楕円・超楕円関数に対するソリトン理論的アプローチ

松島, 正知
同志社大学大学院生命医科学研究科

岡本, 沙紀
同志社大学大学院生命医科学研究科

大宮, 眞弓
同志社大学大学院生命医科学研究科

https://doi.org/10.15017/1448862

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 25AO-S2 (16), pp.101-106, 2014-03. 九州大学応用力学研究所

応用力学研究所研究集会報告 No.25AO-S2
「非線形波動研究の拡がり」（研究代表者　増田　哲）

Reports of RIAM Symposium No.25AO-S2

The breadth and depth of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2013

Article No. 16 (pp. 101 - 106)

楕円・超楕円関数に対する ソリトン理論的アプローチ

松島　正知（MATSUSHIMA Masatomo），岡本　沙紀（OKAMOTO Saki），大宮　眞弓（OHMIYA Mayumi）

（Received 16 January 2014; accepted 9 March 2014）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2014

楕円・超楕円関数に対するソリトン理論的アプローチ

松島正知 (Masatomo Matsushima)，岡本沙紀 (Saki Okamoto)，大宮眞弓 (Mayumi Ohmiya)
同志社大学大学院 生命医科学研究科 医工学・医情報学専攻

概要

楕円関数に対する Weierstrass 標準形に相当するものを定常 KdV 方程式の解に対して，その包合的な第一積分を用いて代数的に構成し，さらに，それを用いて問題を Heun 型方程式のモノドロミーの計算に帰着させ，その解の 2 重周期性を証明するための方向性を示す．この類推として，2 次定常 KdV 方程式の第一積分を用いて同様な標準形を構成する方法についても報告する．

1. はじめに

楕円積分は，Jacobi の楕円の周の長さについての考察と結びついている．また，Abel はその不完全楕円積分の逆関数より，楕円関数を構成し，この楕円関数の 2 重周期性を発見した．

他方，Weierstrass は，発想を変え，2 重周期性を有する関数について考察し，彼が得意とする級数を用いて鮮やかに 2 重周期関数 $\wp$ 関数を構成してみせた．さらに，Weierstrass はこの級数より $\wp$ 関数の満たす標準的な微分方程式を構成した．それが Weierstrass の標準形

$$\wp'(x,L)^2 = 4\wp(x,L)^3 - g_2\wp(x,L) - g_3$$

である．ここに L は格子を表しており，係数である g_2, g_3 は，楕円曲線を決定づける定数である．この Weierstrass の標準形から，楕円関数は楕円曲線をパラメトライズする関数とみなされ，元々楕円関数が単振り子方程式等の力学の問題として捉えられていたのが，代数曲線の世界へと拡がり，現代数学の中心に位置するものとなった．ちなみに，Weierstrass の標準形を積分することで，楕円積分を求めることができる．

それに対して本報告では，我々は，定常 KdV 方程式の第一積分を構成する事により，Weierstrass の標準形に相当するものを求め，さらに楕円関数論を利用せずに，その解の 2 重周期性を証明する．さらに，これは未だ未完成だが，我々の主たる目的はその証明を一般化することで，可積分である高階定常 KdV 方程式による，超楕円関数に対するアプローチを完成させることである．

定常 KdV 方程式の Lax 表示に使われる 1 次元 Schrödinger 方程式

$$-f'' + (u(x) - \lambda)f = 0 \qquad ' = \frac{d}{dx}$$

について考える．この 1 次元 Schrödinger 方程式は，ポテンシャル $u(x)$ が高階定常 KdV 方程式を満たす，即ち，代数幾何的ポテンシャルのとき，特殊な固有値に対して可解となる．この特殊な固有値をもつ 1 次元 Schrödinger 方程式と，先ほどの第一積分より，フックス型微分方程式を構成できる．定常 KdV 方程式の場合は，リーマン球面上で 4 つの確定特異点を有する．

通常，Heun 型微分方程式の大域的構造を決定することは，非常に難しい問題である．しかし，今回の場合，1 次元 Schrödinger 方程式が可解となるような特殊な固有値を持っているため，特殊な固有値に対する解が求まることにより，3 つのそれぞれの特異点の分岐の様子が判る．この 3 つの特異点のモノドロミーの情報より，このうち 2 点が独立な特異点であるため，$u(x)$ が 2 重周期性を持つことが判る．この方法は，微分方程式を出発点とし，楕円積分を用いることなく，2 重周期性を求められ，もちろん楕円積分も構成できるため，極めて見通しがよいものになる．また，定常 KdV 方程式が，階層構造を持つため，高階定常 KdV 方程式についても，同様な考察することが可能となるため，この方法を一般化することができる．

2. KdV 多項式と M 関数

本節では，以下で必要になる基本的事項を証明抜きで紹介する．詳しくは [1] を参照されたい．

形式的擬微分作用素 $\Lambda(u)$ を

$$\Lambda(u) = D^{-1}\left(\frac{1}{2}u' + uD - \frac{1}{4}D^3\right) \qquad D = \frac{d}{dx}$$

で定義する．この $\Lambda(u)$ 作用素を用いて，多項式 $Z_n(u)$ を漸化式

$$Z_n(u) = \Lambda(u)Z_{n-1}(u),\ n = 1, 2, \cdots \tag{1}$$

で定義する．ここに $Z_0(u) = 1$ である．具体例を挙げると

$$Z_1(u) = \frac{1}{2}u, \quad Z_2(u) = \frac{3}{8}u^2 - \frac{1}{8}u'', \quad etc.$$

である．このとき，$Z_n(u)$ は，$u(x)$ の微分多項式である．

定理 1 ([1])**.** $2n+1$ 階の微分作用素 $A_n(u)$ を

$$A_n(u) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\left(Z_j(u)D - \frac{1}{2}Z_j'(u)\right)H(u)^{n-j}$$

で定める．すると 1 次元 Schrödinger 作用素

$$H(u) = -D^2 + u(x)$$

と $A_n(u)$ は準可換である．つまり，

$$[A_n(u), H(u)] = Z_{n+1}'(u)$$

を満たす．

KdV 多項式 $Z_j(u),\ j = 0, 1, \cdots, n, \cdots$ に対して

$$V(u) = \bigoplus_{j=0}^{\infty}\mathbb{C}Z_j(u(x))$$

とする．$V(u)$ が $n+1$ 次元のとき，$u(x)$ を n 次代数幾何的ポテンシャルという．そのとき $Z_n(u(x))$ は基本関係式

$$Z_{n+1}(u(x)) - \sum_{j=0}^{n}c_jZ_j(u(x)) = 0$$

を満たす．

そこで，M 関数を

$$M(x) = Z_n(u(x)) - \sum_{j=1}^{n}c_jZ_{j-1}(u(x)) \tag{2}$$

で定義する．また，M 関数 $M(x)$ に対して

$$\triangle = M'(x)^2 - 2M(x)M''(x) + 4u(x)M(x)^2$$

と置くと

$$\frac{d}{dx}\triangle = -2M(M''' - 2u'M - 4uM') = 0$$

を満たので x には依存しない．この時，$\triangle = 0$ ならば，$y = \sqrt{M(x)}$ は，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = u(x)y$ の解である．すなわちこの 2 階常微分方程式は，ポテンシャルから代数操作だけで解が構成できる，

次に，スペクトル変数 λ を導入する．スペクトル型 M 関数を

$$M(x, \lambda) = Z_n(u(x) - \lambda) - \sum_{j=1}^{n} a_j(\lambda) Z_{j-1}(u(x) - \lambda)$$

で定義する．スペクトル型 M 関数に対しては，M 関数と同様に，スペクトル判別式

$$\triangle(\lambda) = M_x(x, \lambda)^2 - 2M(x, \lambda)M_{xx}(x, \lambda) + 4(u(x) - \lambda)M(x, \lambda)^2 \tag{3}$$

を定義できる．もし $u(x)$ が n 次代数幾何的ポテンシャルならば $\triangle(\lambda)$ は $2n + 1$ 次定数係数多項式である．$\triangle(\lambda_0) = 0$ ならば，$y = \sqrt{M(x, \lambda_0)}$ は，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = (u(x) - \lambda_0)y$ の解である．そこで，$\triangle(\lambda) = 0$ の解を可解スペクトルと呼ぶ．

3. 第一積分生成多項式

有理形関数 $v(x)$ について，微分多項式 $M_k(v(x))$，$k = 0, 1, 2, \cdots, n + 1$ を

$$M_k(v(x)) = \begin{cases} Z_{n-k+1}(v(x)) - \displaystyle\sum_{j=k}^{n} c_j Z_{j-k}(v(x)), & k = 0, 1, 2, \cdots, n \\ Z_0(v(x)) = 1, & k = n + 1 \end{cases}$$

で定義する．また，関数 $\tilde{M}_x(x, \lambda; v)$ をスペクトル M 関数の $u(x)$ を一般の関数 $v(x)$ で置き換えたものとする．

そこで，第一積分生成多項式

$$\tilde{\triangle}(x, \lambda; v) = \tilde{M}_x(x, \lambda; v)^2 - 2\tilde{M}(x, \lambda; v)M_{xx}(x, \lambda; v) + 4(v(x) - \lambda)\tilde{M}(x, \lambda; v)^2 \tag{4}$$

を定義する．式 (4) は，$v(x)$ の微分多項式を係数とする λ の $2n$+1 次多項式であるから

$$\tilde{\triangle}(x, \lambda; v) = \sum_{j=0}^{2n+1} I_j(v)\lambda^j$$

と表せる．ここに $I_j(v)$ は $v(x)$ の微分多項式である．ただし，関数 $v(x)$ が，n 次定常 KdV 方程式

$$\frac{d}{dx}\left(Z_{n+1}(u) - \sum_{j=1}^{n} c_j Z_j(u)\right) = 0$$

の解であるとき，$\tilde{\triangle}(x, \lambda; v)$ は x に依存しない．すなわち，定数係数多項式であるので $I_j(v)$ が n 次定常 KdV 方程式の第一積分になる．

定義より

$$\frac{d}{dx}\tilde{\triangle}(x, \lambda; v) = 8\tilde{M}(x, \lambda; v)\frac{d}{dx}M_0(v(x))$$

が成り立つ．そこで，次のように $\tilde{\triangle}$ を分ける．

$$\tilde{\triangle}_1(x, \lambda; v) = \sum_{j=n+1}^{2n+1} I_j(v)\lambda^j \qquad \tilde{\triangle}_2(x, \lambda; v) = \sum_{j=0}^{n} I_j(v)\lambda^j$$

$\tilde{\triangle}(x,\lambda;v)=\tilde{\triangle}_1(x,\lambda;v)+\tilde{\triangle}_2(x,\lambda;v)$ である．この分割を用いると $I_{n+1}(v),\cdots,I_{2n+1}(v)$ は，無条件に定数（自明な第一積分）であることを示すことが出来る．

$$\frac{d}{dx}\tilde{\triangle}_1(x,\lambda;v)=0$$

が成り立つ．そして，$I_1(v),\cdots,I_n(v)$ は，微分多項式（非自明な第一積分）で，

$$\frac{d}{dx}\tilde{\triangle}_2(x,\lambda;v)=8\tilde{M}(x,\lambda;v)\frac{d}{dx}M_0(v) \tag{5}$$

が成り立つ．したがって，(5) より

$$I_j(v)=8\int M_{j+1}(v)\frac{d}{dx}M_0(v)dx, \qquad j=0,1,\cdots,n \tag{6}$$

が成立し，$I_,\cdots,I_n$ は, 関数的に独立な包合的第一積分であることが証明されている [2].

関数 $u(x)$ が 1 次定常 KdV 方程式

$$\frac{d}{dx}\left(Z_2(u)-c_1Z_1(u)-c_0Z_0(u)\right)=0$$

の解であるとき，M 関数 (2) は，

$$\begin{aligned}
M_0(u)&=-\frac{1}{8}u''+\frac{3}{8}u^2-\frac{1}{2}c_1u-c_0\\
M_1(u)&=\frac{1}{2}u-c_1\\
M_2(u)&=1
\end{aligned}$$

より，非自明な第一積分 (6) は，次の 2 つである．

$$\begin{aligned}
I_1(u)&=u^3+\frac{1}{4}u'^2-\frac{1}{2}uu''+K_1 \qquad (K_1:\text{定数})\\
I_2(u)&=3u^2-u''
\end{aligned} \tag{7}$$

この 2 つの第一積分より，2 階導関数 u'' を消去すると，Weierstrass の標準形に相当する関係式

$$u'^2=2u^3-2K_2u-4K_3 \quad (K_2,K_3;\text{定数}) \tag{8}$$

が構成できる．このとき，右辺の 3 次多項式の非退化条件は，

$$K_2^3-27K_3^2\neq 0 \tag{9}$$

である．

5. Heun 型微分方程式

第一積分 (7) の 1 つを

$$u''=3u^2-K_2=G(u)$$

とする．また，Weierstrass の標準形 (8) を

$$u'^2=2u^3-2K_2u-4K_3=F(u) \tag{10}$$

とおく．

次に，1 次元 Schrödinger 方程式

$$-f'' + (u-\lambda)f = 0 \qquad ' = \frac{d}{dx} \tag{11}$$

において変数変換

$$\xi = u(x)$$

を行うと

$$\begin{aligned} f_\xi &= \frac{f'}{u'} \\ f_{\xi\xi} &= \frac{(u-\lambda)f}{F(u)} - f_\xi \frac{G(u)}{F(u)} \end{aligned}$$

が成立する．すると Schrödinger 方程式 (11) は，有理関数係数の微分方程式

$$f_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi-e_1} + \frac{1}{\xi-e_2} + \frac{1}{\xi-e_3}\right) f_\xi = \frac{\xi-\lambda}{(\xi-e_1)(\xi-e_2)(\xi-e_3)} f \tag{12}$$

に変換される．ここで e_1, e_2, e_3 は

$$F(\xi) = 2\xi^3 - 2K_2\xi - 4K_3 = 2(\xi-e_1)(\xi-e_2)(\xi-e_3) = 0$$

で定める．非退化条件より $e_i \neq e_j$ $(i \neq j)$ である．従って (12) は確定特異点型の有限な特異点が 3 つなので，いわゆる Heun 型方程式である．Heun 型微分方程式は，Gauss 型方程式と異なり，通常，大域構造を知ることができない．しかし，今の場合は次の様に解が構成できる．

スペクトル判別式 $\triangle(\lambda)$ は式 (3) より

$$\triangle(\lambda) = -4\lambda^3 + K_2\lambda - K_3$$

であるが，$\xi = -2\lambda$ と置くと $F(\xi) = 4\triangle(\lambda)$ が成立するので

$$\lambda = -\frac{e_1}{2}, \quad -\frac{e_2}{2}, \quad -\frac{e_3}{2}.$$

が分かる．これらが 1 次元 Schrödinger 作用素の可解スペクトルである．これらの可解スペクトルに対してはスペクトル M 関数は

$$M(x, -\frac{e_j}{2}) = \frac{1}{2}(u(x) - e_j),\ j = 1, 2, 3$$

であるから関数

$$f_j(x) = \sqrt{u(x) - e_j},\ j = 1, 2, 3$$

は Schrödinger 方程式の解である．これより対応する Heun 型方程式の解は

$$\tilde{f}_j(\xi) = \sqrt{\xi - e_1}$$

であることから，モノドロミーは完全に決定できる．

$u(x_0) = \infty$ とし，特異点 $\xi = \infty$ を出発して有限な特異点 e_j だけを左に見ながら反時計回りに回る曲線を γ_j とする．一般の解析関数 $g(\xi)$ を $\xi = \infty$ から出発して γ_j に沿って解析接続したものを $g^{\gamma_j}(\infty)$ で表す．すると

$$(f_j^{\gamma_j})^{\gamma_j}(\infty) = f_j(\infty)$$

である．$\tilde{\gamma}_j = \gamma_j \circ \gamma_j$ を二つの曲線の始点と終点を結んだ曲線とすると，これは無限遠点 $\xi = \infty$ を出発して特異点 $\xi = e_j$ を 2 回まわる閉曲線である．集合 $u^{-1}(\tilde{\gamma}_j)$ は x 平面の直線にとれる．これは非退化条件より，$u(x) \in \tilde{\gamma}_j$ なら

ば $u'(x)^2 \neq 0$ が従うからである．$\tilde{x}_0^{(j)}$ を $\tilde{\gamma}_j$ を通って 2 度目に $\xi = \infty$ に戻ったときの写像 $u(x)$ による原像とすると $u(x_0) = u(\tilde{x}_0^{(j)})$ である．x_0 と $\tilde{x}_0^{(j)}$ を結ぶ直線を L_j とすると $u(L_j) = \tilde{\gamma}_j$ である．$\gamma_3 \sim \gamma_1 \circ \gamma_2$ なので関数 $u(x)$ は 2 重周期であることが分かる．以上は，紙幅の関係でかなり荒っぽい議論である．この議論を精密に行うと次を証明できるが，詳しくは別の機会にゆずる．

定理 2. 2 次定常 KdV 方程式の解は，非退化条件 (9) を満たすならば 2 重周期関数である．

楕円関数論を用いずに，2 重周期性が証明できた．そこで，次節では，超楕円関数論への拡張を考える．

6. 今後について

以上の議論は，定常 KdV 方程式が階層構造をもつことから，一般化することが可能である．しかし，2 次定常 KdV 方程式における第一積分の 1 つを構成してみると，

$$
\begin{aligned}
I_1(u) =& \frac{1}{2}c_1c_2u^2 - \frac{3}{8}c_1u^3 - \frac{3}{16}c_2u^4 + \frac{1}{8}c_2^2u^3 + \frac{9}{128}u^5 \\
&+ \frac{1}{2}c_1^2u + \frac{3}{16}c_1u'^2 + \frac{1}{32}c_2^2u'^2 + \frac{1}{32}uu''^2 + \frac{13}{64}c_2u^2u'' \\
&- \frac{1}{16}c_2^2uu'' - \frac{1}{8}c_1c_2u'' + \frac{5}{16}c_1uu'' - \frac{15}{128}u^3u'' - \frac{1}{64}c_2u''^2 \\
&+ \frac{3}{128}u'^2u'' - \frac{3}{128}uu'u''' + \frac{1}{64}c_2u'u''' + \frac{1}{512}u'''^2 \\
&- \frac{1}{256}u''u'''' + \frac{3}{256}u^2u'''' - \frac{1}{64}c_2uu'''' - \frac{1}{32}c_1u''''
\end{aligned}
$$

のように複雑な形をしているため，具体的に高階の場合に計算するのには，新たな手法が必要となる．

この報告は，微分方程式を使った楕円関数論構築へのアプローチへの出発点である．今後，既存の楕円関数における加法公式等の諸定理を，微分方程式のモノドロミーをつかって証明し，微分方程式（ソリトン理論）による見通しのよい楕円関数論を構築を目論んでいる．

参考文献

[1] M. Ohmiya：KdV Polynomials and Λ-operator, Osaka J. Math. 32 pp.409-430, 1995

[2] 松島正知, 大宮眞弓：跡公式と定常 KdV 階層の完全積分可能性，九州大学応用力学研究所研究集会報告 No.21ME-S7(5) pp.29-34, 2010

[3] M. Matsushima and M. Ohmiya：An Algebraic Construction of the First Integrals of the Stationary KdV Hierarchy，AIP conference Proceeding 1168 Vol. 1 pp.168-172, 2009

[4] 大宮眞弓：非線形波動の古典解析　－ソリトン，それに続く非線形の世界－，森北出版

[5] 大宮眞弓：可積分系とスペクトル　－古典解析入門，あるいは Darboux の夢への旅－