

非可換インスタントンのADHM構成法

浜中, 真志
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

中津, 了勇
摂南大学理工学部基礎理工学機構

<https://doi.org/10.15017/1448844>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告．25A0-S2 (4), pp.21-28, 2014-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：



応用力学研究所研究集会報告 No.25AO-S2
「非線形波動研究の拡がり」 (研究代表者 増田 哲)

Reports of RIAM Symposium No.25AO-S2

The breadth and depth of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2013

Article No. 04 (pp. 21 - 28)

非可換インスタントンの ADHM構成法

浜中 真志 (HAMANAKA Masashi), 中津 了勇
(NAKATSU Toshio)

(Received 16 January 2014; accepted 25 February 2014)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2014

非可換インスタントンの ADHM 構成法

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 浜中真志 (Masashi HAMANAKA)

E-mail: hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

摂南大学理工学部基礎理工学機構 中津了勇 (Toshio NAKATSU)

E-mail: nakatsu@mpg.setsunan.ac.jp

Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin (ADHM) 構成法とは、任意のインスタントン解を与える強力な構成法の一つであり、インスタントン・バックグラウンドでの経路積分の計算など様々な応用がある。この構成法を非可換空間の設定に拡張すると、モジュライ空間の特異点が解消され種々の議論が自然に進み、 $U(1)$ インスタントンといった新しい物理的対象も生み出される。ゲージ理論においては非可換空間への拡張は背景フラックスの導入と等価であるが、この事情も ADHM 構成法から明快に理解される。この講演では、非可換空間上のインスタントンの ADHM 構成法を紹介し、厳密解の構成や数理的側面について詳しく議論する。

1 イン트로ダクション

インスタントンとは、4次元反自己双対¹Yang-Mills 方程式に作用有限の境界条件を課した解のことであり、素粒子論・幾何学において極めて重要な役割を果たしてきた。反自己双対ヤン・ミルズ方程式は数少ない高次元可積分方程式の一つであり、可積分系においても興味深い対象である。強い境界条件のため、モジュライ空間 (解空間をゲージ変換の自由度で割った空間) は有限次元となる。ADHM 構成法とは、インスタントン・モジュライ空間と ADHM データのモジュライ空間との 1 対 1 対応を利用して、任意のインスタントン解を構成する方法である [1]。ADHM データを与える方程式も 1 対 1 対応を与える変換方程式も行列方程式となるため、4次元上の行列値非線形偏微分方程式の解であるインスタントンが、初等的な線形代数の計算で (原理的には) 与えられる。また、この 1 対 1 対応を用いて、インスタントン・バックグラウンドでの経路積分の計算が実行され、場の量子論におけるさまざまな非摂動論的効果が解明されてきた [4]。特に最近では、Nekrasov 分配関数の計算でも本領を発揮し、局所化公式を用いるために特異点を解消する際、非可換空間上のインスタントンが活躍した [17, 18]。

この記事では、論文 [11] に基づき、非可換空間上のインスタントンの ADHM 構成法を紹介し、厳密解の構成やモジュライ空間の 1 対 1 対応の証明、インスタントン数の起源などについて詳しく議論する。

2 非可換空間上のゲージ場の理論

非可換空間は座標関数同士の積の非可換性で特徴付けられる：

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

ここで、 $\theta^{\mu\nu}$ は反対称な実定数であり、非可換パラメータと呼ばれる²。この関係式は、量子力学の正準交換関係 $[q, p] = i\hbar$ に類似しており、「空間の不確定性関係」を導く。このことから非可換空間上では、粒子の位置は完全に決めることができず、ある広がった分布を持つ。その結果、可

¹「反自己双対」=「Anti-Self-Dual」。以後「ASD」と略すことがある。

²非可換パラメータ $\theta^{\mu\nu}$ は背景フラックスに関係し、手で与えられる。

換な空間上では存在した場の特異点が、非可換空間上では解消されるということが起こりうる。分布の広がり幅は大体 $\sqrt{|\theta^{\mu\nu}|}$ に比例し、可換な空間への極限 $\theta^{\mu\nu} \rightarrow 0$ で特異性が復活する。

非可換パラメータ $\theta^{\mu\nu}$ は μ, ν に関して反対称でありこの記事では4次元の場合は以下の標準的なものを採用する ($\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$) :

$$\theta^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -\theta_1 & 0 & 0 \\ \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\theta_2 \\ 0 & 0 & \theta_2 & 0 \end{array} \right), \quad (2.2)$$

非可換ユークリッド空間上でゲージ場の理論を記述する方法は、Moyal 積を用いる記述とオペレーターでの記述の2つが知られている。両者の記述は等価であり、Weyl 変換により1対1に結ばれている (例えば [12])。

2.1 Moyal 積を用いる記述

Moyal 積は普通の可換な関数 (場) に対して定義される積の一つである [14] :

$$f \star g(x) := \exp \left(\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu^{(x')} \partial_\nu^{(x'')} \right) f(x') g(x'') \Big|_{x'=x''=x}. \quad (2.3)$$

Moyal 積は、結合則が成り立ち : $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$, 座標関数同士の非可換性 (2.1) を再現する : $[x^\mu, x^\nu]_\star = i\theta^{\mu\nu}$. Moyal 積 (2.3) は、非可換パラメータで以下のように展開できる : $f \star g(x) = f(x)g(x) + (i/2)\theta^{\mu\nu} \partial_\mu f(x) \partial_\nu g(x) + O(\theta^2)$. 可換極限 $\theta^{\mu\nu} \rightarrow 0$ で普通の積に戻る。

非可換空間上の³ゲージ理論は、普通の可換空間上のゲージ理論に現れる場同士の積をすべて Moyal 積に置き換えることで得られる。ただしゲージ場 A_μ に対する以下のゲージ変換の下、理論は不変でなければならない。

$$A_\mu \mapsto g^{-1} \star A_\mu \star g + g^{-1} \star \partial_\mu g, \quad g = g(x) \in G. \quad (2.4)$$

例えば、この記述での NC ASD Yang-Mills 方程式は以下のように与えられる。

$$F_{\mu\nu}^\star = -(*F^\star)_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Hodge 作用素 $*$ は可換のときと同様、以下のように定義される : $(*F^\star)_{\mu\nu} = (1/2)\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\star\rho\sigma}$. 場の強さは以下のように定義される :

$$F_{\mu\nu}^\star = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]_\star. \quad (2.6)$$

一つ注意として、上記の NC ゲージ変換 (2.4) の下共変的に変換するために、 $G = U(1)$ であっても $[A_\mu, A_\nu]_\star$ の項が不可欠である。このため、NC ゲージ理論は「可換 (abelian)」であっても「非可換 (non-abelian)」な性質を示す。またゲージ群の $U(1)$ パートがさまざまな場面で重要な役割を果たす [5, 7, 8, 22]。

³ 「非可換空間上の」 = 「Non-Commutative」。以後「NC」と略すことがある。

2.2 オペレーターでの記述

今度は、座標の非可換性 (2.1) から出発して NC ゲージ理論を定義する．簡単のため非可換 2 次元平面 ($[x^1, x^2] = i\theta$) を考える．新しい変数を $\hat{a} := (1/\sqrt{2\theta})\hat{z}$, $\hat{a}^\dagger := (1/\sqrt{2\theta})\hat{z}^\dagger$ (ただし $\hat{z} := \hat{x}^1 + i\hat{x}^2$) として定義すると, $[\hat{x}^1, \hat{x}^2] = i\theta$ より,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (2.7)$$

が分かる．これより, $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ はそれぞれ調和振動子の生成, 消滅演算子と解釈できる．これらが作用する Fock 空間を $\mathcal{H}$ と書くと, $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}|n\rangle$ である．ここで, $|n\rangle := \left\{ (\hat{a}^\dagger)^n / \sqrt{n!} \right\} |0\rangle$, ($n = 0, 1, \dots$) は占有数表示の基底であり, $\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n|n\rangle, \hat{a}|0\rangle = 0$ を満たす．

場 $\hat{f}$ は $\hat{x}$ の関数であるから, Fock 空間 $\mathcal{H}$ に作用する演算子となり, 占有数表示で以下のように表される：

$$\hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} f_{mn} |m\rangle \langle n|. \quad (2.8)$$

微分は次のように定義される：

$$\partial_i \hat{f} := [\hat{\partial}_i, \hat{f}] := [-i(\theta^{-1})_{ij} \hat{x}^j, \hat{f}]. \quad (2.9)$$

これは実際 Leibniz 則を満たす：

$$\partial_i \hat{x}^j = [-i(\theta^{-1})_{ik} \hat{x}^k, \hat{x}^j] = \delta_i^j. \quad (2.10)$$

積分も Fock 空間 $\mathcal{H}$ に関してのトレースとして定義される：

$$\int dx^1 dx^2 \hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2) := 2\pi\theta \text{Tr}_{\mathcal{H}} \hat{f}. \quad (2.11)$$

ここで、非可換ソリトンの研究で重要な演算子の例としてシフト演算子を紹介する． $\hat{P}_k$ を $\mathcal{H}$ の k 次元部分空間への射影演算子としたとき、以下を満たす演算子 $\hat{U}_k$ をシフト演算子と呼ぶ：

$$\hat{U}_k \hat{U}_k^\dagger = 1, \quad \hat{U}_k^\dagger \hat{U}_k = 1 - \hat{P}_k. \quad (2.12)$$

例えば 2 次元において、ランク k の射影演算子 $\hat{P}_k = \sum_{p=0}^{k-1} |p\rangle \langle p|$ に関するシフト演算子として以下のものが考えられる：

$$\hat{U}_k = \sum_{n=0}^{+\infty} |n\rangle \langle n+k|. \quad (2.13)$$

文字通り「ラベルを k だけシフトする」演算子である．

4 次元においては、複素座標を $\hat{z}_1 = \hat{x}^2 + i\hat{x}^1$, $\hat{z}_2 = \hat{x}^4 + i\hat{x}^3$ として導入すると、非可換性 (2.2) より、

$$[\hat{z}_1, \hat{z}_1] = 2\theta_1, \quad [\hat{z}_2, \hat{z}_2] = 2\theta_2, \quad (2.14)$$

が成り立つ．複素座標 (2.14) とその共役座標のペアが、調和振動子の生成・消滅演算子を与える．例えば、 $\theta_{j=1,2} < 0$ のとき、 $(1/\sqrt{-2\theta_j})\hat{z}_j$ は消滅演算子 a_j , $(1/\sqrt{-2\theta_j})\hat{z}_j^\dagger$ は生成演算子 $a_j^\dagger$

となる. $\mathcal{H}_j$ をそれぞれの調和振動子に対する Fock 空間とすると, 4次元空間上の場 $\hat{f} = \hat{f}(\hat{x})$ は, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ に作用する演算子となり, 占有数表示で以下のように表される:

$$\hat{f}(\hat{x}) = \sum_{m_1, m_2, n_1, n_2=0}^{+\infty} f_{m_1, m_2, n_1, n_2} |m_1, m_2\rangle \langle n_1, n_2|. \quad (2.15)$$

ただし $|n_1, n_2\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$ ($n_1, n_2 = 0, 1, \dots$).

オペレーター形式での ASD Yang-Mills 方程式は以下の通り:

$$\hat{F}_{z_1 \bar{z}_1} + \hat{F}_{z_2 \bar{z}_2} = 0, \quad \hat{F}_{z_1 z_2} = 0. \quad (2.16)$$

3 ADHM 構成法とその双対性

ADHM 構成法は, インスタントン・モジュライ空間と ADHM データのモジュライ空間との 1 対 1 対応 (双対性) を利用したものであり, それらの解空間どうしは「Dirac 方程式の零モード」を介して対応づけられる. 私達は, 非可換空間上での ADHM 構成法について, Moyal 積を用いる記述で非可換パラメータ θ に関する形式的べき級数のレベルにおいて, この 1 対 1 対応の証明を与えた [11]. 特にインスタントン数に関する新しい公式を証明し, [13] で議論されているインスタントン背景での指数定理やグリーン関数に関する結果とアイデアを ADHM 構成法のすべての議論に適用した.

この記事では以下, ゲージ群は $G = U(N)$ とし, インスタントン数は k のものを考える. これと双対な ADHM 方程式は以下のように与えられる:

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{R}} &:= [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J = \zeta, \\ \mu_{\mathbb{C}} &:= [B_1, B_2] + IJ = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで, B_1, B_2 は $k \times k$ 行列, $I, J^\dagger$ は $k \times N$ 行列である. 右辺の定数 ζ は, 座標の交換子 $-[z_1, \bar{z}_1] - [z_2, \bar{z}_2]$ に等しく, 可換空間ではもちろんゼロである. 座標 z_i は ADHM データ B_i と常に対になって現れるため, このような座標の交換子が現れる. ADHM 方程式に対する「ゲージ変換」は以下のように与えられる:

$$I \rightarrow R^\dagger I Q^\dagger, \quad J \rightarrow Q J R, \quad T_\mu \rightarrow R^\dagger T_\mu R, \quad Q \in SU(N), \quad R \in U(k) \quad (3.2)$$

ADHM 方程式 (3.1) の解空間をこの「ゲージ変換」の自由度で割ったものを ADHM データのモジュライ空間という.

与えられた ADHM データからインスタントン解を構成するには次の双対変換を経由すればよい. すなわち, ADHM 方程式の解 $B_1, B_2, I, J^\dagger$ を用いて, 次の「0次元 Dirac 方程式」を規格化条件 $\hat{V}^\dagger \cdot \hat{V} = 1_N$ の下, 解く:

$$\hat{V}^\dagger \cdot \hat{V} = 0, \quad \hat{V}(x) = \begin{pmatrix} I^\dagger & J \\ \hat{z}_2 - B_2^\dagger & -(\hat{z}_1 - B_1) \\ \hat{z}_1 - B_1^\dagger & \hat{z}_2 - B_2 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

この解 $\hat{V}$ は $(N + 2k) \times N$ 行列として書ける. この $\hat{V}$ が求まれば, インスタントン解は $A_\mu = \hat{V}^\dagger \partial_\mu \hat{V}$ として構成するだけである. これは自動的に NC ASD Yang-Mills 方程式を満たす [19].

ここで、インスタントン・モジュライ空間 $\mathcal{M}$ についてコメントする。インスタントン・モジュライ空間 $\mathcal{M}$ は、ADHM 方程式の右辺の定数値によって決まる。($\mathcal{M} = \mathcal{M}_\zeta$.) ADHM 方程式 (3.1) の第 1 式の右辺の定数 ζ がノンゼロであれば (完備化された) インスタントン・モジュライ空間の特異点が解消することが知られている [15, 16]。したがって解消された特異点の部分に対応する、可換空間にはないインスタントン解が存在することになる。これが $U(1)$ インスタントンであり、実際に非可換 $\mathbb{R}^4$ 上で非特異な解として構成された [6, 19]。

3.1 非可換 CGOT 公式

サイズ k の ADHM データがちょうどインスタントン数 k のインスタントン解を与えることを示すため、以下の公式 (非可換 Corrigan-Goddard-Osborn-Templeton (CGOT) 公式 [3, 20]) を証明した：

$$\int d^4x \operatorname{Tr}_N(F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu}) = - \int d^4x \partial^2 \partial_\mu (\operatorname{Tr}_k f^{-1} \star \partial^\mu f), \quad f := (\nabla^\dagger \star \nabla)^{-1}. \quad (3.4)$$

非可換場の理論の性質と ADHM 構成法の関係式を駆使して証明することができる。

この公式と、無限遠での振る舞い $f \simeq |x|^{-2} 1_k$ を用いると、インスタントン数は表面積分の計算から容易に求まる：

$$\frac{-1}{16\pi^2} \int d^4x \operatorname{Tr}_N(F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu}) = \operatorname{Tr}_k 1_k = k.$$

これは、サイズ k の ADHM データがちょうどインスタントン数 k のインスタントン解を与えることを示している。この議論は $U(1)$ の場合にも適用でき、ADHM 構成法でのインスタントン数の「起源」の最も直接的な説明を与えている。

論文 [11] では Moyal 積での議論を展開したが、オペレーター形式でも証明することができる。(これについては別の機会に報告したい。)

4 可換インスタントンの ADHM 構成

簡単な具体解を実際に構成してみよう。(より詳しい議論は [10], [arXiv:1311.5227 [hep-th]] に譲る。)

4.1 BPST 解 ($G = SU(2)$, $k = 1$)

まず可換空間の $G = SU(2)$, $k = 1$ の場合を議論する。この解は最も基本的かつ重要なインスタントン解であるが、ADHM 構成法によって極めて簡単に構成される。

まず ADHM 方程式を解こう。ADHM 方程式は $k \times k$ 行列の方程式であるから、今の場合 ($k = 1$) 自明に解ける。交換子の部分は落ちるので、行列 B_1, B_2 は任意の複素数とすればよく、 I, J についても簡単に求まる。結果は次の通り：

$$B_1 = \alpha_1, \quad B_2 = \alpha_2, \quad I = (\rho, 0), \quad J = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix}, \quad \alpha_{1,2} \in \mathbb{C}, \quad \rho \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

α の実部、虚部を $\alpha_1 = b_2 + ib_1$, $\alpha_2 = b_4 + ib_3$ のように b_μ で表す。

次に「0次元 Dirac 方程式」を解く．ADHM データを代入すると，

$$\nabla^\dagger V = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \bar{e}_\mu(x_\mu - b_\mu) V = 0$$
となり（ただし $\bar{e}_\mu = (i\sigma_a, 1)$ ），その解は

$$V = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \begin{pmatrix} \bar{e}_\mu(x_\mu - b_\mu) \\ -\rho & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix}, \quad \phi = |x - b|^2 + \rho^2 \quad (4.2)$$

と簡単に求まる．規格化因子 ϕ は規格化条件 $V^\dagger V = 1$ から決まった．

この「0次元ディラック」零モードから，ゲージ場および曲率は V から容易に計算される：

$$A_\mu = V^\dagger \partial_\mu V = \frac{i(x - b)^\nu \eta_{\mu\nu}^{(-)}}{(x - b)^2 + \rho^2}, \quad F_{\mu\nu} = \frac{2i\rho^2}{(|x - b|^2 + \rho^2)^2} \eta_{\mu\nu}^{(-)}. \quad (4.3)$$

ここで， $\eta_{\mu\nu}^{(-)} = \eta_{\mu\nu}^{(-)a} \sigma_a$ であり， $\eta_{\mu\nu}^{(-)a}$ は't Hooft の eta symbol と呼ばれる ASD tensor であり，曲率が反自己双対であることが分かる．モジュライ空間の次元5は，1 インスタントンの位置 b^μ (4つ) とサイズ ρ (1つ) の自由度に対応する．(図1参照．) 一般に，ADHM データ $B_{1,2}$ の対角成分がインスタントンの位置を表し，ADHM データ I, J がインスタントンのサイズの情報を含む．

ここでサイズ・ゼロ極限を取ると，このとき $F_{\mu\nu}$ は特異な配位に近付くことが分かる．インスタントンは定義により滑らかな関数でなければならないので，サイズ・ゼロのインスタントンは存在しない．これはちょうどインスタントン・モジュライ空間の特異点（スモール・インスタントン特異点）に対応する．非可換空間ではこの特異点が解消し，新しいクラスのインスタントンが現れる．

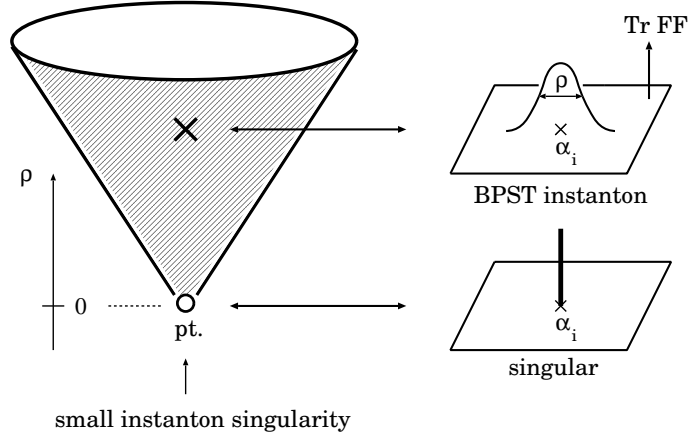


Figure 1: インスタントンモジュライ空間と BPST インスタントン (可換空間) [10]

5 非可換インスタントンの ADHM 構成 ($\zeta > 0$)

ここでは， $\zeta > 0$ の場合の非可換インスタントンの ADHM 構成を議論する．簡単のため， $\theta_1 = \theta_2 = -\zeta/4$ とする．

5.1 非可換 BPST インスタントン解 ($G = U(2)$, $k = 1$)

非可換空間上の $G = U(2)$ ASD 1 インスタントン解 (非可換 BPST 解) も ADHM 構成法により同様に求められる. これを与える非可換 ADHM 方程式 (3.1) の解としては

$$B_1 = \alpha_1, \quad B_2 = \alpha_2, \quad I = (\sqrt{\rho^2 + \zeta}, 0), \quad J = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

(ほぼ自明解) を取ればよい. ($\zeta > 0$ とした.) 可換空間の場合と比べると I の値が少し異なるため, さっきと同様に ρ をゼロにもっていても I はゼロにならず, サイズ有限の非特異なインスタントンが生き残る. これが実は $U(1)$ インスタントンであり, スモール・インスタントン特異点が解消されたことによって生じた新しいインスタントン解に相当する. $U(1)$ インスタントンは位置を表すモジュライ・パラメータしか持たず, 広がりのサイズは一定 (大体 $\sqrt{\zeta}$ ぐらい) である. (図 2 参照.) この $U(1)$ インスタントンを次節でより詳しく調べてみよう.

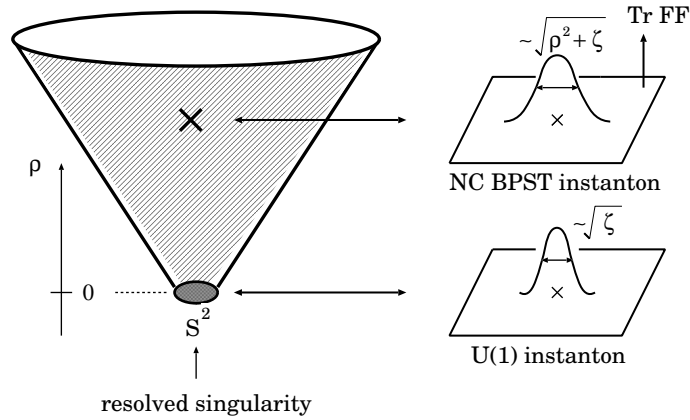


Figure 2: インスタントン・モジュライ空間と NC BPST インスタントン ($\zeta > 0$)

BPST インスタントン		NC BPST インスタントン
$\mu_{\mathbb{R}} = 0, \mu_{\mathbb{C}} = 0$	ADHM 方程式	$\mu_{\mathbb{R}} = \zeta > 0, \mu_{\mathbb{C}} = 0$
$B_{1,2} = \alpha_{1,2},$ $I = (\rho, 0), J^t = (0, \rho)$	ADHM データ	$B_{1,2} = \alpha_{1,2},$ $I = (\sqrt{\rho^2 + \zeta}, 0), J^t = (0, \rho)$
$\mathbb{R}^4 \times$ オービフォールド $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ (singular)	モジュライ空間	$\mathbb{R}^4 \times$ Eguchi-Hanson $\widetilde{\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2}$ (regular)
$F_{\mu\nu} \rightarrow$ (singular)	ゼロサイズ極限	$F_{\mu\nu} \rightarrow$ (regular) $U(1)$ instanton

5.2 非可換インスタントン解 ($G = U(1)$, $k = 1$)

簡単のためインスタントンの位置を原点にとる. $k = 1$ なので ADHM 方程式は自明に解ける:

$$B_{1,2} = 0, I = \sqrt{\zeta}, J = 0. \quad (5.2)$$

問題は Dirac 零モードである. 「0次元 Dirac 方程式」は, $\hat{\nabla}^\dagger \hat{V} = \begin{pmatrix} \sqrt{\zeta} & \hat{z}_2 & \hat{z}_1 \\ 0 & -\hat{z}_1 & \hat{z}_2 \end{pmatrix} \hat{V} = 0$. となり, この解としては, 規格化因子を除いて次のものが自然に取れる:

$$\hat{V}_1 = \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \hat{z}_1 + \hat{z}_2 \hat{z}_2 \\ -\sqrt{\zeta} \hat{z}_2 \\ -\sqrt{\zeta} \hat{z}_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\nabla}^\dagger \hat{V}_1 = 0. \quad (5.3)$$

しかしこれはオペレータの意味で $\mathcal{H}$ 全体での規格化条件を満たさない. 今のコンベンションでは $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ が消滅演算子に対応し, $\hat{V}_1$ が零モード $|0, 0\rangle$ を持つため, 規格化因子を求める際 $\hat{V}_1^\dagger \hat{V}_1$ の逆行列を $\mathcal{H}$ の中で求めることができないからである. したがって $\hat{V}$ を規格化する際はこの点に注意する必要がある. 古内氏は [6] において, すべての議論を $\mathcal{H}_1 := \mathcal{H} \setminus \mathbb{C}|0, 0\rangle$ に制限すれば, $\hat{V}_1$ が正しい反自己双対ゲージ場を与えることを示し, さらにシフト演算子を用いて, $\mathcal{H}_1$ に制限された議論を $\mathcal{H}$ に変換し (ラベルを付け変え), $\mathcal{H}$ で規格化された $\hat{V}$ を求めた [6].

シフト演算子を導入することなくこれらの解をより系統的に構成することもできる. 紙数も尽きたので詳しい議論は別の機会および論文 [11] に譲る.

Acknowledgements

この研究は科学研究費補助金 (No.23740182 および No.24540223) から経済援助を受けています.

References

- [1] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfeld and Y. I. Manin, Phys. Lett. A **65** (1978) 185.
- [2] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz and Y. S. Tyupkin, Phys. Lett. B **59** (1975) 85.
- [3] E. Corrigan, P. Goddard, H. Osborn and S. Templeton, Nucl. Phys. B **159** (1979) 469.
- [4] N. Dorey, T. J. Hollowood, V. V. Khoze and M. P. Mattis, Phys. Rept. **371** (2002) 231 [hep-th/0206063].
- [5] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. **73** (2002) 977 [hep-th/0106048].
- [6] K. Furuuchi, Prog. Theor. Phys. **103** (2000) 1043 ; Commun. Math. Phys. **217** (2001) 579.
- [7] 浜中 真志, 素粒子論研究 **106-1** (2002-10) 1-60.⁴
- [8] M. Hamanaka, Ph. D thesis [hep-th/0303256].
- [9] M. Hamanaka and T. Nakatsu, J. Phys. Conf. Ser. **411** (2013) 012016.
- [10] M. Hamanaka and T. Nakatsu, Frontiers of Mathematics in China **8** (2013) 1031.
- [11] M. Hamanaka and T. Nakatsu, “ADHM Construction and Group Actions for Noncommutative Instantons,” to appear.
- [12] J. A. Harvey, “Komaba lectures on noncommutative solitons and D-branes,” [hep-th/0102076].
- [13] Y. Maeda, A. Sako, J. Math. Phys. **53**, 022303 (2012).
- [14] J. E. Moyal, Proc. Cambridge Phil. Soc. **45** (1949) 99.
- [15] H. Nakajima, in *Topology, Geometry and Field Theory* (World Sci., 1994) 129 [ISBN/981-02-1817-6].
- [16] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert Schemes of Points on Surfaces* (AMS, 1999) [ISBN/0-8218-1956-9].
- [17] H. Nakajima and K. Yoshioka, Invent. Math. **162** (2005) 313 [math/0306198].
- [18] N. A. Nekrasov, Adv. Theor. Math. Phys. **7** (2004) 831. [hep-th/0206161].
- [19] N. Nekrasov and A. Schwarz, Commun. Math. Phys. **198** (1998) 689 [hep-th/9802068].
- [20] H. Osborn, Nucl. Phys. B **159** (1979) 497.
- [21] N. Seiberg and E. Witten, JHEP **9909** (1999) 032 [hep-th/9908142].
- [22] R. J. Szabo, Phys. Rept. **378** (2003) 207 [hep-th/0109162].

⁴浜中が書いた解説記事は, 浜中のホームページ [<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hamanaka/hamanaka.html>] から入手可能です.