ有限個の箱の列といくつかの玉を用いてその時間発展を実現することが可能であり，とくに周期箱玉系とよばれる [8, 3]．

超離散周期戸田格子のスペクトル曲線を導入しよう．次のトロピカル多項式 F を考える：

$$F(X, Y) := [2Y, Y + [(g+1)X, C_g + gX, \dots, C_1 + X, C_0], C_{-1}]$$

ここで，係数 C_{-1}, C_0, \dots, C_g は \mathbf{J}, \mathbf{W} のトロピカル多項式として適切に定められているとする [2, 5]．すなわち，次の区分線形写像が与えられていると仮定する：

$$\psi : \mathbb{R}^{2g+2} \rightarrow \mathbb{R}^{g+2}; (\mathbf{J}, \mathbf{W}) \mapsto (C_{-1}, C_0, \dots, C_g) \quad (2)$$

実は, C_{-1}, C_0, \dots, C_g は時刻 t によらず一定の値をとる, すなわち超離散周期戸田格子の保存量であるようにとることができる [2]:

$$C_g = [J_i, W_i]_{1 \leq i \leq g+1}, \quad C_{g-1} = \left[[J_i + J_j, W_i + W_j]_{\substack{1 \leq i < j \leq g+1 \\ j \neq i, i-1}}, [J_i + W_j]_{\substack{1 \leq i, j \leq g+1 \\ j \neq i, i-1}} \right], \quad \dots$$

多項式 F の定めるトロピカル曲線を $\tilde{\Gamma}$ とする [1]:

$$\tilde{\Gamma} := \{P \in \mathbb{R}^2 \mid F \text{ is not differentiable at } P\}$$

係数 C_{-1}, C_0, \dots, C_g を適当にとれば $\tilde{\Gamma}$ は種数 g のトロピカル超楕円曲線となる [4]. $\tilde{\Gamma}$ から半直線を取り除いた曲線を Γ で表す. $\tilde{\Gamma}$ もしくは Γ を超離散周期戸田格子のスペクトル曲線とよぶ (図 2(a)).

超離散周期戸田格子の相空間を $\mathcal{T} := \{(J, W) \mid \sum_{i=1}^{g+1} J_i < \sum_{i=1}^{g+1} W_i\}$ とおき, Γ のモジュライ空間を $\mathcal{C} := \{(C_{-1}, C_0, \dots, C_g)\}$ とおく. また, (2) の定める写像 $\psi: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}$ に対し $\mathcal{T}_{\mathcal{C}} := \psi^{-1}(C_{-1}, C_0, \dots, C_g) \subset \mathcal{T}$ とおき, $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ を超離散周期戸田格子の等スペクトル集合とよぶ.

対合 $\iota: \Gamma \rightarrow \Gamma; P = (X, Y) \mapsto P' = (X, C_{-1} - Y)$ に対し, P' を P の共役とよぶ. 曲線 Γ の $2g+2$ 個の頂点を V_i および V'_i で表す ($i = 0, 1, \dots, g$). さらに, 頂点 $V_i, V_{i-1}, V'_{i-1}, V'_i$ を反時計回りに回るサイクルを α_i で表す ($i = 1, 2, \dots, g$).

以下, 簡単のため, とくに断らない限り種数 g は偶数であると仮定する (奇数の場合については [5] 参照).

2 時間発展とトロピカル曲線

スペクトル曲線 Γ 上の g 次正因子全体の集合を $D_g^+(\Gamma)$ とする. $D_g^+(\Gamma)$ の元 T を次で定める:

$$T := V_0 + V'_g + \sum_{i=1}^{(g-2)/2} (V_{2i} + V'_{2i}) \quad (3)$$

また, 集合 $D_g^+(\Gamma)$ から Γ の g 次対称積 $\text{Sym}^g(\Gamma) := \Gamma^g / \mathfrak{S}_g$ への全単射 $D_P := P_1 + P_2 + \dots + P_g \mapsto d_P := \{P_1, P_2, \dots, P_g\}$ を μ で表す.

ここで, 次のトロピカル多項式を考える:

$$G_1(X, Y) = \left[[C_i(\mathbf{J}_{3,g+1}; \mathbf{W}_{2,g}) + (i-2)X]_{2 \leq i \leq g}, (g-1)X, Y - J_1 - W_1 \right],$$

$$G_2(X, Y) = \left[[C_i(\mathbf{J}_{4,g+1}; \mathbf{W}_{3,g}) + (i-3)X]_{3 \leq i \leq g}, (g-2)X, Y + [J_2, W_1, X] - \sum_{i=1}^2 (J_i + W_i) \right]$$

ただし, 次のような記法を用いた:

$$\mathbf{J}_{i,j} := (\underbrace{\infty, \dots, \infty}_{i-1}, J_i, J_{i+1}, \dots, J_j, \underbrace{\infty, \dots, \infty}_{g+1-j}), \quad \mathbf{W}_{i,j} := (\underbrace{\infty, \dots, \infty}_{i-1}, W_i, W_{i+1}, \dots, W_j, \underbrace{\infty, \dots, \infty}_{g+1-j})$$

($i \leq j, i, j = 1, 2, \dots, g+1$). これらを用いてトロピカル曲線 L_1 および L_2 を定める:

$$L_1 := \{P \in \mathbb{R}^2 \mid G_1 \text{ is not differentiable at } P\},$$

$$L_2 := \{P \in \mathbb{R}^2 \mid G_2 \text{ is not differentiable at } P\}$$

曲線 L_1, L_2 をトロピカル射影平面に埋め込んで交点数を計算することにより, L_1 と L_2 はアフィン部分においてちょうど g 点で交わることがわかる. さらに, それら g 個の交点は Γ 上にあることも示される. この事実を用いて, トロピカル固有ベクトル写像 $\phi: \mathcal{T}_C \rightarrow \text{Pic}^g(\Gamma) := \mathcal{D}_g(\Gamma)/\mathcal{D}_l(\Gamma)$ を次のように定める [6]:

$$\phi(\mathbf{J}, \mathbf{W}) \equiv P_1 + P_2 + \cdots + P_g \pmod{\mathcal{D}_l(\Gamma)}$$

ここで, P_1, P_2, \dots, P_g は 3 曲線 L_1, L_2, Γ の交点とし, $\mathcal{D}_g(\Gamma)$ は Γ 上の g 次因子全体の集合, $\mathcal{D}_l(\Gamma)$ は Γ の主因子群とする.

超離散周期戸田格子の時間発展 (1) は $\text{Sym}^g(\Gamma)$ 上で適切に定められた加法 \oplus を用いて表される (加法 \oplus の定義については [5, 6] を参照).

定理 1 ([5]) (3) で定められた T に対し, $\tau = \mu(T) \in \text{Sym}^g(\Gamma)$ とおく. このとき, 次の図式は可換:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_C & \xrightarrow{\mu \circ \phi} & \text{Sym}^g(\Gamma) \\ (1) \downarrow & & \downarrow \oplus \tau \\ \mathcal{T}_C & \xrightarrow{\mu \circ \phi} & \text{Sym}^g(\Gamma) \end{array}$$

定理 1 より, 超離散周期戸田格子の時間発展は $\text{Sym}^g(\Gamma)$ 上の加法を用いて次のように表される:

$$d_{\bar{P}} = d_P \oplus \tau \iff \begin{cases} d_Q \oplus d_P \oplus \tau = o, \\ d_Q \oplus d_{\bar{P}} = o, \end{cases} \quad (4)$$

ただし, $d_P = \mu(D_P)$, $D_P = P_1 + \cdots + P_g$ などであり, o は加法 \oplus の単位元である. さらに, Picard 群 $\text{Pic}^0(\Gamma)$ において, (4) は次のように書き換えられる:

$$D_Q + D_P + V'_g - V'_0 - 2D^* \equiv 0 \pmod{\mathcal{D}_l(\Gamma)}, \quad (5)$$

$$D_Q + D_{\bar{P}} - 2D^* \equiv 0 \pmod{\mathcal{D}_l(\Gamma)}, \quad (6)$$

ここで, $D^* = \frac{g}{2}(V_0 + V'_0)$ であり, $D_Q = Q_1 + \cdots + Q_g = \mu^{-1}(d_Q)$ とおいた. これらの式は Γ 上の有理関数の存在を示しているので, (5), (6) の左辺をそれぞれ主因子とするような有理関数を用いて, 超離散周期戸田格子の時間発展は実現できる.

正整数 M を $M \geq [\mathbf{J}, \mathbf{W}]$ となるようにとる. 整数 $i = 0, 1, \dots, g$ および $j = 1, 2, \dots, g+1$ に対し, $S_j C_i$ を次のように定義する:

$$S_j C_i := C_i(J_1, \dots, J_j - (g-i+1)M, \dots, J_{g+1}; \mathbf{W}) + (g-i+1)M$$

すなわち, C_i において J_j を含まない項を取り除いたものが $S_j C_i$ である.

トロピカル多項式

$$H_1(X, Y) := \left[\left[S_1 C_i + iX \right], Y \right]_{0 \leq i \leq g} \quad (7)$$

を用いて, トロピカル曲線 K_1 を定義する:

$$K_1 := \{P \in \mathbb{R}^2 \mid H_1 \text{ is not differentiable at } P\}$$

トロピカル多項式 H_1 が自然に定める平面上の有理関数を Γ に制限したものを $H_1|_{\Gamma}$ で表す. トロピカル固有ベクトル写像により定まる Γ 上の点 $P_1, P_2, \dots, P_g \in \Gamma$ をトロピカル曲線 K_1 が通れば, (5) を満たす点 $Q_1, Q_2, \dots, Q_g \in \Gamma$ も K_1 上に存在する.

命題 1 ([5]) スペクトル曲線 Γ 上の点 $P_1, P_2, \dots, P_g \in \Gamma$ を曲線 K_1 が通ると仮定する．このとき， Γ 上の有理関数 $H_1|_{\Gamma}$ は次を満たす：

$$(H_1|_{\Gamma}) = D_Q + D_P + V'_g - V'_0 - 2D^* \quad (8)$$

すなわち， Q_1, Q_2, \dots, Q_g は Γ と K_1 との交点である．

種数 g は偶数であるとしているため，(6) より $D_{\bar{P}} = D_{Q'}$ を得る．

定理 2 ([5]) D_P および D_Q を (5) を満たす g 次正因子とする．また， T を (3) により与えられる g 次正因子とする．このとき， $d_{\bar{P}} = d_P \oplus \tau$ で定められる $\text{Sym}^g(\Gamma)$ の元 $d_{\bar{P}}$ は次のように与えられる：

$$d_{\bar{P}} = \{Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_g\}$$

3 種数 2 の具体例

以下では $g = 2$ と仮定する．次のように周期箱玉系の初期値を与える：

$$\mathbf{J}^0 = (J_1^0, J_2^0, J_3^0) = (3, 2, 1), \quad \mathbf{W}^0 = (W_1^0, W_2^0, W_3^0) = (3, 2, 4) \quad (9)$$

時刻 $t = 4$ までの時間発展は次のようになる：

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^1 &= (J_1^1, J_2^1, J_3^1) = (3, 2, 1), & \mathbf{W}^1 &= (W_1^1, W_2^1, W_3^1) = (2, 1, 6), \\ \mathbf{J}^2 &= (J_1^2, J_2^2, J_3^2) = (2, 1, 3), & \mathbf{W}^2 &= (W_1^2, W_2^2, W_3^2) = (2, 1, 6), \\ \mathbf{J}^3 &= (J_1^3, J_2^3, J_3^3) = (2, 1, 3), & \mathbf{W}^3 &= (W_1^3, W_2^3, W_3^3) = (1, 3, 5), \\ \mathbf{J}^4 &= (J_1^4, J_2^4, J_3^4) = (1, 2, 3), & \mathbf{W}^4 &= (W_1^4, W_2^4, W_3^4) = (1, 4, 4) \end{aligned}$$

これらは箱と玉を用いて図 1 のように実現できる．

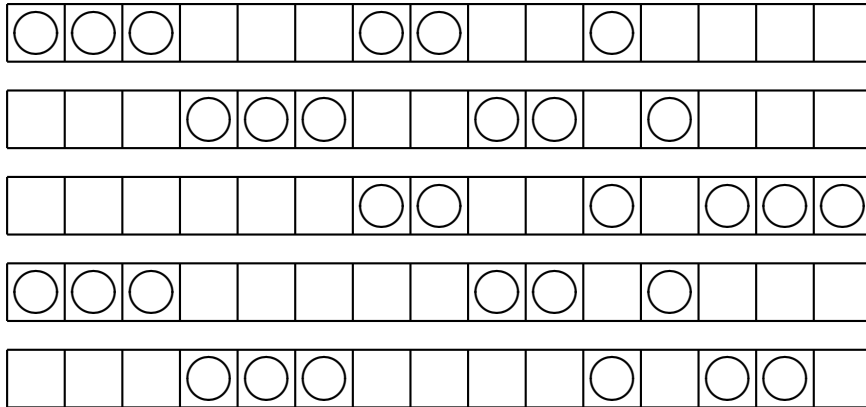


図 1: 初期値 (9) に対する $t = 0$ から 4 までの周期箱玉系の時間発展．

スペクトル曲線 Γ は次のトロピカル多項式 F で与えられる：

$$F(X, Y) = [2X, Y + [3X, 1 + 2X, 3 + X, 6], 15] \quad (10)$$

これは種数 2 のトロピカル超楕円曲線であり，頂点の座標は次の通りである：

$$V_0 = (1, 12), \quad V_1 = (2, 10), \quad V_2 = (3, 9), \quad V'_0 = (1, 3), \quad V'_1 = (2, 5), \quad V'_2 = (3, 6)$$

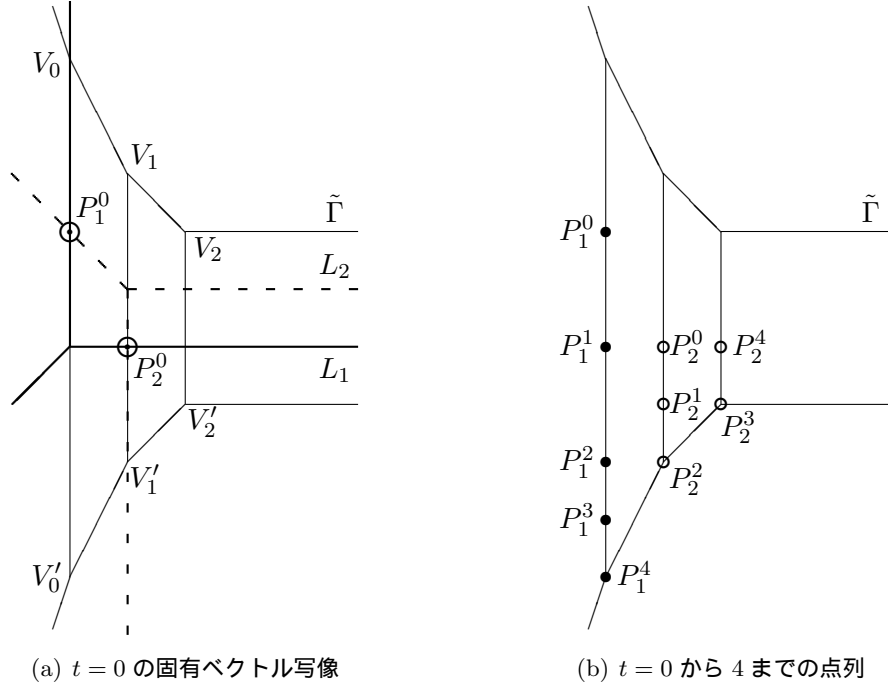


図 2: 固有ベクトル写像 ϕ を実現する 3 曲線 Γ, L_1^t, L_2^t の交叉および交点の列 .

固有ベクトル写像を与えるトロピカル曲線 L_1 および L_2 は次のトロピカル多項式により定まる :

$$G_1(X, Y) = [J_3, W_2, X, Y - J_1 - W_1], \quad G_2(X, Y) = \left[0, Y + [J_2, W_1, X] - \sum_{i=1}^2 (J_i + W_i) \right]$$

初期値 (9) に対しては次のようになる :

$$G_1^0(X, Y) = [1, 2, X, Y - 6], \quad G_2^0(X, Y) = [0, Y - 8, Y + X - 10]$$

図 2(a) に Γ, L_1^0, L_2^0 およびこれらの交点 $P_1^0 = (1, 9), P_2^0 = (2, 7)$ を示す . 固有ベクトル写像を繰り返し適用することで, $J^0, W^0, J^1, W^1, \dots$ に対応する Γ 上の点列

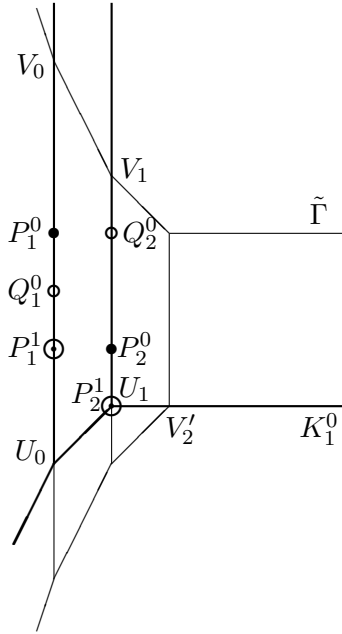
$$\begin{aligned} P_1^0 &= (1, 9), & P_1^1 &= (1, 7), & P_1^2 &= (1, 5), & P_1^3 &= (1, 4), & P_1^4 &= (1, 3), & \dots \\ P_2^0 &= (2, 7), & P_2^1 &= (2, 6), & P_2^2 &= (2, 5), & P_2^3 &= (3, 6), & P_2^4 &= (3, 7), & \dots \end{aligned}$$

を得る (図 2(b)) . 点 P_1^t および P_2^t はそれぞれサイクル α_1 および α_2 を反時計回りに回る . 時間発展を考えよう . 曲線 K_1 を定めるトロピカル多項式は次の通り :

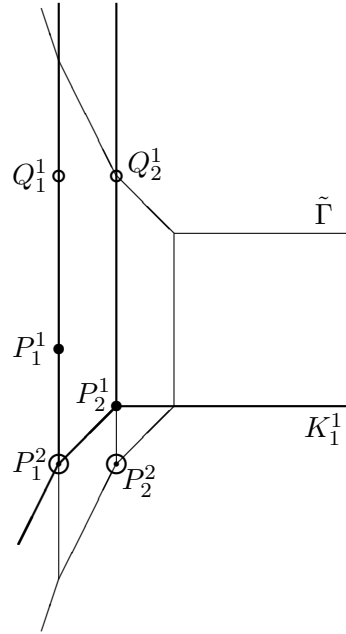
$$\begin{aligned} H_1(X, Y) &= [Y, S_1 C_2 + 2X, S_1 C_1 + X, S_1 C_0], \\ S_1 C_2 &= C_2(J_1 - M, J_2, J_3; \mathbf{W}) + M = J_1, \\ S_1 C_1 &= C_1(J_1 - 2M, J_2, J_3; \mathbf{W}) + 2M = [J_1 + J_2, J_3 + J_1, J_1 + W_2], \\ S_1 C_0 &= C_0(J_1 - 3M, J_2, J_3; \mathbf{W}) + 3M = J_1 + J_2 + J_3 \end{aligned}$$

初期値 (9) に対しては次のようになる :

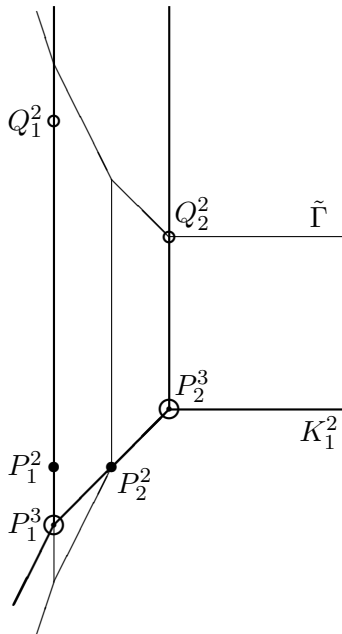
$$H_1^0(X, Y) = [Y, 3 + 2X, 4 + X, 6]$$



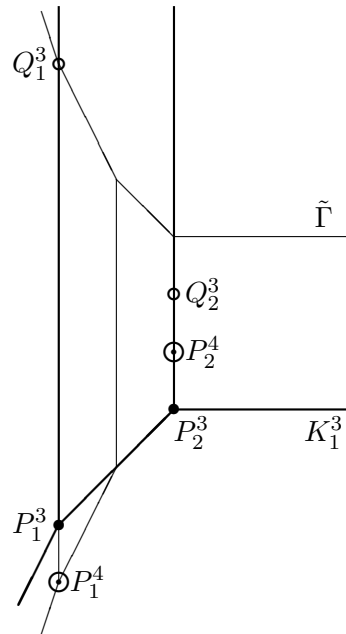
(a) Evolution from $t = 0$ to 1



(b) Evolution from $t = 1$ to 2



(c) Evolution from $t = 2$ to 3



(d) Evolution from $t = 3$ to 4

図 3: 初期値 (9) のもとでの周期箱玉系の時間発展と対応するトロピカル曲線 Γ, K_1^t の交叉 .

図 3(a) に Γ と K_1^0 の交叉を示す．交点 Q_1^0, Q_2^0 の共役 $Q_1^{0'}, Q_2^{0'}$ が次の時刻の点 P_1^1, P_2^1 であり，これらは固有ベクトル写像により J^1, W^1 と対応する．図 3(b) – 3(d) に Γ と K_1^t の交叉を示す．これらは $t = 1, 2, 3$ の時間発展と対応する ([6]) ．

交点の座標を決定するには，stable intersection [7] の考え方と Γ 上の有理関数を用いる．二つのトロピカル曲線の辺同士が重なっているとき¹，それらの交点が辺上のどの点であるか特定することは一般に難しい．このような状況のとき，stable intersection においては，交点が自明になるような曲線の摂動をすべて考え，そのような交点の（摂動 $\rightarrow 0$ での）極限が存在するとき，それを 2 曲線の交点と定める．例えば，図 3(a) において， Γ は K_1^0 と五つの頂点 ($V_0, V_1, V_2' \in \Gamma$ および $U_0, U_1 \in K_1^0$) で（stable intersection の意味で）交わる．このことから $V_0 + V_1 + U_0 + U_1 + V_2' - V_0' - 2D^* \equiv 0 \pmod{\mathcal{D}_l(\Gamma)}$ となるが (5 参照)，主因子が $P_1^0 + P_2^0 + Q_1^0 + Q_2^0 - V_0 - V_1 - U_0 - U_1$ である Γ 上の有理関数が存在するので

$$P_1^0 + P_2^0 + Q_1^0 + Q_2^0 + V_2' - V_0' - 2D^* \equiv 0 \pmod{\mathcal{D}_l(\Gamma)}$$

を得る．よって， Γ と K_1^0 との交点は $P_1^0, P_2^0, Q_1^0, Q_2^0$ および V_2' である． $P_1^0 = (1, 9)$, $P_2^0 = (2, 7)$, $V_0 = (1, 12)$, $V_1 = (2, 10)$, $U_0 = (1, 5)$, $U_1 = (2, 6)$ より $Q_1^0 = (1, 8)$, $Q_2^0 = (2, 9)$ ．したがって $P_1^1 = Q_1^{0'} = (1, 7)$, $P_2^1 = Q_2^{0'} = (2, 6)$ となる．

参考文献

- [1] Gathmann, A, Tropical algebraic geometry, *Preprint* (2006), math.AG/0601322.
- [2] Inoue, R and Takenawa, T, Tropical Spectral Curves and Integrable Cellular Automata, *Int. Math. Res. Notices*, Vol. 2008 (2008), article ID rnn019.
- [3] Kimijima, T and Tokihiro, T, Initial-value problem of the discrete periodic Toda equation and its ultradiscretization, *Inv. Prob.*, **18** (2002), 1705-32.
- [4] Mikhalkin, G and Zharkov, I, Tropical curves, their Jacobians and theta functions, *Preprint* (2006) math.AG/0612267.
- [5] Nobe, A, A geometric realization of the periodic discrete Toda lattice and its tropicalization, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46** (2013), 465203.
- [6] Nobe, A, A geometric realization of the ultradiscrete periodic Toda lattice via tropical plane curves, *Preprint* (2013), arXiv:1312.3008.
- [7] Vigeland, M D, The group law on a tropical elliptic curve, *Preprint* (2004), math.AG/0411485.
- [8] Yura, F and Tokihiro, T, On a periodic soliton cellular automaton, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35** (2002), 3787-801.

¹例えば，図 3(a) において， K_1^0 の垂直な 2 辺は $\tilde{\Gamma}$ の垂直な 2 辺と重なっている．