

球面上の2次元Navier-Stokes流の高Reynolds数における非定常解と不安定定常解

佐々木, 英一
京都大学大学院情報学研究科

竹広, 真一
京都大学数理解析研究所

山田, 道夫
京都大学数理解析研究所

<https://doi.org/10.15017/1448843>

出版情報 : 応用力学研究所研究集会報告. 25A0-S2 (3), pp.14-20, 2014-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :

応用力学研究所研究集会報告 No.25AO-S2
「非線形波動研究の拡がり」 (研究代表者 増田 哲)

Reports of RIAM Symposium No.25AO-S2

The breadth and depth of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2013

Article No. 03 (pp. 14 - 20)

球面上の2次元Navier-Stokes流の 高Reynolds数における非定常解と不 安定定常解

佐々木 英一 (SASAKI Eiichi), 竹広 真一 (TAKEHIRO
Shin-ichi), 山田 道夫 (YAMADA Michio)

(Received 15 January 2014; accepted 7 March 2014)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2014

球面上の 2 次元 Navier-Stokes 流の高 Reynolds 数における 非定常解と不安定定常解

京都大学大学院情報学研究科 佐々木 英一 (SASAKI Eiichi)*
京都大学数理解析研究所 竹広 真一 (TAKEHIRO Shin-ichi)
京都大学数理解析研究所 山田 道夫 (YAMADA Michio)

概要

本稿は、球面上の 2 次元 Navier-Stokes 流における高 Reynolds 数での非定常解について議論する。非定常解はカオス的で、自明解の分岐ダイアグラムから得た不安定定常解の周りを経巡るように見える。高 Reynolds 数における非定常解と不安定定常解の関係を調べるために、非定常解を不安定定常解を用いて近似することを試みた。非定常解の流れ関数は不安定定常解の流れ関数の線形結合によってよく近似され、Reynolds 数が増加すると近似の相対誤差は減少することを見出した。これらの結果は高 Reynolds 数における非定常解が不安定定常解の張る線形空間の中にほとんど存在することを意味し、さらに Reynolds 数が増加するにつれ非定常解の解軌道はこの線形空間の中に集まることを示唆する。

1 はじめに

地球や木星など惑星大気には帯状流と呼ばれる、緯度によって流れの向きが東西に交互に変わる複数本の強いジェット流が存在する。回転球面上の 2 次元 Navier-Stokes 方程式は、「惑星大気が球面上にあること」、「惑星が自転していること」の二つの効果のみを取り入れ、大気の厚さが惑星の半径に比べ十分に小さいという近似を行った、惑星大気の最も単純なモデルの一つである。惑星大気は高 Reynolds 数の乱流状態であるため、回転球面上の 2 次元 Navier-Stokes 乱流の性質が調べられてきた。

回転がない場合は、2 次元乱流は小さいスケールから大きいスケールへのエネルギー輸送がおき、乱流はコヒーレントな渦を形成する [4]。一方、2 次元乱流に対する回転効果を初めて調べたのは Rhines [6] である。彼は回転球面の接平面近似である β 平面における強制乱流を数値的に調べ、2 次元乱流が帯状流を形成することを報告した。近年、Obuse et al. [5] は回転球面上の 2 次元強制乱流の漸近状態を調べ、回転球面上の 2 次元乱流は最終的に 2 本もしくは 3 本のジェットの安定な帯状流となることを報告した。

帯状流の安定性については、Baines [1] は球面調和関数で表される非粘性帯状流・非粘性 Rossby 波の線形安定性を数値的に調べた。まず、変曲点定理より回転角速度が十分大きくなると非粘性帯状流は線形安定となる [3]。Baines は、回転角速度の大きさを増加させ、非粘性帯状流が線形不安定から安定に切り替わる臨界回転角速度を数値的に求めた。しかし、Baines の計算方法では臨界層と呼ばれる特異性の発現によって固有値が正しく求められないため、臨界回転角速度は誤差を含むものであった。そこで、我々は臨界層と北極・南極の特異性を考慮した shooting 法によって Baines [1] が求めた臨界回転角速度を最大約 20% 修正した [7]。また粘性帯状流について、我々は Baines と同じく流れ関数が単一の球面調和関数で表される粘性帯状流の線形安定性を数値的に調べた [8]。回転は粘性帯状流を安定化させ、回転角速度が増加するにつれて臨界 Reynolds 数は急激に増加する。特に、高 Reynolds 数における粘性帯状流が不安定となる回転角速度領域が非粘性帯状流が線形不安定となる回転角速度領域より大きいことを見出した。これは非粘性極限と非粘性における帯状流の安定性特性の不一致を示唆する。この見かけ上の矛盾は、Reynolds 数が増加するにつれて、粘性帯状流は不安定だが非粘性帯状流は安定となる回転角速度領域で、不安定擾乱の増幅率が 0 に収束することで解消される。

* mail:esasaki@i.kyoto-u.ac.jp

さらに我々は、粘性帯状流から分岐する非線形解の性質を調べた [9]. Fig.1 に分岐ダイアグラムを示す. Reynolds 数が増加すると定常帯状流は Hopf 不安定となり, 定常進行波が超臨界分岐する. 非回転系の場合, さらに Reynolds 数が増加すると, pitchfork 分岐によって他の定常進行波が分岐する. これら定常進行波は十分高い Reynolds 数で Hopf 不安定となる. 一方, 回転系の場合, サドルノード分岐や高 Reynolds 数まで線形安定な定常進行波を見つけた. これらの結果は回転効果によって分岐構造が変化することを示唆する. Fig.2 に非回転系における $R = 6000$ での不安定定常進行波の流れ関数を示す. TW2-S の赤道反対称な流れ関数もまた解で, TW2-N と呼ぶ. TW3-S, TW5-S, TW6-S についても同様である. なお, Reynolds 数が増加すると TW1 の流れ関数は分岐直後にはない赤道対称性を回復する. 高 Reynolds 数における定常解の流れ関数の対称性の回復は, 2 次元トーラスの場合と共通した性質である [2]. 本稿では非回転系における定常解が不安定となった後の非定常解の性質を報告する. 特に, 高 Reynolds 数での非定常解は分岐ダイアグラムから得た不安定定常解の周りを経巡るように見えるため, 不安定定常解と非定常解の関係に注目する.

2 章では扱う支配方程式について述べる. 3 章では高 Reynolds 数における非定常解の性質を議論する. 4 章はまとめである.

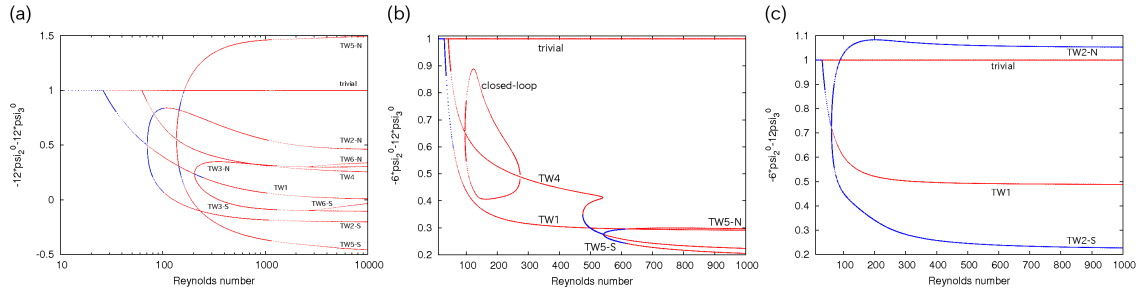


Fig.1 Bifurcation diagram of the 3-jet zonal flow: (a) $\Omega = 0.0$, (b) $\Omega = -1.0$ and (c) $\Omega = 1.0$, respectively, Here Ω indicates the rotation rate of the sphere. The horizontal and vertical axes indicate the Reynolds number and a parameter given by the streamfunction of the steady solutions, respectively. The blue and red points indicate linearly stable and unstable, respectively. See also [9].

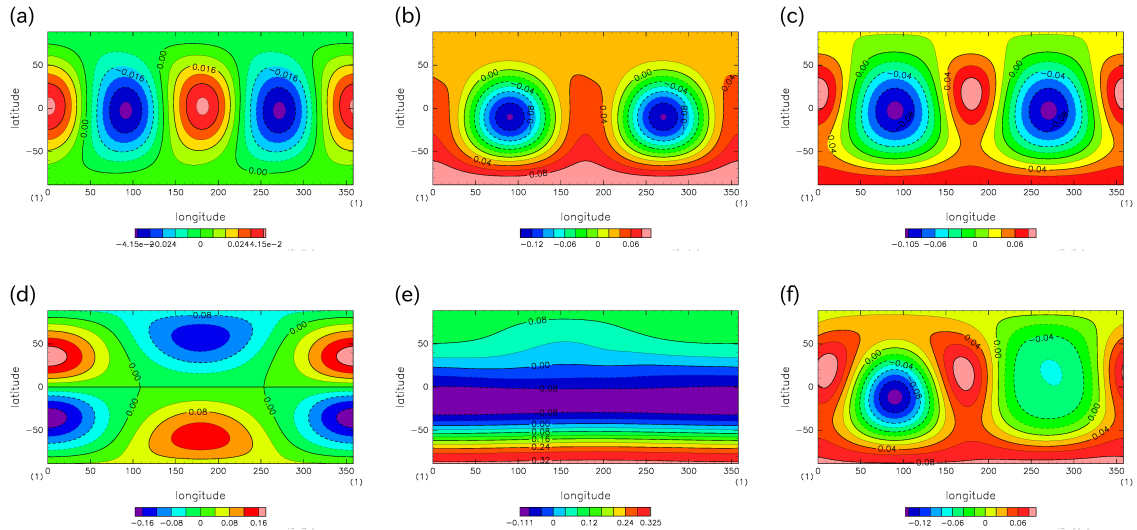


Fig.2 The streamfunctions of the steady traveling wave solutions at $R = 6000$; (a) TW1 (b) TW2-S, (c) TW3-S, (d) TW4 (e) TW5-S and (f) TW6-S, respectively. The horizontal and vertical axes indicate the longitude and the latitude, respectively. See also [9].

2 支配方程式

我々の扱う支配方程式は球面上の2次元非圧縮粘性流の運動を記述する無次元化された渦度方程式で、

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi) = \frac{1}{R} \{(\Delta + 2) \Delta \psi + (l(l+1) - 2) Y_l^0(\mu)\}, \quad (1)$$

で表される。ここで t は時間, λ, μ は経度と \sin 緯度 ($\mu = \sin \phi, \phi$ は緯度) を表す。 ψ は流れ関数で渦度は $\zeta = \Delta \psi$ と表され, Δ は単位球面上の水平ラプラシアンである。速度の経度成分, 緯度成分 (u_λ, u_μ) はそれぞれ $u_\lambda = -\sqrt{1-\mu^2}(\partial\psi/\partial\mu)$, $u_\mu = 1/\sqrt{1-\mu^2}(\partial\psi/\partial\lambda)$ で与えられる。 R は Reynolds 数, $J(A, B) = (\partial A/\partial\lambda)(\partial B/\partial\mu) - (\partial A/\partial\mu)(\partial B/\partial\lambda)$ はヤコビアンであり, $(l(l+1) - 2)Y_l^0(\mu)/R$ は渦度強制である。ここで $Y_l^m(\lambda, \mu)$ は 4π に正規化された全波数 l , 経度方向波数 m の球面調和関数である。式 (1) 右辺の $2\Delta\psi/R$ は粘性項を3次元デカルト座標から2次元球面座標に変換する際に自然に導出される項で, この項により系の全角運動量は保存される [10].

渦度方程式 (1) は任意の Reynolds 数で l 本ジェットの帯状流

$$\psi_0(\mu) = -\frac{1}{l(l+1)} Y_l^0(\mu), \quad \zeta_0(\mu) = Y_l^0(\mu), \quad (2)$$

を解にもつ。ここでジェットの本数は経度方向の速度の極大値の数によって定義される。

3 高 Reynolds 数における非定常解の性質

$l = 1, 2$ の帯状流は任意の Reynolds 数で安定である [8, 9]。ここでは $l = 3$ に固定し, 3本ジェットの帯状流から現れる定常解と高 Reynolds 数における非定常解の関係を議論する。以後, 3本ジェットの帯状流を自明解と呼ぶ。問題を数値的に解くためにスペクトル法を用いた。流れ関数は球面調和関数を用いて

$$\psi(\lambda, \mu, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n \psi_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu),$$

と展開される。ここで $\psi_n^m(t)$ は展開係数で, N は切断波数であり, $R < 10^3$ のとき $N = 31, R \geq 10^3$ のとき $N = 63$ とした。切断波数を $N = 159$ に変えてスポットチェックを行い, 計算精度を確かめた。方程式の非線形項の評価は変換法を用い, 経度方向の格子点数 I と緯度方向の格子点数 J を $I \geq 3N + 1, J > 3N/2$ としエイリアジング誤差を除いた。時間積分は4次のルンゲ=クッタ法を用い, 時間の差分間隔は $\delta t = 0.05$ とした。初期条件は不安定定常解に元の解の0.1%のエネルギーをもつ微小擾乱を一様乱数によって生成し, 不安定定常解に加えた流れ関数を初期条件とした。微小擾乱は3種類用意した。例えば $R = 6000$ の場合, 不安定定常解の数は自明解を含めて11個である。よって33種類の異なる初期条件を用いて数値シミュレーションを行った。得られた結果は初期条件に依存しないことを確認した。時間積分は $t = 5 \times 10^5$ まで続け, 時間平均量は区間 $T \in [5 \times 10^4, 5 \times 10^5]$ で求めた。

Fig.3 に $R = 500, 600, 6000$ における非定常解のエンストロフィーのパワースペクトルを示す。 $R = 500$ のときパワースペクトルは非整数倍の異なる振動数があることから, 非定常解は準周期的である。しかし, $R \geq 600$ でパワースペクトルはブロードになり, 流れはカオス的になる。 Fig.4 に $R = 6000$ におけるカオス的な解の流れ関数のスナップショットを示す。 Fig.4 の (a,b,c) はそれぞれ2の TW3-S, TW5-N, TW2-N に似ている。カオス的な解の流れ関数は不安定定常解に似たプロファイルとなることがあり, カオス的な解は不安定定常解のまわりを経巡るように見える。

不安定定常解と非定常解の関係を調べるために, 不安定定常解の線形結合を用いて非定常解を近似することを試みる。ここで, 不安定定常解の線形結合は

$$\hat{\psi}(\lambda, \mu, t) = \sum_{i=1}^K \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} c_i(\theta, t) \psi_i(\lambda - \theta, \mu) + d_T(t) \psi_T(\mu), \quad (3)$$

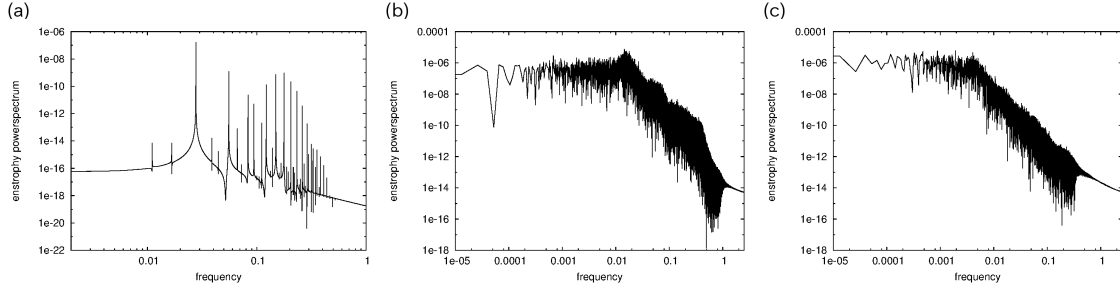


Fig.3 Power spectrum of the enstrophy; (a) $R = 500$, (b) $R = 600$ and (c) $R = 6000$. The horizontal and vertical axes indicate the frequency and the magnitude of the spectral components, respectively.

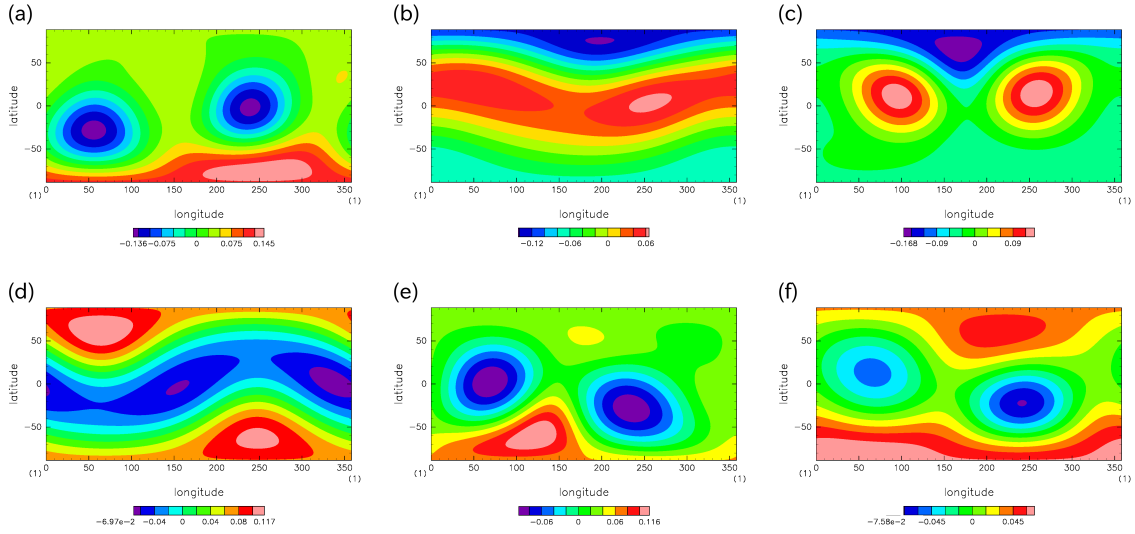


Fig.4 Snapshots of the streamfunction of the chaotic orbit $R = 6000$: (a) $t = 25940$, (b) $t = 26540$, (c) $t = 27100$, (d) $t = 27700$, (e) $t = 28340$ and (f) $t = 29050$. The horizontal and vertical axes indicate the longitude and the latitude, respectively.

と表される．但し, $\psi_i(\lambda, \mu)$, $\psi_T(\mu)$ はそれぞれ不安定定常進行波と自明解の流れ関数を表し, $c_i(\theta, t)$, $d_T(t)$ は線形結合の係数である．不安定定常進行波は経度方向の並進対称性をもつため, 経度方向に畳み込み積分を実行する． K は自明解から分岐する不安定定常進行波の個数であり, $500 \leq R < 2687$ のとき $K = 8$, $R > 2687$ のとき $K = 10$ である．いま, 非定常解の流れ関数 $\psi(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=0}^N \psi^m(\mu, t)e^{im\lambda}$ が, 不安定定常解の張る線形空間の元であると仮定する．このとき, $\hat{\psi}$ に ψ を代入し, 未知の係数 $c_i(\theta, t)$, $d_T(t)$ を求めることを考える．まず, 経度方向の畳み込み積分をフーリエ展開を用いて分解すると, 各経度方向波数の係数に関する代数方程式

$$\psi^0(\mu, t) = \sum_{i=1}^K c_i^0(t)\psi_i^0(\mu) + d_T(t)\psi_T(\mu), \quad (4)$$

$$\psi^m(\mu, t) = \sum_{i=1}^K c_i^m(t)\psi_i^m(\mu) \quad (m \neq 0), \quad (5)$$

を得る．ここで, $\psi_i(\lambda, \mu)$, $c_i(\theta, t)$ をそれぞれ $\psi_i(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=0}^N \psi_i^m(\mu, t)e^{im\lambda}$, $c_i(\theta, t) = \sum_{m=0}^N c_i^m(t)e^{im\theta}$ とした．未知数 $c_i^m(t)$, $d_T(t)$ は経度方向に分解された不安定定常解の双対基底によって求める．式 (4) は基底 $\{\psi_i^0(\mu), \psi_T(\mu)\}$ ($i = 1, \dots, K$) によって張られる線形空間の元を表し, 対応する双対基底 $\{\psi_i^{0\dagger}(\mu), \psi_T^\dagger(\mu)\}$ ($i = 1, \dots, K$) を用いて係数は

$$c_i^0(t) = \left(\psi_i^{0\dagger}(\mu), \psi^0(\mu, t) \right) \quad (i = 1, \dots, K), \quad d_T(t) = \left(\psi_T^\dagger(\mu), \psi^0(\mu, t) \right), \quad (6)$$

と得ることができる. ここで $(A(\mu), B(\mu)) = \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} A^*(\mu) B(\mu)$ である. 但し * は複素共役を表す. 同様に式 (5) についても, 基底 $\{\psi_i^m(\mu)\} (i = 1, \dots, K)$ に対する双対基底 $\{\psi_i^{m\dagger}(\mu)\} (i = 1, \dots, K)$ を用いて

$$c_i^m(t) = \left(\psi_i^{m\dagger}(\mu), \psi^m(\mu, t) \right) \quad (i = 1, \dots, K), \quad (7)$$

と得られる. 式 (6),(7) によって得た各経度方向波数の係数を式 (3) に代入することで, 非定常解 $\psi(\lambda, \mu, t)$ を不安定定常解の線形結合によって近似した流れ関数 $\hat{\psi}(\lambda, \mu, t)$ を求めることができる. 双対基底を用いて各係数を求めることは, $\psi^0(\mu, t)$ ($\psi^m(\mu, t), m \neq 0$) から $\text{Span}\{\psi_i^0(\mu), \psi_T(\mu)\}$ ($\text{Span}\{\psi_i^m(\mu)\} (i = 1, \dots, K, m \neq 0)$) 上に垂線を下ろした点を各基底によって表現することを意味する. つまり上記の係数の計算方法は, 不安定定常解の張る線形空間の元 $\hat{\psi}(\lambda, \mu, t)$ のうち $\psi(\lambda, \mu, t)$ と最も近くなるように係数を求める. 双対基底は Schmidt の直交化法を用いて求めた [9].

Fig.5 は上記の手順によって得た, Fig.4 と同時刻の流れ関数 $\hat{\psi}(\lambda, \mu, t)$ である. 線形結合 $\hat{\psi}(\lambda, \mu, t)$ は非定常解 $\psi(\lambda, \mu, t)$ をよく近似しており相対誤差の時間平均

$$\int_{\text{T}} \frac{dt}{\text{T}} \frac{\|\psi(\lambda, \mu, t) - \hat{\psi}(\lambda, \mu, t)\|}{\|\psi(\lambda, \mu, t)\|}, \quad (8)$$

は約 0.014 であった. 但し $\|\cdot\|$ は L2 ノルムである.

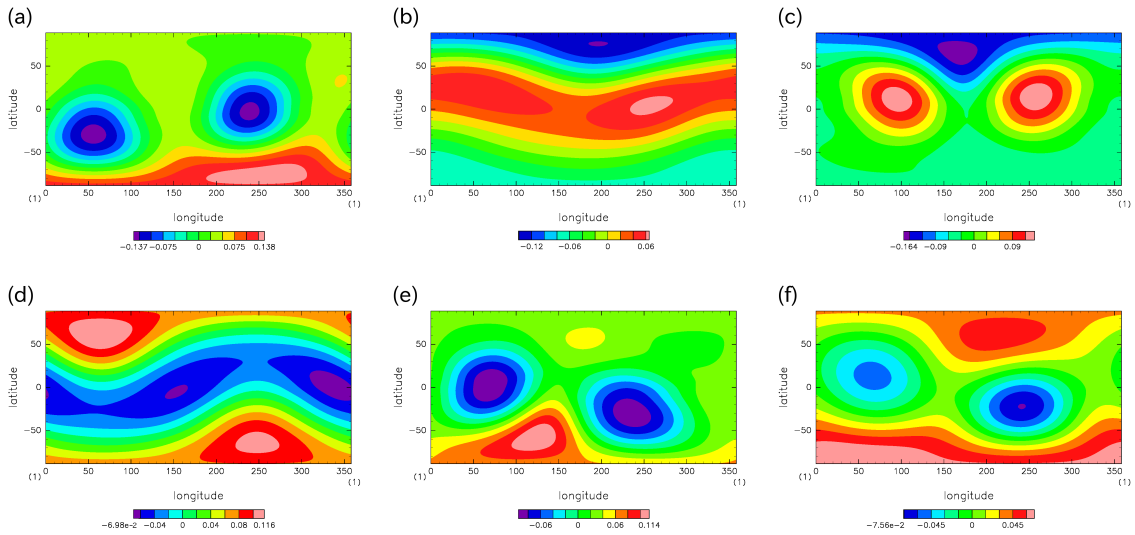


Fig.5 Snapshots of the streamfunction given by the linear combination of the unstable steady solutions $R = 6000$. The axes and the times are same as Fig.4.

さらに異なる Reynolds 数で $\hat{\psi}(\lambda, \mu, t)$ を求め, 相対誤差の Reynolds 数依存性を調べた. Fig.6 に相対誤差の Reynolds 数に対する依存性を示す. Reynolds 数が増加するとカオス的な非定常解の相対誤差は減少する. 特に $R \geq 5000$ ので相対誤差は変化せず, 高 Reynolds 数でカオスアトラクタの性質が変化していないことを示唆する. これらの結果は, 高 Reynolds 数におけるカオス軌道が低 Reynolds 数で分岐した定常解の張る線形空間の中にほとんど存在することを意味する. さらに Reynolds 数が増加するにつれカオス軌道は定常解の張る線形空間に集まることを示唆する. なお, $200 \leq R \leq 500$ のとき非定常解は定常解に似たプロファイルの周期的/準周期的な解であり, 相対誤差は 2% 未満であったことを追記しておく.

4 まとめ

本研究は球面上の 2 次元 Navier-Stokes 流における高 Reynolds 数での非定常解と不安定定常解の関係を調べた. 非定常解はカオス的で, 流れ場は自明解の分岐ダイアグラムから得た不安定定常解に似たプロファイルとなることがあるため, カオス軌道は不安定定常解を経巡るように見える. カオス軌道と不安定定常解の関係

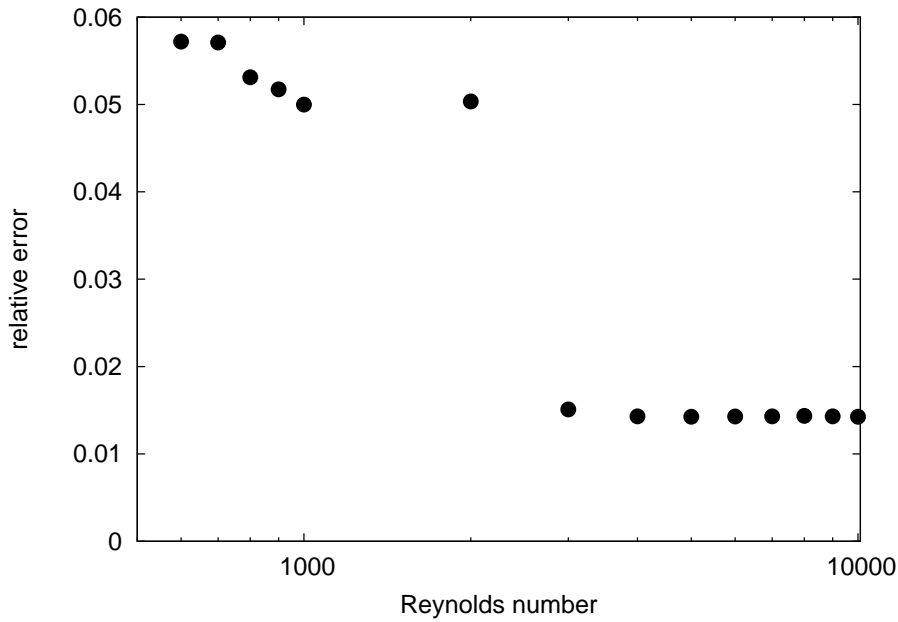


Fig.6 Relative error of the linear combination. The horizontal and vertical axes indicate the Reynolds number and the relative error, respectively.

を調べるために、不安定定常解を用いてカオス軌道を近似することを試みた。不安定定常解の流れ関数の線形結合によってカオス軌道の流れ関数をよく近似できること、Reynolds 数が増加すると相対誤差が減少することを見出した。これらの結果は高 Reynolds 数におけるカオス軌道が不安定定常解の張る線形空間の中にほとんど存在することを意味し、Reynolds 数が増加するにつれカオス軌道がこの線形空間の中に集まることを示唆する。また、カオス軌道の速度場、渦度場を不安定定常解の線形結合によって表したところ、流れ関数の微分階数が増加すると相対誤差が増加する。このことは、流れの細かな構造に対し不安定定常解の線形結合の近似はうまくいかないことを意味する。2次元乱流では、エネルギーは大きなスケールに輸送され、流れ場にはコヒーレントな渦が形成される。この結果、コンパクト領域の流れ場では領域を覆う大きな渦が形成されるが、本稿で扱った不安定定常解の線形結合はこの大きな渦の構造をよく近似している。同様の大きな渦構造は2次元トーラス上の2次元流においても見出されており [2]、流れの構造の類似から、不安定解を用いた乱流場の近似が同様に有効であることが期待される。このような近似の有効性は、乱流アトラクターが不安定解の張る低次元空間に概ね含まれていることを示唆している。さらに我々は回転球面の場合でも定常解を用いて非定常解の流れ場の近似を試みたが、流れ場を再現することはできなかった。このことは乱流のアトラクターと不安定解の関係性を空間次元だけで論じることは難しく、力学構造に起因する差異も重要であると考えられる。なお、線形結合における各不安定解の寄与 $\|\int \frac{d\theta}{2\pi} c_i(\theta) \psi_i(\lambda - \theta, \mu)\| / \|\hat{\psi}\|$, $\|d_T \psi_T(\mu)\| / \|\hat{\psi}\|$ と相対誤差やエンストロフィー散逸率に相関は見出せなかった。

参考文献

- [1] BAINES, P. G., 1976 The stability of planetary waves on a sphere. *J. Fluid Mech.*, **73-2**, 193–213.
- [2] KIM, S. C. & OKAMOTO, H., 2010 Stationary vortices of large scale appearing in 2D Navier-Stokes equations at large Reynolds numbers. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **27**, 47–71.
- [3] KUO, H., 1949 Dynamics instability of two-dimensional nondivergent flow in a barotropic atmosphere. *J. Meteo.* **6**, 105–122.
- [4] MCWILLIAMS, J. C., 1984 The emergence of insulated coherent vortices in turbulent flow, *J. Fluid Mech.*, **146**, 21–43.

- [5] OBUSE, K., TAKEHIRO, S. & YAMADA, M., 2010 Long-time asymptotic states of forced two-dimensional barotropic incompressible flows on a rotating sphere. *Phys. Fluid*, **22**, 056601.
- [6] RHINES, P. B., 1975 Waves and turbulence on a beta-plane *J. Fluid Mech.* , **69**, 417–443.
- [7] SASAKI, E. TAKEHIRO, S. & YAMADA, M., 2012 A note on the stability of inviscid zonal jet flows on a rotating sphere. *J. Fluid Mech.*, **710**, 154–165.
- [8] SASAKI, E. TAKEHIRO, S. & YAMADA, M., 2013 Linear stability of viscous zonal jet flows on a rotating sphere. *J. Phys. Soc. Japan*, **82**, 094402.
- [9] SASAKI, E. TAKEHIRO, S. & YAMADA, M., 2014 Bifurcation structure of two-dimensional viscous zonal jet flows on a rotating sphere. , in preparation.
- [10] SILBERMAN, I., 1953 Planetary waves in the atmosphere, *J. Meteo.*, **11**, 27–34.