cere, quae ante pedes sunt non videre. Saepe tamen non combinatione simplici, sed experimento opus est, ut aliquid egregium eruatur, quo casu manifestum est, fortunam venire in partem juris, tantum enim quisque invenisse videbitur, quantum praejudicare potuit ante tentamentum: et hujus generis inventa fuere quorundam Alchymistarum qui saepe frivolis admodum rationibus ducuntur et destituti non ideo absistunt, quod si aliquando in nonnullis quae ipsi non quaerebant eventus respondeat conjecturae, tum illi vero mirifice triumphant et prudentiam venditant suam, cum misericordiam potius naturae parentis laudare deberent, quae tam assiduos sui cultores noluit esse perpetuo infelices.

Sed illi prae caeteris apti ad indagationem veritatis, pariter et inventa vitae utilia in lucem producenda, qui combinatorio ingenio studium acre Geometriae et profundae meditationis aut etiam si materia postulet experiundi patientiam junxere. Nam si paucae quaedam ac faciles paratu combinationes tot praeclara nobis inventa dedere, dubitari non debet, majora erutum iri, cum interiores rerum latebrae excutientur. Medicam certe artem nemo speret nisi ab ingenio utrumque complexo valde augeri posse: subtilior est causarum implicatio, quam ut levi inspectu detegi possit, et nisi in natura rerum, geometrarum exemplo theoremata condantur, et morosa diligentia consequentiae in longinquum producantur, semper in cortice haerebimus. Unitemur summos viros, Pythagoram, Democritum, Hippocratem, Aristotelem, Archimedem, Galilaeum, Cartesium, Pascalium, quibus habet quos addat tempus praesens. Geometriam exemplo Conditoris in ipsa natura exerceamus, consideremus quantum illa Copernico profuerit et Keplero, quantum a Scheinero et Cartesio incrementi acceperit optica, quid mechanici Stevino debeant et Galilaeo, quam ipsis medicis Sanctorius praeluxerit Cochleae cylindriceae sive ut vulgo vocant fine carentis utique fortissimae potentiarum usus uniformitate ejus nititur, qua fit, ut sibi per omnia congruat; alioqui enim nec moveri posset cochlea, nisi linea ejus in suis ipsa vestigiis labi posset, quod praeter ipsam soli linearum rectae ac circulari datum est. Hoc vero consideratio utique geometrica erat. Pulcherrimum antliae genus cochleiforme, in qua corpora ipso in speciem descensu attolluntur, ad Archimedem fama publica refert, quanquam memorabile sit quod de Mediolanensi quodam cive refert Cardanus, qui prae nimio gaudio in delirium incidit, quod primum a se inventam putaret. Speculorum urentium miracula

etsi fama inferiora, magna tamen nec nisi geometriae operatricis effecta sunt. Graphicen qui imaginationi potius felici quam geometriae tribuit, videat quantum inter nostratum et Chinensium delineationes intersit. Chinensibus natura favens colores admirandos suppeditat, quorum gratiam facile nostri arte vincunt: arte, inquam, filia geometriae. Graeci non ante artes coluere, quam geometriam, et Arabes tum maxime in his studiis excelluere, cum potentia Asiam atque Africam complexi sine aemulis floruere; et non ante barbaries desiit in occidente, quam redux ab exilio Geometria, etiam architecturam et pictoriam et statuariam adduxit. Astronomia autem quid nisi sphaericae doctrinae translatio est ad mundum, et planetariae hypotheses geometrica ratiocinia sunt, quo motus astrorum calculo subjicerentur; quod vero trigonometria mirabilius, cujus . . . . nemo indoctus, utcunque summo ingenio praeditus intelligat. Quis enim credat, campum mensurari posse ex duabus stationibus dati intervalli, aut quis Indis persuasisset, Columbum ex Ephemeridibus potius quam coelesti instinctu eclipsin praedixisse? Certum est, solam fuisse geometriam astronomiae habitu indutam, quae Christianis aditum aperuit in Sinas, et si Martinio credimus, nihil magis affecerat ingeniosos quosdam Mandarinos, quam inviolabilis certitudo geometricorum quorundam theorematum, quae apud Societatis Jesu patres didicerant. Quid navigatoriam scientiam et velificatoriam artem memorem, perpetuum exercitium geometriae cujusdam nonscriptae? Limenereutica longius fortasse provecta esset, quam quidam sperant, si praesidiis geometriae quantum licet uteremur. Hoc enim unius geometriae officium est, quae ex datis duci possint docere: cum ostendat quaenam problemata determinata sint, et ex ipsis indeterminatis aliquid eliciat certum, locum scilicet cujus omnia puncta satisfaciant, quo fit, ut datis binis solutionibus aut aliquando pluribus imperfectis inter se diversis, una perfecta inveniatur. Quanti hoc sit, sciunt talium intelligentes. Mihi certe semper ita visum est, notum jam et Veteribus artificium de Locis inter humanae subtilitatis specimina censeri debere. Quid pulchrius aut utilius hydrostatica Archimedis, quam Torricellius et Pascalius geometrae tantis accessionibus auxere. Circa pneumaticen autem egregius Gerickius nostras antliae aëreae autor primus, et qui fertilis ingenii felicitate nulli facile cesserit, celeberrimus Boylius, saepe ratiocinia vere geometrica et irrefragabiles demonstrationes dedere. Quod ipsi nobis supra objeceramus, telescopium hominis plebeji mathematica indocti opus esse, non aeque certum est ac quidam putant. Certe Metius ille quem Cartesius memorat, in re optica speculisque ac lentibus conficiendis erat diu versatus, ut credibile sit, radiorum naturam et opticas demonstrationes intellexisse, mathematicis enim non inepti sunt etiam aliarum literarum imperiti. Sed aliud habeo quod de hoc negotio dicam, vel ideo memorabile quod a paucis video adverti. Keplerus in Epistola ad Galilaeum, qua Nuntio Sidereo respondet, haec narrat, Rudolphum Imperatorem, qui ut constat his studiis mire delectabatur, jam dudum antequam de telescopio quicquam auditum esset, ostendisse sibi descriptionem machinae duobus vitris instructae, inter Portae collectanea repertam, obscuriuscule traditam; hanc se obiter considerasse, ait Keplerus, et familiari eruditis fastidio, quoties aliena et suspecta inventa offeruntur, statim rejecisse: nunc vero poenas dare temeritatis et judicii praecipitati. Quae cum ita sint, credibile est, telescopii ideam esse foetum optici rationalis, sed cujus conatibus, ut solet, fortuna non respondit: unde cum aliis forte communicasset laborem, ex quo nihil amplius speraret, quid vetat consilii rationem aeque in primi executoris ac Portae manus venisse. Certe Porta jam a decimo octavo aetatis anno se devoverat conquisitioni arcanorum, omni librorum genere lustrato, itineribusque susceptis. Porro microscopium, quantum intelligere potui, inventum est summi artificis Cornelii Drebelii Alcmarensis. Satis ergo vindicasse videbor industriam geometrarum, ubi unum chronometron adjecero. Mirum est, omnium hominum oculos ad Galilaeum usque adeo fuisse ἀγεωμετρήτους, ut de isochronismo oscillationum penduli, quo nihil frequentius oculis observatur, nemo somniaret. Galilaeum autem non conjectura quadam levi inductum, sed rationali via progressum mirabile usque adeo arcanum produxisse, patet ex illa quam tenuit inquirendi ratione. Scilicet a motu uniformi et uniformiter accelerato orsus arcana descensus gravium aperuit primus; quae cum plano inclinato applicuisset, ingeniosissime pervenit ad praeclarum illud theorema, quod chordis quotcunque intra circulum ductis ad idem punctum in imo concurrentibus, descensus a circumferentia circuli ad punctum imum per chordam quamlibet minorem majoremve sit isochronus. Unde sequebatur, cum oscillationes pendulorum exiguae essent, circuli autem quos describerent magni, descensum in chorda a descensu in ipsa circumferentia sensibiliter non differre. Huc usque rem produxit Galilaeus, duoque posteritati

absolvenda reliquit, applicationem penduli ad horologium, quo numerandi abesset labor, et inventionem lineae curvae, cujus evolutione alia rursus curva describeretur a pendulo, quae chordarum circuli proprietatem haberet, id enim arcus circuli praestare non poterat, unde repetitae diu vibrationes pendulorum haud dubie erroneae fiebant. Porro alterum praestare combinatorii, alterum geometrici ingenii erat, utrumque immortali opere Hugenius pulcherrime absolvit.

Satis experientià praeteritorum confirmasse videor usum in vita geometriae profundioris; nunc paucis addam superesse illi etiamnum, quod agere possit, ne quis sibi persuadeat trigonometriam aut sinuum canonem ad egregia praestanda sufficere. Sane non est dubium, elateres et sonos et ipsam musicen geometricis legibus subjici, et artem projiciendi perfici posse, et tempus venturum quo ignis ipse jugum subibit, quod caetera elementa jam patiuntur. Multa restant dicenda de motu liquidorum, quae geometram expectant, sed et in solidis detrimenta, quae machinae a frictione patiuntur, aliaque quae vulgo experientiae committuntur, aestimationem ferunt, quae ubi absoluta erunt, perfectum de machinarum vi judicium in nostra potestate erit: nunc enim illud saltem possumus, ne nimium promittamus, tunc licebit machinas calculo subjicere ad instar numerorum, ubi primum experimenta quaedam fundamentalia diligenter capta erunt. Porro observavi, problemata pleraque mechanicae subtilioris, ubi ad geometriam puram reducta sunt resolvi in quadraturas et certorum quorundam spatiorum curvilineorum dimensionem. Unde necessitas quaedam nobis imposita est hanc geometriae partem imprimis perficiendi, vel ideo quod nondum in calculi potestate est, nec ex Cartesii inventis pendet.

Duplex est geometriae utilitas, nam una ad augendas vitae commoditates pertinet, altera in ipsa mentis perfectione consistit. De priore tantum diximus hactenus: quam quivis capit, posteriorem non nisi intelligentes aestimabunt. Illam geometrae omnibus communicant, hanc servant sibi, ut scilicet sit aliquod illis pretium operae, etiamsi nemo gratiam haberet. Nemo dubitare potest, potissimum unicuique esse mentem ejus; qui vero profundius ista contemplantur, etiam illud ajunt quod nos ipsos esse dicimus, id mentem esse. Perfectio ergo nostra potissima eadem est cum perfectione mentis, praesertim cum mens perpetua sit, corpus visibile dissolvatur. Perfectio mentis vera et solida consistit in inveniendi atque judicandi facultate maxime aucta. Utramque puram et in se reductam pulcherrimis speciminibus perficit geometria. Nam et si quid inveniendum sit, ostendit quantum sit in potestate, quave sit eundum via, et ubi de demonstratione ac judicio agitur, severissimae ratiocinationis exempla praebet. Geometria una omnium formas illas medias et in caduca licet materia aeternas ac per se subsistentes contemplatur, quarum ideae menti nostrae velut insitae perire non possunt, etsi omnis scientia historiarum et experimentorum extingueretur. Potest enim in eum mens nostra venire statum, ut experimenta sumere non possit, aut eorum nullam habeat rationem quae in hac vita sumsit, sed ut extensionis et motus aliarumque formarum separatarum ideas exuat, fieri nullo potest modo. Itaque inventum de circulo ad omnem mentis statum pertinet; contra experimenta naturae corpori ac sensibus illigatam supponunt animam, certumque est, neque colores neque sonos nisi cum relatione ad sentientis organa intelligi posse, et aliis alia apparere. Ex quibus facile intelligi potest, ad perfectionem mentis perpetuam non conferre quae memoriam nostram locupletant, sed quae cogitandi facultatem cogitant. Quod mirifice facit geometria. Ea vero ratio est, ni fallor, cur Veteres tanti putaverint sejunctas a materia formas contemplari, et cur prope indignum facinus duxerint, res divinas in mortales usus prostitui. Nam Pythagoras et Socrates persuasi erant de immortalitate animi, de insitis ideis incorruptibilibus, unde Platonem Archytae pene indignatum ajunt, quod geometriam in machinis exerceret, et Archimedem referunt non nisi aegre Hieronis precibus ad ea quae in communi usu versantur descendisse. Ego qui motus ideam inter formas illas aeternas censeo (nam et circa motum non minus quam circa figuram demonstrationes habemus) machinae elegantis inventionem inter pulchra theoremata numerari posse puto, nec video cur minus memorabilis sit generatio parabolae per motum projectorum, quam per coni planique sectionem: et naturae indagationem (quae in perpetua geometriae applicatione consistit) ad perpetuam quoque mentis perfectionem pertinere arbitror, nam quoties divina illa artificia penitus intelligimus, quibus admirandos quosdam effectus praestitit autor rerum, non tantum admiratione ejus percellimur et amore inflammamur quod ad voluntatem regendam pertinet, sed et artem inveniendi discimus a summo praeceptore, intellectusque nostri facultatem augemus. Illud enim pro certo habendum est, naturam

rerum simplicissimas problematum constructiones semper elegisse. Physica ergo, quatenus perficere mentem potest, desinit in geometriam, nec ante ullum phaenomenon penitus in corporibus intelligimus, quam ex primis figurae motusque ideis derivavimus. Haec non tantum a maximis viris, Galilaeo et Cartesio, ne Democritum et Aristotelem memorem, inculcata sunt, sed et agnita illustri viro Francisco Bacono, cui illud tamen concedo, physicam experimentis solis comprehensam, utcunque mentem non afficiat, tamen et sensus recreare et plurimum ad vitae commoditates posse, et quemadmodum contemplationes ad amorem Dei referuntur, ita experimenta utilia caritatis illius quam homo homini debet instrumenta esse. Certe medicinam plane rationalem reddere, non nostri certe, forte nullius seculi felicitas erit; ego semper semi-empiricam fore credo, in tanta causarum complicatione, quas etsi intelligeremus fortasse, non possemus calculo subjicere ob nimiam prolixitatem, tametsi illud pro certo habeam, ab hominibus sagacibus et severe atque ordine et ut ita dicam geometrice ratiocinantibus, et experimenta non casu sed consilio sumentibus, plus effici posse uno decennio, quam multorum decursu seculorum actum sit.

Ut hanc ergo concludam tractationis nostrae partem, magni usus Geometriam esse arbitror, non tantum ob ingentia beneficia, quae inde accepit aut expectat humana vita, sed et quod animum ad altiora et divina et a materia sejuncta elevat et accuratis rationibus assuefacit. Credo esse homines qui nunquam quicquam in vita certo et accurate sibi persuasere praeter sensibilia, defectu geometriae, quod vel ideo periculosum, quoniam unicuique et autor rerum Deus, et natura animae et officia virtutum, non impulsu quodam fortuito aut consuetudine, sed firmis rationibus explorata esse deberent, quales in rerum natura esse, illi qui geometriam nunquam salutavere, ne capiunt quidem. Etiam qui mathematicas artes vulgari modo discunt, usus tantum causa, illi fere pulcherrima geometrarum theoremata casu et experimentis reperta arbitrantur, sed et magnae certe eruditionis vir Josephus Scaliger sibi persuasit ab Archimede quadraturam parabolae tentando repertam. Qui sic animati sunt, geometriam non alia probatione indigere putant, quam perpetuo successu, demonstrationibus vero nec si exhibeas afficiuntur. Qui mentis habitus metaphysicis sive divinis contemplationibus ineptus est, quibus tamen, ex Veterum quoque sententia, vera et duratura continetur perfectio animae, ad quam paulatim elevat geometria. Nam filum labyrintho de compositione continui deque maximo et minimo ac indesignabili atque infinito non nisi geometria praebere potest, ad metaphysicam vero solidam nemo veniet, nisi qui illac transiverit. Cum ergo ratio dictet, ut quisque naturae suae perfectionem curet, quantum in ejus potestate est, perfectio autem nostra sit inprimis perfectio ejus quod in nobis potissimum est, id est mentis, mentis autem vim ac judicandi atque inveniendi potestatem egregie augeat geometria, consequens est homini cui vitae ratio meditationem permittit, geometriae interioris rationem habendam; at in ea non magis quam in dialectica quiescendum esse, cum ipsa media scientiarum hinc ad divina et sublimia aditum faciat, illinc ad humanas artes et compendia vitae jucundo admodum suavique descensu mentem demittat.

VI.

MEDITATIO NOVA DE NATURA ANGULI CONTACTUS ET OSCULI, HORUMQUE USU IN PRACTICA MATHESI AD FIGURAS FACILIORES SUCCEDANEAS DIFFICILIORIBUS SUBSTITUENDAS.

In lineae cujusque partibus infinite exiguis considerari potest non tantum directio sive declivitas aut inclinatio, ut hactenus factum est, sed et mutatio directionis sive flexura, et quemadmodum linearum directionem mensi sunt Geometrae simplicissima linea in eodem puncto eandem directionem habente, hoc est recta tangente, ita ego flexuram lineae metior simplicissima linea in eodem puncto non tantum directionem eandem sed et eandem flexuram habente, hoc est circulo curvam propositam non tantum tangente, sed et quod amplius est osculante, quod mox explicabo. Est autem ut recta linea aptissima ad determinandam directionem, quia eadem ubique ejus directio est, ita circulus aptissimus ad determinandam flexuram, quia ubique eadem unius circuli est flexura. Circulus

autem ille lineam propositam ejusdem plani in puncto proposito osculari a me dicitur, qui minimum cum ea facit angulum contactus. Ex infinitis enim circulis lineam, ubi ad easdem partes cava est, tangentibus in proposito puncto semper determinari potest unus, qui maxime ibi lineae assimilatur et cum ea longissime quasi repit, hoc est, ut Geometrice loquar, ita ad eam accedit, ut inter ipsum et curvam propositam nullus alius arcus circuli curvae in puncto proposito occurrens describi possit. Et hunc minimum angulum contactus circuli ad lineam propositam voco angulum osculi, uti miminus angulus rectae ad lineam vocatur angulus contactus. Ut enim inter rectam et lineam, angulum contactus facientes, nulla cadere potest recta, ita inter circulum et lineam, angulum osculi facientes, nullus cadere potest arcus circuli. Ut autem habeatur et modus inveniendi circulum osculantem, sciendum est, quemadmodum tangentes inveniuntur per aequationes quae habent duas radices aequales seu duos occursus coincidentes, et flexus contrarii per tres radices aequales, ita circuli vel aliae quaevis lineae datam osculantes inveniuntur per quatuor radices aequales seu per duos contactus in unum coincidentes. Et quemadmodum duae lineae, quae eandem habent rectam tangentem, se tangunt, ita eae, quas idem osculatur circulus, se osculantur. Itaque ut linea quaevis eundem ad lineam sibi occurrentem censetur facere angulum communem seu rectilineum, quem faciunt in puncto occursus earum tangentes rectae, quia differentia consistit in angulo contactus qui respectu anguli rectilinei est infinite exiguus, imo nullus; ita quando duae rectae tangentes duarum linearum curvarum sibi occurrentium coincidunt, seu quando duae lineae se tangunt, tunc linea ad lineam occurrentem eundum censetur facere angulum contactus, quem faciunt in puncto occursus earum osculantes circuli, quia differentia consistit in angulo osculi qui respectu anguli contactus duorum circulorum est infinite parvus, imo nullus. Ex quo intelligi potest, angulum communem seu duarum rectarum, angulum contactus duorum circulorum, et angulum osculi (primi gradus) quodammodo se habere, ut corpus, superficiem et lineam. Non tantum enim linea est minor quavis superficie, sed et ne quidem pars est superficiei, sed tantummodo minimum quoddam sive extremum. Quodsi tres contactus coincidant, aut quatuor, aut plures (radicibus sex aut octo aut pluribus existentibus), oriuntur osculationes secundi tertiive gradus, aut adhuc altiores, in tantum perfectiores osculo primi gradus, in quantum prima osculatio perfectiorem contactum continet quam contactus communis. Porro circulus rectam tangere potest, osculari non potest; si circulus circulum osculetur, non erunt diversi, sed coincident. De caetero omnem lineam ejusdem plani osculari poterit circulus, et in genere, ut sciri possit, quonam contactus vel osculi gradu linea lineae conjungi possit, considerandum est, in quot punctis possit eam secare. Haec porro insignem habent usum in praxi. Ut enim ex consideratione, quod idem sit angulus, eadem inclinatio, vel directio linearum, quae est rectarum tangentium, insignes consequentiae in mechanicis, catoptricis et dioptricis ductae sunt; nam si corpus motu composito feratur, directio ejus est in recta tangente lineae, quam describit, et si sibi relinquatur, continuat motum in tangente, et radius incidens eundem angulum facit ad superficiem excipientem, quem faceret ad planum eam tangens: ita ex consideratione quoque linearum osculantium insignes praxes duci possunt. Si enim linea aut figura egregiam quandam atque utilem habens proprietatem inventa sit, sed quam sive torno sive alia ratione in materiam introducere sit difficile, licebit pro arcu ejus (scilicet non nimis magno, tamen ad praxin suffecturo) substituere arcum quasi coincidentem lineae alterius descriptu facilioris, eam quam perfectissime licet tangentis sive osculantis, maxime autem circuli, qui omnium descriptu est facillimus. Et hinc jam oritur, quod in praxi catoptrica et dioptrica circulus est succedaneum parabolae, hyperbolae aut ellipseos, suosque ad earum imitationem habet quasi focos. Nam circulus cujus diameter aequatur parametro sectionis conicae, et cujus centrum in axe intra curvam sumitur, circumferentia autem per verticem transit, sectionem conicam in vertice osculatur, adeoque assumpto arcu quantum satis est parvo, ab ea non differt ad sensum. Quae causa est, cur focus speculi concavi circularis absit a speculo quarta parte diametri, quia focus parabolae a vertice abest quarta parte parametri, et focus parabolae atque circuli osculantis coincidunt. Eadem in omni alio linearum et utilium proprietatum genere pro re nata locum habent. Quae quantum conferant ad subtilitates Geometricas in usum vitae transferendas, nemo talium intelligens non videt. Nobis vero aditum aperuisse, ne forte periret haec meditatio, nunc quidem satis fuit. Nec injucundum erit considerare, quomodo ita tandem controversia Geometrarum de angulo contactus, quae plerisque inanis visa est, in veritates desierit solidas et profuturas.

VII.

DE LINEIS OPTICIS, ET ALIA.

Versanti mihi dudum in longinquo satis itinere, quod Serenissimi Principis mei jussu suscepi, et passim monumenta in Archiviis et Bibliothecis excutienti, oblati sunt ab amico quodam Actorum Lipsiensium menses, unde jamdiu novorum librorum expers discerem, quid in Republica Literaria ageretur. Inspicienti igitur Junium anni 1688 occurrit relatio de Principiis Naturae Mathematicis Viri Clarissimi Isaaci Newtoni, quam licet a praesentibus meis cogitationibus longe remotam avide et magna cum delectatione legi. Est enim vir ille ex paucorum illorum numero, qui scientiarum pomoeria protulere, quod vel solae illae series docere possunt, quas Nicolaus Mercator Holsatus per divisionem erat assecutus, sed Newtonus longe ampliore invento extractionibus radicum purarum pariter et affectarum accommodavit. A me, ut obiter hic dicam, methodo serierum promovendae, praeter transformationem irrationalium linearum in rationales symmetras (voco autem rationales, quarum ordinatae semper ex abscissis haberi possunt in numeris rationalibus) excogitata est ratio pro curvis transcendenter datis, ubi ne extractio quidem locum habet. Assumo enim seriem arbitrariam, eamque ex legibus problematis tractando, obtineo ejus coefficientes. Porro a praesenti opere Newtoniano praeclara quaeque expecto, et ex relatione Actorum video, cum multa prorsus nova magni sane momenti, tum quaedam ibi tradi, a me nonnihil tractata; nam praeter motuum coelestium causas, etiam lineas catoptricas vel dioptricas et resistentiam medii explicare aggressus est. Lineas illas Opticas Cartesius habuit, sed celavit, nec suppleverunt commentatores; neque enim res communi analysi subest. Eas postea ab Hugenio (sed qui nondum edidit) et nunc a Newtono inventas intelligo. Etiam mihi, sed per di-

versam, ut arbitror, viam innotuere. Et habebam quidem methodos
generales dudum, sed proprias perelegantes eruendi occasionem de-
dit egregium inventum Dn. Tschirnhausii nostri in Actis publicatum,
qui integras lineas tanquam focos considerat. Quid inde consecu-
tus sum, exemplo explicabo, unde reliqua intelligantur. Sit punc-
tum A (fig. 84) et linea data BB, reflectens radios AB, quaeritur
linea CC, radios ABC iterum reflectens in unum commune punctum
D. Solutio primae aggressionis haec est. Data linea BB, ejus re-
spectu constat dari puncti A confocum linearem seu lineam EE.
Rursus datis duobus confocis, uno lineari EE, altero puncto D,
constat inveniri posse aliquam lineam CC, cujus sunt foci, quae
erit quaesita. Meliores autem constructiones prodeunt, nam A_1B
$+{}_1B_1E +$ arc. ${}_1E_2E = A_2B + {}_2B_2E$ et $D_2C + {}_2C_2E +$ arc. ${}_2E_1E = D_1C$
$+{}_1C_1E$, unde tota $AB + BC + CD$ semper est aequalis uni constanti
rectae. Si filum circumligatum sit lineae EE simulque alligatum
puncto D, tunc evolutione curvae EE stylus filum intendens descri-
bet lineam CC. Sin filum idem altero extremo alligatum sit puncto
A, stylus filum intendens describet lineam BB. Sed dissimulata
curva EE, prodit constructio simplicissima talis: a data recta con-
stante (aequal. $AB+BC+CD$) detrahatur quaevis data AB, residuae
sumatur aequalis BF ita ducta, ut ad PB curvae BB vel ejus tan-
genti perpendicularem in B faciat angulum FBP ipsi ABP aequalem.
Jungatur DF, et ex puncto ipsius DF medio G normaliter educta
GC occurret ipsi BF in quaesito puncto C, et quidem patet, GC
esse lineae CC tangentem. Rotetur porro figura haec circa axem
AD, et quae in lineis diximus, etiam in superficiebus genitis locum
habebunt. Eadem et dioptricis applicari possunt. Lineam EE voco
A c a m p t o n, quae radios ABE sine reflexione et refractione accipit.
Dantur et A c l a s t a e, quae eosdem non refringunt et tamen re-
flectunt, et sunt illae, quae ipsius EE evolutione simplici descri-
buntur, quod primus licet alio fine consideravit Hugenius. Talis
est FF, posita CE (in producta BC) = CD. Si pro A aut D punc-
tis, aut alterutro, foci lineares darentur, aut punctum infinite ab-
esset, ubi radii fierent paralleli, eadem suo modo locum haberent.

Quae de resistentia medii peculiari scheda complexus sum,
jam pro magna parte Parisiis duodecim abhinc annis eram assecu-
tus, et illustri Academiae Regiae nonnulla ex illis communicavi.
Denique cum mihi quoque meditationes inciderint de causa physica
motuum coelestium, operae pretium duxi peculiari schediasmate

nonnullas ex illis in publicum proferre. Decreveram quidem pre-
mere, donec mihi liceret leges Geometricas diligentius conferre cum
phaenomenis novissimis Astronomorum; sed (praeterquam quod
alterius plane generis occupationibus distinguor, quae vix quicquam
tale sperare patiuntur) excitavit me Newtonianum opus, ut haec
qualiacunque extare paterer, quo magis collatione rationum excussae
emicent scintillae veritatis, et ingeniosissimi viri acumine ad-
juvemur.

VIII.

GENERALIA DE NATURA LINEARUM, ANGULOQUE CONTACTUS ET OSCULI, PROVOLUTIONIBUS, ALIISQUE COGNATIS, ET EORUM USIBUS NONNULLIS.

Cum nihil mihi sit gratius quam qualiacunque tentamina mea
Viris egregiis digna videri quae perficiantur, perplacuere quae cla-
rissimus Basileensium Professor Bernoullius de linearum osculis
nupero Martio in Actis Erud. publicavit *). Cumque animadverte-
rem cogitationes quidem nostras in summa ipsi probari, nonnulla
tamen aliter constituenda judicari, quod adeo non aegre fero, ut
quoties doceor, in lucro ponam; meum esse putavi, rem denuo
examinare paratissimo ad retractandum animo, si monitis contra-
riis doctissimi viri locum dari posse deprehendissem.

Statueram ego, c o n t a c t u m continere duas intersectiones
coincidentes, o s c u l u m continere plures contactus coinciden-
tes, et osculum quidem primi gradus esse, quando coincidunt
contactus duo seu intersectiones quatuor, osculum secundi gradus,
quando coincidunt intersectiones sex aut contactus tres etc., et
circulum osculantem sive maximum aut minimum tangentium intra
vel extra in proposito puncto circulorum (qui scilicet omnium
tangentium proxime ad curvam accedit) esse curvedinis mensuram

---

*) Leibniz bezieht sich hier auf die Abhandlung von Jac. Ber-
noulli: Additamentum ad solutionem curvae causticae Fratris Joannis
Bernoulli, una cum meditatione de Natura Evolutarum et variis oscula-
tionum generibus.

et definire quantitatem anguli contactus, ita ut angulus contactus
duarum linearum se tangentium sit idem qui circulorum ibi eas
osculantium. Et in lineis, quas circulus in pluribus punctis secare
potest, altiora etiam oscula posse oriri, cum omnes intersectiones
in unum coalescunt, atque ita aliquando in casu maximae vel mi-
nimae curvedinis seu transitus a curvedine crescente ad decres-
centem vel contra coincidere oscula duo seu contactus quatuor, in-
tersectiones octo. Observavi etiam postea centrum circuli curvam
propositam osculantis semper cadere in lineam, quae evolutione fili
propositam generare potest, et unicam (suae seriei) esse perpen-
dicularem illam, quae ex centro osculantis circuli ad lineam duci
possit, sive unicam esse *unicam*, hoc est unicam esse maximam
vel minimam ex eodem puncto ad curvam educibilem, cum ex aliis
punctis intra curvam plures et duae saltem perpendiculares, id est
in sua serie maximae vel minimae seu *duae suae seriei uni-*
cae ad curvam duci possint. Et cum constet aliam atque aliam
lineam evolutione describi, prout filum producitur longius, animad-
verteram olim (ut hoc obiter dicam) eas quas Dn. Bernoullius nuper
vocavit condescriptas esse *parallelas* inter se, ita ut una sit ab
alia ubique aequidistans (seu aequalis ubique minimi intervalli, quod
est recta minima ab una ad aliam ducenda) vel ut recta perpendi-
cularis ad unam sit alteri quoque perpendicularis, quae dudum mihi
fuit definitio parallelismi in genere sumti. Hanc nostram curvedi-
nis mensuram, usumque Evolutarum, etiam primo Evolutionum In-
ventori celeberrimo Hugenio placuisse, ex solutione catenariae lineae
animadverti. Porro cum tres intersectiones circuli et curvae coin-
cidant, notavi *flexum* oriri contrarium, id est contactum sumtum
cum intersectione, quemadmodum et coincidentes intersectiones
quinque dant contactum cum flexu contrario coalescentem seu in-
tersectionem cum osculo primi gradus, et intersectiones septem
coincidentes dant flexum contrarium cum simplici osculo seu os-
culum secundi gradus cum intersectione coalescens. Unde intelligitur,
quotcunque intersectiones coincidentes in contactus, oscula aut flexus
contrarios resolvi posse. Et quidem in contactu vero atque osculo recta
vel circulus lineam ab utraque parte tangit extrorsum vel ab utraque
parte introrsum, sed in flexu contrario unam partem tangit extror-
sum, alteram introrsum, et ita compositum non tangit, sed secat.

Causam quoque cur linea evolutione generans locus sit cen-
trorum omnium circulorum lineam propositam osculantium, ita ex-

plicare mihi videbar: Sumantur duo puncta curvae A et B, et du-
cantur rectae ad curvam perpendiculares in A et in B, earum in-
tersectio communis C dabit centrum circuli, qui radio CA descriptus
tanget curvam in A, radio vero CB descriptus tanget eam in B,
sed si coincidant A et B sive inassignabiliter distent, hoc est ubi
duae perpendiculares concurrunt, coincidunt duo contactus duoque
circuli tangentes abeunt in unum, qui curvam osculabitur; sed per
hunc ipsum concursum perpendicularium inassignabiliter differentium
inveniuntur et lineae evolutione generantes, ut ex Hugeniano de
Pendulis opere patet. Porro circulus, cujus centrum est in recta
arcui ad easdem partes cavo perpendiculariter occurrente, per
punctum occursus descriptus arcum non secat, sed tangit. Itaque
sicubi secat, necesse est ibi punctum adesse flexus contrarii, seu
non esse lineam ad easdem partes cavam. Recte autem animad-
vertit Dn. Bernoullius, intersectione simplici ad contactum simplicem
vel ad osculum seu contactum multiplicem accedente, contactum
mutari in sectionem; sed hinc manifestum est, cum circulus cur-
vam osculatur, regulariter (id est excepto flexus contrarii puncto)
coincidere quatuor intersectiones seu duos contactus, adeoque hanc
ipsam esse naturam osculi primi gradus, quandoquidem id osculum
definimus ordinaria osculatione circulorum, quae in quocunque cur-
vae puncto regulariter locum habere potest, seu circulo curvedinem
mensurante, qui scilicet proxime ad curvam accedit.

Et in universum dici potest, intersectionum circuli cum alia
linea numerum regulariter esse parem. Itaque non video, quo-
modo primi gradus osculum tribus intersectionibus explicari queat,
ita scilicet ut tale osculum trium radicum sit regulare, et tota
curva diffusum, at osculum quatuor radicum seu quatuor coales-
centium intersectionum pro secundo et singulari habeatur, nec nisi
in punctis curvae determinatis contingat. Contra enim se res ha-
bet, et quatuor intersectiones seu duo contactus osculo cuique re-
gulariter insunt, et in solo casu extremo, qui est flexus contrarii,
nascens, ut ita dicam, vel moriens osculatio tribus intersectionibus
contenta est. Unde nolui ex casu trium intersectionum peculiarem
osculi gradum facere, cum praesertim ex contactu (cujus perfectior
species osculum est) in intersectionem degeneraret. Eademque ra-
tione et in altioribus osculatio sua natura paris est numeri radi-
cum, nec nisi in flexus contrarii puncto in numerum imparem abit.
Et sane cum circulus post contactum in puncto proposito curvam

adhuc in duobus praeterea punctis secat, necesse est has intersec-
tiones promoto circuli centro continue ad dictum contactum appro-
pinquantes, tandem ambas simul contactui coalescere, nam cum
quamlibet in eum pervenire necesse sit, ideo si alterutra sola ad
contactum perveniente, circulus fiat proximus curvae seu oscularis,
sequitur ambabus intersectionibus separatim pervenientibus ad coa-
litionem cum contactu proposito, duos dari circulos diversos lineae
proximos, seu osculantes per idem ejus punctum propositum trans-
euntes, quod est impossibile, nisi scilicet linea ibi secet semet
ipsam, quo casu duarum vice fungitur, adeoque circuli illi duo re-
vera lineas duas osculantur, licet unius partes, de quo hic non
agitur. Facile etiam hinc intelligitur, si circulus post contactum
internum secare curvam rursus (utrinque) possit, tunc in casu os-
culi (ubi duae sectiones contactui coalescunt) circulum osculantem
esse extra curvam; et contra ex contactu externo mox in casu
coalescendi cum duabus reliquis sectionibus fieri osculum internum,
et ita transitum circuli, a contactu sectionem adjunctam habente ad
osculum, esse transitum in oppositam curvae partem.

Sed, et hoc notandum est, minimam curvedinem et
maximam obtusitatem esse in puncto flexus contrarii, et recte
dixit Dn. Bernoullius, circulum osculantem eo casu degenerare in
rectam; radius enim est infinitus, seu centrum cadit in lineae evo-
lutae concursum cum sua asymptoto, quoniam antequam duae pro-
ximae ad curvam perpendiculares sibi occurrentes hactenus ad pla-
gam propositam fiant sibi occurrentes ad plagam oppositam, seu
ex convergentibus divergentes, debent fieri parallelae, quo casu
earum concursus infinite abesse debet. Fieri tamen et aliunde
potest, ut lineae generatae curvedo sit minima seu maxima obtusitas,
non quidem absolute, sed in toto aliquo arcu ad easdem partes
cavo, seu in certa progressione, cum scilicet talis est natura curvae
per sui evolutionem generantis, ut evolutio continuari ultra certum
punctum, et filum generans ulterius extendi nequeat, uti contingit
cum curva evolvenda ex duabus convexitates sibi obvertentibus ac
sese tangentibus composita est. Eodem modo prodibit maxima
curvedo seu minima obtusitas, ut lineae curvedo ex crescente rur-
sus incipiat fieri decrescens, veluti si curva generanda non intra
duos arcus generantes convexitate obversa se tangentes, sed extra
earum angulum cadat. Neutro tamen modo generata linea per
continuam fili evolutionem producitur.

Haec autem ut notarem, eo facilius adductus sum, quod li-
nearum naturam in universum illustrant, mihique proferunt non
tantum ad finiendam illam celebrem de angulo contactus contro-
versiam, sed et a vaga logomachia ad usus solidos ac profuturos
transferendam, et video nuper Dn. Eisenschmid dissertationem suam
contra Dn. Lagnium defendentem ac de diametro umbrae in eclipsi
Lunae loquentem ex hypothesi terrae ovalis, adhibuisse diametrum
circuli qui ovalem osculatur seu cum ea angulum osculi (angulo-
rum contactus minimum) facit atque ita quam proxime ad illam
accedit, eo consilio, ut ex diversis proportionibus diametri umbrae
ad diametrum lunae definiatur vera figura globi terrae. Quod
quantum praestare possit, observationibus committo.

Cum haec scripsissem, venere in manus meas Acta mensis
Maji, in quibus nova quaedam Bernoulliana legi,*) et lineae illius,
cum qua rectae convergentes ad datum punctum eundem constan-
tem angulum (sed obliquum) faciunt, proprietatem elegantissimam
ibi detectam, non sine voluptate observavi, aliaque video notata,
quae generalem curvarum naturam illustrant. Plurimum igitur li-
nearum doctrinam hodie promotam habemus tum explicata flexus
natura, tum adhibitis ad earum generationem provolutioni-
bus pariter atque evolutionibus. Interiorem naturam flexus
seu curvitatis aperuisse nonnihil visus sum detecta mensura
anguli contactus, ope scilicet circuli curvam osculantis
seu maxime ad eam accedentis eundemque cum ea in puncto os-
culi flexum habentis, de quo tum antea tum etiam hoc loco
dictum est.

Quod ad provolutionem attinet, Galilaeus ut arbitror
primus de lineis per eam generatis cogitavit, et simplicissimam
ex iis cycloeidem, quam clavus rotae in plano incedentis descri-
bet in aëre, considerare coepit, de qua multa a viris doctis sunt de-
monstrata. Romerus Danus, astrorum imprimis scientia clarus,
cum in observatorio Regio Parisino versaretur, elegantes ut
audiri proprietates detexit cycloeidis altioris, cum rota scilicet sive
circulus incedit super circulo, de quo tamen nihil ad me perve-

---

*) Lineae cycloidales, evolutae, ant-evolutae, causticae, anti-cau-
sticae, peri-causticae. Earum usus et simplex relatio ad se invicem.
Spira mirabilis. Aliaque. Per Jac. Bernoulli. Act. Erudit. Lips. 1692.

nit. Newtonus nuper de cycloeidibus iisdem egregia et universa-
lia dedit.

Evolutionem curvarum generatricem primus illustravit Hu-
genius. Eam cogitationem promovit Tschirnhusius, adhibitis (ut
ego appellare soleo) coëvolutionibus, animadversoque quomodo
tales lineae coëvolutae ut foci spectari possint et radiorum quo-
que concursu generentur, considerata inprimis caustica, quae for-
matur radiis parallelis a speculo reflexis. Ego inde longius pro-
gressus sum, usumque reperi ad solvenda problemata (quorum in
gratia potissimum suscipitur speculatio) lineasque opticas in-
veniendas, quarum ope radii redderentur ad datum punctum con-
vergentes vel divergentes aut etiam inter se paralleli, quod alia
etiam ratione praestitere Newtonus in Principiis, Hugenius in libro
de Lumine. Observavi quoque eadem opera dari figuras Acamp-
tas, quae etsi opacae et politae sint, radios tamen non reflectunt,
et Aclastas, quae licet sint transparentes seu ex materia radios
refringente, vi formae tamen suae et positionis ad Solem radios
sine refractione transmittunt. His nunc observationes singulares
Bernoullius adjecit. Caeterum ab Hugenio in tractatu. de Lumine
et Tschirnhusio in Actis notatum est, causticam illam a speculo
concavo sphaerico radios solares reflectente formatam simul esse
cycloeidalem, provolutione circuli super circulo generatam. Post-
remo a me nuper proposita est nova linearum formatio
per concursum curvarum ordinatim datarum, cum an-
tea tantum radiorum seu rectarum concursus adhiberentur, cu-
jus formationis ad problemata quaedam solvenda egregium usum
comperi.

Eximia quaedam inesse videntur illis, quae de figura veli a
vento tensi Cl. Bernoullius nuper disseruit*), tametsi de tota re
(in qua non desunt scrupuli) ob molem aliorum negotiorum non
expensa pronuntiare non ausim. Ex reperta a me mensuratione
loxodromiarum per logarithmos equidem non parum practici
fructus duci potest, difficilem tamen arbitror cursus aestimationem,
quae longitudinibus definiendis sufficiat. Cum de deviatione navis
Geometrica acribia agitur, non velorum tantum, sed et navis

*) Jac. Bernoulli Curvatura veli. Act. Érudit. Lips. an. 1692
mens. Maj.

spectanda esset figura. Denique quod innuit, se fratremque in cal-
culo meo plurimum profecisse, id agnosco gratulorque non illis
magis quam mihi. Valde autem nosse velim, an ultra metas illas
sint provecti, ad quas ego perveni; id si ab ullis, certe ab ipsorum
ingenio aliquando expecto. et gaudebo plurimum si intellexero,
praesertim cum mihi vix amplius in talibus ea qua prius intentione
animi versari liceat. Caeterum a me quoque non difficulter solvi-
tur illud problema: invenire lineam, cujus arcu aequabiliter cre-
scente elementa elementorum, quae habent abscissae, sint propor-
tionalia cubis incrementorum vel elementorum quae habent ordinatae,
quod in catenaria seu funiculari succedere verissimum est. Sed
quoniam id jam a Bernoulliis est notatum, adjiciam, si pro cubis
elementorum ordinatarum adhibeantur quadrata, quaesitam lineam
fore logarithmicam; si vero ipsa simplicia ordinatarum elementa
sint proportionalia elementis elementorum seu differentiis secundis
abscissarum, inveni lineam quaesitam esse circulum ipsum.

IX.

DE NOVO USU CENTRI GRAVITATIS AD DIMENSIONES ET SPECIATIM PRO AREIS INTER CURVAS PARALLELAS DESCRIPTAS SEU RECTANGULIS CURVILINEIS, UBI ET DE PARALLELIS IN UNIVERSUM.

Pappus subindicaverat, quod Guldinus expressius ostendit,
aream motu debito generatam aequari facto ex ductu mobilis ge-
nerantis in viam ejus centri gravitatis. Hac regula potissimum usi
sunt Geometrae in motu rotationis circa certum quendam axem
pro metiendis solidis ac superficiebus quae sic generantur. Sed
non minus succedit negotium, si axis vel centrum continue mute-
tur durante motu generantis, ut fit in evolutionibus curvarum et
superficierum. Itaque si curva AB (fig. 85) ope fili DAB evolvatur,
tunc pars fili, id est initio recta DA, describet aream DA(A)(D) vel
brevius designando D(A), duabus curvis parallelis condescriptis
D(D) et A(A) comprehensam, quae aequabitur rectangulo sub recta

AD et recta aequali curvae E(E) (iisdem parallelae) a centro seu puncto rectae AD medio E descriptae. Quin amplius, etiamsi pars ipsius mobilis successive quiescat et moveatur, tamen productum ex toto in viam centri gravitatis totius, areae generatae aequatur, quod et hic locum habet. Nempe totius fili DAB centrum gravitatis sit G in statu primo, et (G) in statu seu situ ultimo, cum filum totum in rectam B(D) abiit. Sit linea G(G) locus continuus hujus centri, dico B(D) filum in G(G) aequari DAB(D)D. Horum ut recordarer, fecit elegans theorema Dn. Joh. Bernoullii, qui notavit, duorum arcuum evolutione condescriptorum ut D(D) et A(A) differentiam si convexitatem vertant ad easdem partes, summam si ad contrarias aequari arcui AH sectoris circularis intercepti inter duos radios DA, DH aequales filo vel regulae extremis suis punctis binos illos arcus describenti, et parallelos ipsis DA et (D)(A) extremis sitibus fili. Videantur Acta Augusti 1695. His cum meo theoremate conjunctis, sequitur differentiam (vel collatis oppositis evolutionibus summam) duorum (ut sic dicam) rectangulorum (bicurvilineorum) condescriptorum velut D(K) et L(A), modo sint aequialta (nempe si DK = LA), posse mensurari ope dimensionis circuli. Nam collocetur ipsi DK vel LA aequalis MN in recta DA, medio loco inter D et A, et describantur simul parallelae M(M) et N(N). Jam DL = KA, et DL in M(M) = D(L), et KA in N(N) = K(A). Ergo D(L) − K(A) id est D(K) — L(A) = DL in M(M) — N(N) = DL in NP, posito NP esse arcum circularem centro M dicto modo descriptum, scilicet ut sit MP parallela et aequalis ipsi (M)(N). Unum adhuc addam: *Quae* de parallelis nostro more, id est generaliter acceptis diximus, tam universalia esse, ut non tantum parallelis evolutione descriptis, sed et rectis ac circularibus quadrant, licet in circularibus linea evolvenda evanescat in punctum, et pro rectis hoc punctum concipiendum sit infinite remotum. Generaliter autem *parallelas* definio (lineas vel superficies), quarum intervalla (minima scilicet) ubique sunt aequalia. Et cum *rectangulum* (late sumtum) figura sit, quae solos angulos rectos habet, consequens est, figuram hic inter duas parallelas earumque intervalla extrema (minima) contentam ut D(K) merito rectangulum appellari. Caeterum ut hoc quoque adjiciam: *Datae lineae* (curvae vel rectae) *parallelam ducere lineam*, problema est, quod etiam sine evolutione construi potest. Nempe ducatur recta perpendicularis ad lineam datam, et ex puncto ejus aliquo tanquam centro ac per-

tingente ab eo ad curvam perpendiculari tanquam radio, describatur circulus lineam datam tangens, qui si volvatur super ipsa, describet centro suo lineam datae parallelam. In eo tamen praestat evolutio, quod ejus ope duci potest parallela datae per punctum datum. Tantum enim opus est ex hoc puncto duci tangentem ad generatricem datae, quae simul et generatrix erit quaesitae, tangente ducta partem fili faciente.

X.

DE LINEAE SUPER LINEA INCESSU, EJUSQUE TRIBUS SPECIEBUS, MOTU RADENTE, MOTU PROVOLUTIONIS, ET COMPOSITO EX AMBOBUS.

Linea ad lineam incedit, si illa spectata ut mota, hac ut quiescente, altera alteram durante motu contingat, et quiescens dicitur *basis*.

Si linea eodem modo semper puncto suo super alia incedat, non nisi *radere* ipsam dicitur, velut si super linea ABCD (fig. 86) incedat linea LMN, puncto M in basi ABCD persistente. Abradet enim eminentiolas, si quae ponuntur basi adhaerere; cum alias linea, quae continue suum mutat punctum contactus, adeoque *provolvitur*, eatenus non tam abradat has eminentiolas, quam deprimat; et cum linea super linea tantum provolvitur, dici potest alteram ab altera *lambi*.

Si linea radens angulum LMC vel NMB ad basin ABC faciat assignabilem, fieri potest ut inter radendum circa punctum radens M tanquam centrum titubet, adeoque non incedat sibi parallela, veluti si LMN situ ad priorem parallelo emota ponatur inter procedendum, punctum tamen M in basi remaneat.

Sed si linea radens KLMNP angulum nullum assignabilem faciat ad basin ABCD, id est si ambo polygona constituant curvas in puncto M radente se mutuo contingentes neque plus quam unam in puncto contactus rectam tangentem habentes, necesse est lineam radentem suis vestigiis ubique parallelam incedere. Ponamus enim punctum radens esse M, in quo basis pars BC tangatur. Et quoniam ambae lineae ABC et LMN sunt curvae, quae se mutuo tangunt, habebunt etiam eandem rectam tangentem, eamque ex hypothesi unicam, quae adeo ad curvam angulum assignabilem non faciet. Itaque et curvae ad se invicem angulum assignabilem non constituent. Hinc vero sequitur, curvam KLMN puncto eodem M per basin ABC incedentem non posse nutare seu angulum inter ambas curvas factum assignabilem variare, adeoque nec angulos earundem plani lineae mobilis rectarum in alium locum transeuntium, quibus immotam FGH respiciebant, hac translatione assignabiliter diversos fieri ab iis, qui fuere in priore situ. Sit enim in plano curvae radentis, quod una cum ipsa moveatur, punctum J, et jungatur recta JK; dico, hanc sibi manere parallelam durante motu. Assumatur enim immobilis recta HG in plano immobili, per quod ipsum planum mobile semper incedat. Producta recta KJ usque dum ipsi HG (productae, si opus) occurrat in F, dico si motus sit radens, angulum HFK non posse variari, licet KLMP aliorsum transferatur. Nam curvas rursus concipiamus ut Polygona, immobile ABCD, mobile KLMP. Cum ergo totum KLMP rigidum censeri possit, non potest nutare, seu rotari circa M, nisi alius fiat angulus LMC. Sed cum is sit infinite parvus, non sufficiet ad assignabilem nutationem, ut LM sese convertens circa M applicetur ad CB, sed ulteriori rotatione opus erit. Ita vero si ponas amplius nutare lineam radentem, necesse est ut punctum M erigatur a basi, punctis L et K successive ad basin depressis, quibus et successive tanquam sustentantibus centris innitetur radens linea, ac circa ea gyrabit, cum tamen supposuerimus, punctum M continue basi manere applicatum. Idem est, si rotatio fieri ponatur in contrariam partem, ut non L, sed N ad basin deprimatur. Utroque igitur modo angulus LMC vel NMB assignabiliter mutari nequit, quantumcunque duret motus, modo punctum M semper in basi manere debeat, adeoque non recta KJ ipsi lineae radenti rigide connexa seu cum ea mobilis ad rectam HG (ipsi immobili lineae ABCD rigide connectibilem seu cum ea immobilem) angulum KFH assignabiliter variare potest.

Hactenus de motu radente potissimum diximus. Sed si iisdem positis curva KLM super curva BCD velut basi ea lege incedat, ut punctum M dictam lineam KLM sustentans (seu quo ea basin tangit) non idem incedat per plura baseos puncta, sed mutetur, alio continue puncto curvae mobilis ad illud punctum basis, parsque, alia parte mobilis ad aliam partem basis applicata; necesse est ut curva KLM rotetur circa punctum sustentans M, donec aliud, nempe L, basin attingat. Ita hoc jam erit punctum sustentans novum, super quo facta gyratione prius M a basi elevabitur in alteram partem. Hoc motu continuato dicetur curva super basi nonnisi *provolvi*, dicetur etiam altera alteram lambere, et tunc continget partes baseos ac partes mobilis curvae, quae provolutione jam defunctae sunt, inter se aequari; pars enim parti, latus polygoni lateri alterius polygoni congruit, nec una pars unius plusquam uni alterius congruenter applicatur. Insuper si punctum aliquod constans, exempli gratia, curvae provolutae in eodem plano annexum ponatur, illud describet *Trochoidem* J(J), cui normalis erit recta MJ a puncto sustentante ad punctum describens ducta. De quo motus genere jam multa apud Geometras habentur, potissimaeque ejus species sunt, quae dant *lineas Cycloidales* et *Epicycloidales*.

Denique curva mobilis KLM super basi BCD incedere potest *motu composito ex radente et provolvente*, si dum M procedit in BC versus D, simul LMN mutet et gyretur circa M, donec L attingat BCD et loco ipsius M subeat puncti sustentantis vicem, et mox itidem (ut prius fecerat M) simul et procedat in basi et tamen centrum sit gyrationis curvae KLM, per quam nunc M a basi elevetur. Et ratio inter celeritates gyrationis et motus radentis seu paralleli determinabit speciem hujus incessus, in quo nec motus est parallelus, ut in puro radente, neque arcus baseos et curvae mobilis contactu defuncti inter se sunt aequales, ut in puro provolvente: nam quantitas motus radentis incessui huic immisti est longitudo, qua arcus curvae incedentis deficit ab arcu baseos percurso. Punctum autem constans in plano curvae mobilis designatum ut J non jam Trochoidem describet, sed lineam factam compositione ex motu parallelo seu aequali cum motu radente puncti sustentantis (qui motus toti plano mobili communis est) et ex proprio motu gyrationis, quem exercet punctum describens J circa punctum sustentans, qui motus nonnisi eis plani punctis communis est, quae tantundem a puncto sustentante absunt.

Hic motus plerumque a rotis exercetur, cum simul trahuntur et volvuntur, quod fit praesertim cum axis non satis est lubricatus, quae causa est aliquando, ut pene tanta sit difficultas in gyrando, quanta in procedendo: unde etiam rotae non sunt fidum satis medium longitudinem itineris suis conversionibus mensurandi. Ideoque etiam si quis puram provolutionem desideret, id est si quis Cycloidem accurrate describere velit, vel Epicycloidem (cum circulus super circulo volvitur) vel etiam Trochoidem, aliam quamcunque, non sufficit rotam libere incedere, sed necesse est filum vel catenulam rotae circumdari, quae inter provolvendum evolvatur et extensa remaneat in basi, veluti si rotae pars TV (fig. 87) provoluta per QR ibi reliquerit funis QRX partem QR, dum pars RX adhuc rotae sit affixa, continuata vero provolutione similiter applicari debeat dicta pars RX basi reliquae RS.

Porro curva, quae basin nonnisi radit adeoque vestigiis suis parallela incedit, singulis punctis plani sui mobilis describet lineas basi similes et aequales seu congruentes. Nam (fig. 88) rectae $_1N_2N$, $_2N_3N$ respective parallelae et aequales sunt ipsis $_1M_2M$, $_2M_3M$, id est rectis AB, BC, idemque est de motu puncti L, quod de motu punctorum M et N. Et si quis agnoscat, quaevis plani mobilis puncta ut L et N describere lineas congruas inter se, idem ei dicendum erit de puncto sustentante M, nempe describere lineas prioribus congruas, cum punctum N ipsi inassignabiliter vicinum assumi possit, adeoque in ipsum tandem incidere intelligatur. Quia autem M describit basin, utique lineae a punctis L et M descriptae basi congruent.

Mechanice efficiemus, ut curva in basi non incedat nisi radente motu, si ex puncto J (fig. 86) recta $J\lambda$ educta sit, quae ipsi HG normaliter occurrat ad β, crassitie ipsius rectae materialis HGF cadente infra planum paginae et crassitie ipsius $J\lambda$ cadente supra, et praeterea ex recta rigida $J\lambda$ exeat normaliter alia recta rigida seu regula $\beta\alpha$, cadens semper inter ipsas rigidas immobiles GH, $\gamma\mu$ inter se parallelas, per $H\gamma$ connexas nec magis invicem remotas quam ut $\beta\alpha$ exacte inter eas labi seu ultro citrove ire possit. Ponamus regulam $\beta\alpha$, servato angulo recto, posse ascendere et descendere in ipsa $J\lambda$. Ita $\beta\alpha$ libertatem habebit duplicis motus, unius horizontalis (si placet) quo incedit secundum ipsam GH, alterius verticalis quo prorsum et retrorsum ire potest in recta $J\lambda$. Cum ergo recta $\alpha\beta$ maneat semper sibi in directum, et recta $J\lambda$ sit semper ei normalis, utique recta $J\lambda$ semper suis vestigiis parallela erit, adeoque et curva KLMN motu parallelo movebitur, dumque interim semper applicatur basi, radet eam eodem

semper puncto M. Si basis esset circulus, figura super basi incedens radendo moveretur eo motu, quem Hobbius olim vocavit circularem simplicem et de quo quaedam ingeniose jam tum observavit in Elementis de Corpore et in Problematibus, et inter alia, quod dum quaelibet recta in plano sic moto designata manet suis vestigiis parallela, necessario durante motu quaevis puncta plani describant lineas inter se aequales et similes. Sed nos addimus, eundem esse hunc motum cum motu curvae aliam uno puncto suo radentis.

Caeterum sive motus sit pure radens, sive pure provolutorius, sive ex utroque compositus, nihil refert utrum sit obradens an subradens, obvolutorius an subvolutorius, id est utrum curva mobilis convexam an concavam faciem curvae immobilis radat vel lambat. Convexa autem facies curvae ab alterius curvae convexa, et concava, sed concava et recta non nisi a convexa tangi potest, adeoque et radi vel lambi.

Porro notandum est, motum evolutionis, quem excogitavit Hugenius, et motum coevolutionis, quem addidit Dn. de T.*) et cujus utilitates ad construenda optica et alia problemata ego primus ostendi, esse casus speciales motus purae provolutionis. Nam idem est ac si ponas rectam rigidam super basi volvi simulque filo affixo regi, ne radere possit basin. Ponamus (fig. 87) filum QRX extremo quidem X curvae TVX affixum esse, extremo autem Q rectae QRS seu regulae WQRS; curvam autem (contra quam ante) esse basin immobilem, supra qua incedat recta rigida seu regula WQRS. Haec primum in situ (W)(Q)(R)(S) posita tangat basin in puncto X, in quo incidit (S), filo toto adhuc existente in regula, quae deinde volvatur super basi curvilinea XVT, per arcum ejus XV, donec puncto suo R eam tangat in puncto ejus V, relicta parte fili XR in dicto basis arcu XV, reliqua fili parte RQ manente in regula QS. His positis manifestum est, dum regula super basi circulari provolvitur, simul huic ipsi basi obvolvi filum, eumque motum obvolutionis esse tantum contrarium motui evolutionis, et punctum in regula sumtum ut hac provolutione regulae vel obvolutione fili describere curvam W(W): quae eadem curva etiam per evolutionem describetur, dum

---

*) Tschirnhaus.

(remota regula vel manente, ut lubet) filum WQ continuo tensum et curvam VS tangens, ita movetur, ut portio ejus RX a curva VX devolvatur. Pro motu autem coevolutionis simili ratione repraesentando opus est duas regulas rigidas filum inter se partiri, ita tamen ut de una in aliam transire possit, sed ope styli ad ambas regulas in puncto, ubi se secant, implicitum teneatur. Et quamvis duae rigidae rectae se proprie secare (sua nempe crassitie) non possunt, aequivalens tamen effici potest, dum una sub alia transit, et superioris ima, inferioris summa recta pro ipsa regula rigida assumuntur, filumque semper ad duarum istarum rectarum intersectionem stylo applicitum tenetur.

Postremo, quotiescunque una eademque linea rigida movetur in eodem plano, diversisque suis sitibus tanquam totidem curvis concurrentibus intelligitur formare novam curvam omnes illos situs tangentem perinde est ac si curva rigida mobilis incedat super ea, quam suorum situum concursibus format, tanquam basi, motusque erit modo pure radens, modo pure provolvens, modo denique, ut plerumque fit, compositus prout conditiones a nobis praescriptae observabuntur.

Si fingeretur (fig. 86) curva mobilis KLMN dentibus intercisa, basi vero esset obvoluta fili loco catena, cujus articuli dentibus responderent, ita ut inter volvendum dentes articulis insererentur, catenula solo motu radente volutioni admisto propelleretur, vel potius traheretur in basi: quod etsi ad Mechanismum accuratum non sit aptum, inservit tamen ad distinctionem motus radentis et provolutorii melius intelligendam. Pars enim baseos, quam extremitas catenulae protractae percurrere intelligitur, detracta a toto arcu baseos, dabit arcum baseos, arcui curvae mobilis incessu jam defuncto aequalem, modo ab extremo catenae inceperit incessus. Haec dudum meditata ut ederemus, occasio invitavit.

XI.

ADDITIO G. G. L. OSTENDENS EXPLANATIONEM SUPERFICIEI CONOIDALIS CUJUSCUNQUE, ET SPECIATIM EXPLANATIONEM SUPERFICIEI CONI SCALENI, ITA UT IPSI VEL EJUS PORTIONI CUICUNQUE EXHIBEATUR RECTANGULUM AEQUALE, INTERVENTU EXTENSIONIS IN RECTAM CURVAE, PER GEOMETRIAM ORDINARIAM CONSTRUENDAE. *)

Superficies Coni recti jam ab Archimede explanata est, et aequalis ei circulus assignatus. Coni Scaleni superficiem Veteres, quod constet, non attigere. Aegidius Robervallius me juvene ajebat, ejus explanationem sibi esse notam, sed qualem habuerit non dixit, nihilque ea de re inter ejus schedas repertum accepi. Equidem hodie ad eum modum, quo processum est in Schediasmate praecedenti, possumus facile dare figuras planas easque per Geometriam ordinariam construendas, non tantum quae aequentur superficiebus coni Scaleni, sed etiam cujusque Conoeidis generati recta BH (fig. 89) per punctum B constans in sublimi transeunte et circumlata per curvam quamcunque H(H) in plano subjecto AHC positam. Nam cum BC sit normalis ad planum subjectum, adeoque ad rectam AC, quae sit directrix ipsarum HG normaliter applicatarum ex curva Hh et ipsi AC occurrentium in G, patet $BC = \sqrt{(BC.BC + GC.GC)}$ fore normalem ad HG, atque adeo BH fore $\sqrt{(BG.BG + GH.GH)}$. Datur autem GH ex AG per naturam curvae, et BC, AC sunt datae, et CG est summa vel differentia ipsarum CA, AG; habetur ergo et BH ex AG. Ergo et ratio datur incrementi momentanei seu elementi ipsarum BH, nempe ipsius Hk (si ponatur ex h demissa in BH normalis hk) ad HV elementum ipsarum AG. Quodsi jam quadratum ipsius Hk detrahatur a quadrato ipsius Hh elementi arcus curvae, supererit quadratum

*) Vorstehendes schrieb Leibniz als Zusatz zu der Abhandlung Varignon's: Schediasma de dimensione superficiei coni ad basin circularem obliqui ope longitudinis curvae, cujus constructio a sola circuli quadratura pendet, welche in Miscell. Berolinens. Tom. III. zugleich mit diesem Zusatz abgedruckt ist.

ipsius hk, cujus rectae adeo etiam dabitur ratio ad HV incre-
mentum ipsius AG, quae ratio vocetur r : a, posita a constante
quacunque pro arbitrio - semel assumta et r determinata ex AG.
Erit ergo hk = (r : a)dAG. Sed dimidium rectanguli ex BH in hk
est aequale triangulo BHh, id est elemento superficiei Conoeidis;
ergo si recta (r : 2a)BH (nempe quae sit ad BH ut r ad 2a) ac-
commodetur ad dAG id est ad Gg, seu sumatur semper in ipsa
GH ex G versus H, fiet figura curvilinea, cujus elementum erit
(r : 2a)BH . dAG idem cum elemento superficiei conoeidis. Itaque
ipsius hujus Figurae portio rite sumta aequabitur respondenti su-
perficiei Conoeidis portioni, binis rectis ex puncto in sublimi et
arcu basis comprehensae, et proinde quaevis superficies Conoidalis
explanari potest, adhibita figura plana ei aequali, per Geometriam
ordinariam construenda, si ipsa AHh basis Conoeidis sit figura
Geometriae ordinariae.

Sed quia Archimedes Circulum vel Circuli portiones super-
ficiei coni recti vel ejus portionibus aequales exhibuit, Circuli au-
tem vel ejus portionum area vel conversio in figuram rectilineam
facillime habetur per extensionem curvae (nempe ipsius arcus cir-
cularis) in rectam: hinc a Viro Celeberrimo Petro Varignone quae-
situs est inventusque modus elegans paulo ante positus, quo
figura plana aequalis superficiei coni scaleni etiam mensurari pot-
est per extensionem curvae alicujus in rectam. Cum vero curva
illa quam exhibet non sit ordinaria, sed transcendens, quamvis
non nisi tetragonismo Circuli seu rectificatione arcus circularis ad
constructionem indigeat, placuit mihi quaerere curvam ordinariam
quae idem praestet, seu cujus rectificatione exhibeatur superficiei
Coni Scaleni vel ejus portioni cuivis aequalis figura rectilinea. Hoc
ita sum consecutus.

Iisdem quae antea positis, a puncto G versus D sumatur
GW, quae sit ad AG ut CD ad radium DO, et jungatur BW, quae
erit $\sqrt{(ccrr - 2rfgx + ffxx)} : r$.*) Pono autem A esse extremum dia-
metri AD remotius a B. Ex puncto H ad rectam AC ducatur HJ,
ita ut ex O ducta ad HJ normalis $O\psi$ sit ad HO radium ut di-
midia BW ad rectam constantem, quae sit major dimidia BA; et
recta HJ ipsam $O\varphi$ ex centro O perpendiculariter ad CO eductam

*) Es ist AB = c, f = OC = r + a, AC = g = 2r + a, AG = x gesetzt.

ad partes H secet in φ. Eadem omnia fiant ad puncta h et g, ut
ducatur BW, ducatur et hi, quae ipsam $O\varphi$ secet in (φ). Jam
ipsis $O\varphi$, $O(\varphi)$ etc. aequales $J\Omega$, $i\omega$ etc. ordinatim applicentur nor-
maliter ad OJ, Oi etc. ut fiat curva. $\Omega\omega$, cujus tangens ΩT occur-
rat ipsi AC in T. Tandem in AC ex J sumatur JX ad partes ad
quas convergunt JH, ih, quae JX sit ad JO ut TJ ad TO, et ex
puncto X quovis, hoc modo reperto, normaliter educta XY, oc-
currens respondenti rectae positione datae HJ in Y, erit ordinatim
applicata curvae novae Y(Y), cujus sub arcu elementari inter puncta
Y et (Y) praescripta ratione determinanda intercepto, et sub con-
stante supradicta, non minore quam $\frac{1}{2}$ BA, comprehensum rect-
angulum aequabitur triangulo BHh, nempe elemento superficiei coni
scaleni: atque adeo evolutione seu extensione debita curvae Y(Y)
in rectam, filo evoluto ducto in ipsam constantem supradictam, ex-
hibebitur rectangulum aequale ipsi ABDHA superficiei dimidiae coni
scaleni vel ejus portioni (rectis scilicet binis ex B et arcu basis
comprehensae) cuicunque.