chorda quaevis in lineae parte A_3Y ut A_2Y, ${}_2Y_3Y$, ceciderit in spatii partem posteriorem, nunc chorda quaevis in lineae parte ${}_3Y_4Y$ cadit in partem spatii priorem.

Quodsi vero porro ponamus vel ambarum abscissarum, principalis scilicet et conjugatae, vel alterius saltem incrementa continue decrescere, sumamusque eam quae sola vel saltem magis decrescit, ejusque velocitatem ponemus tandem evanescere, atque ita porro continuata mutatione mutari in contrariam, hoc est lineam curvam respectu ejus abscissae non amplius recedere ab A, sed ad A potius accedere, ibi habemus puncta reversionum. Exempli causa fig. 67 velocitas ipsius X decrescit usque ad ${}_4X$, ubi evanescit, nempe ${}_1X_2X$, ${}_2X_3X$, ${}_3X_4X$ quae velocitates repraesentant continue decrescunt, donec evanescant in ${}_4X$, ubi velocitas progrediendi mutatur in regressum, et X a ${}_4X$ tendit in ${}_5X$, ${}_6X$ rursusque accedit ad A, crescente rursus (aliquamdiu saltem) velocitate regressus, interea vero Z uniformi velocitate progreditur; ordinata autem ${}_4X_4Y$ ex loco reversionis puncti X, nempe ex ${}_4X$ ducta ad curvam, eam tangit in ${}_4Y$. Potest fieri ut puncta X et Z simul revertantur versus A, sed hoc singulare admodum est, eoque casu curva in puncto reversionis infinitas habet tangentes, ut fig. 68 patet, curvam AYH simul tangi a duabus rectis ad se invicem perpendicularibus XY et ZY; unde patet cum tota curva cadat intra rectangulum XZ, ideo omnem rectam per Y ductam extra triangulum cadentem, curvam tangere, et dubitari videtur posse, an sit una curva an potius duae AY et HY se secantes in H; verum cum tales generationes pro una curva excogitari possint, et exemplum habeamus in cycloidibus secundariis, nihil prohibet, quin totum AYH pro una curva habeatur. Quodsi autem curva non habeat infinitas tangentes, seu non X et Z simul revertantur, seu si in fig. 68 linea AY non tendat ad H, sed ad L, tunc patet, una ordinata ab X, nempe XY, curvam tangente in Y, alteram ZY, quae utique ipsi XY adeoque tangenti est perpendicularis, ipsi quoque curvae AYL esse perpendicularem, adeoque esse maximam vel minimam ordinatarum hujus periodi, maximam quidem quando curva in Y ipsi AZ directrici obvertit concavitatem, minimam vero cum ei obvertit convexitatem.

Jam porro inter se conjungamus ambas variationes lineae, unam quae est secundum convexum et concavum, alteram quae est secundum accessum et recessum respectu directricis. Equidem potest linea tam accedere quam recedere respectu directricis, cui

concavitatem aut convexitatem obvertit, ut fig. 69 in (H) concava recedit, in (B) concava accedit, in (C) convexa recedit, in (D) convexa accedit; verum si duabus directricibus simul conferatur, tunc quando ab ambabus recedit, uni obvertit concavitatem, alteri convexitatem, ut in (H) et in (C); quando vero uni accedit, ab altera vero recedit, tunc ambabus concavitatem vel ambabus convexitatem obvertit, ut in (B) et (D). Atque ideo ad casum nunc veniendum est, quo linea ab una directrice recedit, ad alteram vero accedit, seu quo X quidem ab A recedit, at Z ad A accedit, ubi linea Y ambabus directricibus obvertit concavitatem vel convexitatem, convexitatem quidem ut in fig. 70 si ${}_2X_3X$ ad ${}_3X_4X$ recedendo ab A minorem rationem habeat, quam ${}_2Z_3Z$ ad ${}_3Z_4Z$ accedendo ad A, seu si velocitatibus recedendi in una directrice aut crescentibus aut manentibus aut decrescentibus, velocitates accedendi in altera minus crescunt aut magis decrescunt. Contra in fig. 71 concavitatem linea utrique directrici obvertit, si ${}_2X_3X$ ad ${}_3X_4X$ recedendo ab A majorem rationem habet quam ${}_2Z_3Z$ ad ${}_3Z_4Z$ accedendo ad A, seu si velocitatibus recedendi in una directrice crescentibus aut manentibus aut decrescentibus, velocitates accedendi in alia magis crescunt aut minus decrescunt.

Hinc intelligitur, quomodo fieri possit, ut linea quae antea directrici obvertit convexitatem, nunc ei obvertat concavitatem, vel contra, licet non habeat flexum contrarium, sed maneat ad easdem partes cava, quando scilicet in ea directrice occurrit reversio ut fig. 72 si motus ipsius X sit ${}_3X_4X$ recedens ab A et ${}_4X_5X$ accedens ad A, ubi patet ex (H),(B),(C),(D),(E),(F),(G),(K), quam variis modis fieri possit reversio, ut eidem rectae AX, cui concavitas prius obversa fuerat, postea convexitas obvertatur, vel contra, ubi patet in (H) et (B) linea recedente ab AX et ab AZ et in reversionis puncto recedente adhuc ab AX, sed accedente jam ad AZ, prius convexitatem postea concavitatem ipsi AX obverti; idem est in (B), ubi linea prius accedit ad AX, deinde semper ab eo recedit, accedit in 1, recedit in (B) et in 2, et ab AZ recedit usque ad (B), deinde ab eo recedit. Verum in (C) ad 1 prius concavitas obvertitur ipsi AX, deinde ad 2 convexitas, et utrobique receditur quod obtinetur ope ventris, qui unum continet regressum respectu AZ, sed binos regressus respectu AX. Tale quid etiam in (D) inclinate posito. Caeterum ventre in punctum evanescente ex (C) fit (E), et ex (D) fit (F), et ideo reversiones tam secundum AZ quam secundum AX ibi coincidunt, unde in puncto illo infinitae possunt esse tangentes, quale quid jam attigimus supra. At si idem venter simul contineat flexum contrarium, ut in (G) et (K), tunc ventre illo evanescente ut inde nascatur (L) vel (M) vel (N), atque ita flexu contrario coincidente cum puncto reversionis fit ut non obstante reversione linea convexitatem aut concavitatem ei obvertat cui prius, cum enim duplex concurrat causa mutandae obversionis, se mutuo tollunt et manet obversio qualis ante erat ad directricem AX, scilicet (L), (M), (N) ipsi tam ante quam post regressum obvertunt concavitatem; si inverterentur, tam ante quam post regressum obverterent ei convexitatem.

Caeterum hinc intelligitur, quod duplex causa est cur linea mutet obversionem, et quae ante concavitatem directrici AX obverterat, nunc obvertat convexitatem: una, regressus puncti X in illa directrice moti (ut fig. 73), linea YY a $_3Y$ ad $_4Y$ obvertit ipsi AX convexitatem, at post regressum in $_4Y$ obvertit ei concavitatem in $_5Y$, quia punctum X ab A recedit a $_3X$ ad $_4X$, sed ad A accedit item seu regreditur a $_4X$ ad $_5X$; altera vero causa est flexus contrarius, cum ipsa linea revera ex convexa fit concava, vel contra, ut in fig. 74, ubi linea in $_4Y$ habet flexum contrarium, ita ut recta tangens cum prius cecidisset ad unum latus curvae post $_4Y$ cadat in aliud latus, in ipso autem puncto $_4Y$ tangens est nulla vel potius tangens et una secans coincidunt, nam (fig. 75) recta tangens lineam flexu contrario praeditam in L secat eandem alibi in M, cumque continue magis magisque sibi admoveri possint L et M, fit ut tandem coincidant in N, ubi nulla est tangens, aut potius eadem simul est certo respectu tangens et secans, unde et in puncto flexus contrarii tria curvae puncta alioqui diversa in unum coincidunt duo ob tangentem (omnis enim tangens intelligitur secare lineam in duobus punctis coincidentibus), unum ob secantem. Et apparet in puncto flexus N duarum partium LN et MN coincidere, quemadmodum si duae curvae diversae LNS, MNR obversis convexitatibus se tangerent in N, unde transeundo ex una in alteram fieri potest flexa LNM vel flexa RNS.

Ex his autem duobus modis inter se diversis, quibus obversio lineae ad aliquam directricem mutatur, poterimus definire periodum intra quam intelligitur aliqua esse maxima aut minima, cum enim curva multos flexus contrarios multaque puncta reversionis habet, diversas habet maximas aut minimas pro sua quaque periodo.

Nimirum (fig. 76) linea Y recedit a sua directrice AX usque ad B,
inde rursus accedit, ordinata igitur ad B est maxima (si ibi curva
directrici obvertit concavitatem); porro linea a B accedit directrici
AX, simulque recedit a directrice AZ usque ad C, ubi est punctum
reversionis, seu ubi accedit quidem adhuc ad AX, sed non amplius recedit ab AZ; sed a C (ubi ordinata ad AX tangit curvam)
usque ad D accedit simul directrici AX et directrici AZ, ubi iterum
incipit recedere a directrice AX, sed adhuc pergit accedere ad AZ
usque in E, ubi tam ab AZ quam ab AX iterum recedit. Perio-
dos igitur faciunt puncta reversionis, quae obversionem mutant.
Sic prima periodus est ABC qua linea directrici AX obvertit con-
cavitatem, cujus periodi maxima est ordinata ad B, altera periodus
est CDE, ubi linea directrici AX obvertit convexitatem cujus mi-
nima est ordinata ad D. Porro linea CDE producta seipsam se-
care potest in F. Et si totus venter coincidere intelligatur in
punctum, ibi coincidit duplex reversio respectu directricis AZ cum
simplici respectu directricis AX. Atque ita quia duplices rever-
siones se mutuo tollunt, hoc modo fieri potest ut linea (Y)(B)(F)(G)
(in eadem fig. 76) quae a (B) usque ad (F) recessit ad directricem
AX, post (F) rursus ab ea recedat, sine ullo flexu contrario pari-
ter ac sine ulla reversione respectu alterius directricis conjugatae
AZ, quorum tamen alternatio alias opus est, ut linea a directrice
ad quam accessit iterum recedat. Sed redeamus ad priorem li-
neam AYBCDEFG, et post duas periodos ABC et CDE quaeramus
tertiam EGH a puncto novissimo reversionis E ad punctum flexus
contrarii proximi H, cujus periodi maxima est ordinata ad G.
Quarta periodus est HJK a puncto flexus contrarii H ad novum
punctum reversionis K, cujus periodi minima est ad punctum J.
Ubi notandum est, etsi duae periodi sibi immediatae, quarum quae-
libet suam habet maximam aut minimam respectu ejusdem direc-
tricis AX, inter se distingui debeant vel puncto aliquo reversionis
respectu directricis conjugatae AZ vel puncto aliquo flexus con-
trarii in ipsa curva, tamen neque punctum reversionis directricis
conjugatae neque punctum flexus contrarii statim periodum facere
quae maximam vel minimam habeat, imó nec plura puncta flexus
contrarii facere necessario periodum novam, ut patet ex serpentina
KLM, verum plura nova puncta reversionis ad directricem conju-
gatam AZ necessario faciunt periodum novam aut periodos novas
maximarum aut minimarum pro hac directrice AX, si flexus con-

trarii in curva absint. Quod ita demonstro, quoniam punctorum reversionis ad directricem conjugatam sunt ordinatae maximae et minimae ad directricem conjugatam, hinc si plura dentur puncta reversionis ad directricem conjugatam, dantur plures ordinatae tales ad directricem conjugatam, ergo et periodi maximarum aut minimarum pro directrice conjugata, quia quaevis maxima aut minima habet propriam periodum; hae autem periodi ad directricem conjugatam AZ necessario limitantur vel per puncta flexus contrarii vel per puncta reversionis ad directricem primam AX, absunt autem hic puncta flexus contrarii ex hypothesi, ergo adesse debent puncta reversionis respectu directricis AX, adeoque et maximae et minimae atque adeo et periodi respectu directricis AX, quod asserebatur. Denique notandum est, periodos (ad eandem directricem) regulariter tales esse ut maxima et minima sese alternis excipiant, exceptio tamen est in casibus quibusdam, ut in linea (Y)(B)(F)(G) eadem figura 76 sese immediate excipiunt duae maximae, ordinata a B ad AX et ordinata a G ad AX (nisi ordinatam ex F simul velimus computare, quae tamen periodum propriam nullam habet, quippe quae evanuit), cujus ratio est quod ibi duo puncta reversionis tacita sunt seu sese mutuo supprimunt, quae si expressa intelligantur numerenturque, vera manet regula alternationis. Similiter fieri potest ut punctum reversionis et flexus contrarius coincidant, et ita alternatio. Ut si in eadem figura N nova sit periodus KLMNP a puncto reversionis K ad punctum flexus contrarii P, ejusque periodi maxima sit ordinata ex N ad directricem AX, et rursus nova periodus PQR a P puncto flexus contrarii ad R punctum reversionis, cujus periodi maxima est ordinata ex puncto Q ad directricem AX, inde rursus nova periodus RST a puncto reversionis R ad punctum T (quod quale sit ex continuatione lineae patere deberet) cujus periodi maxima est ordinata ex S ad directricem AX. Et hactenus quidem semper servatur alternatio maximarum et minimarum; sed si totus venter VPQRV evanescere ponatur in unum punctum V, tunc ordinata ex V ad AX non poterit dici maxima aut minima ordinatarum, quia lineam NVST non secat, sed tangit; ergo periodi MNV maximam ordinatam, nempe ex N in directricem AX, excipit statim periodi VST maxima ordinata, nempe ex S ad directricem eandem, scilicet quia R et Q puncta reversionis et flexus contrarii in unum coincidentia sese mutuo compensant et tollunt.

Atque ita hic semina quaedam jecimus, ex quibus generalia quaedam curvarum elementa enasci, curvaeque a sua forma in certas quasdam classes dispesci possint. Possunt multa alia ex his principiis demonstrari, ut quod eadem est directio puncti curvam describentis, quae rectae tangentis; possent etiam elementa explicari curvarum linearum quae in solido describuntur compositione trium motuum, dum scilicet (fig. 62) planum unum CD incedit in alio CB a CE versus BF, et in plano CG movetur regula CG, accedit ad ED vel inde recedit, et in regula CG movetur punctum C versus G vel recedit a G. Potest et ex his modus quoque duci curvarum ducendi tangentes inveniendique maximas aut minimas; sed non id hoc loco agimus, nec plenam tractationem, sed gustum quendam atque introductionem damus.

Tantum hac vice.

III.

Quaerebam *) aliquando demonstrare Theorema Pythagoricum ex natura triangulorum similium. Itaque hoc usus sum

---

*) Leibniz hat auf dem Manuscript bemerkt: Hic specimen dare placuit Analyseos Anagogicae a vulgari Algebristis usitata, quam Metagogicam seu transsultoriam vocare possis, diversae, in demonstrando theoremate reductione continua ad alia theoremata simpliciora per gradus, cum vulgaris Analysis eat per saltum. Et cum Pappus dixerit, quaesitum vel demonstrandum assumi in Analysi pro vero, atque inde deduci alias enuntiationes donec incidatur in jam notas, quod Conringius et alii reprehendunt, volui hic evidenti specimine ostendere quod olim Conringio respondi, etsi alias ex vero falsum duci posset, nihil tale hic esse metuendum, quia non adhibentur nisi ratiocinationes reciprocae; itaque hic modum loquendi mutavi nec dixi ut initio volebam, ex Pythagorico Theoremate sequi articulum (6), ex hoc (supposita triangulorum similium proportionalitate laterum) sequi articulum 10 aliunde jam demonstratum vel demonstrabilem, sed malui dicere et ostendere verum fore Theorema Pythagoricum, si verus articulus (6), et hunc rursus, si verus articulus (10). Ita Analysis ista non minus rigorose demonstrat quam ipsa Synthesis.

processu Analytico: Assumo quaesitum et video unde possit duci. Erit autem verum (1) $AB^2 + BC^2 = AC^2$ (fig 77), si (2) $AB^2 = AC^2 - BC^2$, seu si (3) $AB^2 = AC + BC, AC - BC$. Jam centro C radio CA describatur circulus secans rectam BC productam in D et in E, et erit (4) $BE = AC + BC$ et (5) $BD = AC - BC$. Ergo (3) erit verum per (4 et (5), si verum (6) AB esse med. prop. inter BD et BE. Theorema ergo propositum reduximus ad hoc, quod in circulo ordinata est media proportionalis inter segmenta diametri. Hoc vero rursus verum erit, si (7) angulus DAB = ang. AEB, ita enim triangula rectangula ABD et EBA erunt similia adeoque DB ad BA ut BA ad BE, uti habet articul. (6). Jam quia (8) ang. AEB + ang. EAB = recto (ex eo quod trianguli rectanguli EBA tres anguli sunt 2 rectis aequales) et (9) ang. DAB + ang. EAB = ang. DAE, ergo erit verus artic. (7) per (8) et (9) si (10) ang. DAE (in semicirculo) sit rectus. Nam per (10) et (9) erit (11) ang. DAB + ang. EAB = recto. Ergo per (8) et (11) erit DAB = ang. AEB, ut habebat artic. (7). Res reducta est ergo articulo (10) ad hoc theorema, quod angulus DAE in semicirculo est rectus. Quod sic ostendemus. Ex centro C in AE agatur normalis AF. Ergo si verum sit (12) esse angulum ad centrum ACE duplum anguli ad circumferentiam ADC, ideo cum (13) sit angulus ECF dimidius anguli ACE, erit per (12) et (13), (14) angulus ADE aequalis angulo ECF. Ergo (15) rectae AD, FC sunt parallelae. Ergo (15) cum ex constructione angulus CFE sit rectus, erit (16) etiam angulus DAE rectus, ut habebat articulus (10). Res ergo iterum ad aliud theorema reducta est est in articul. (12), cujus itidem facilis est demonstratio. Nam (17) ang. DCA + ang. CDA = 2 rect., ut per se patet. Sed (18) ang. DCA + ang. CDA + ang. CAD = 2 rect., ergo per (17) et (18) erit (19) ang. ACE = ang. CDA + ang. CAD. Jam (20) ang. CDA = ang. CAD, ergo ex (19) et (20) sequitur artic. (12) seu angulum ad centrum (DAE) esse duplum anguli ad circumferentiam (ADC), ubi tantum assumsimus artic. (18) trianguli tres angulos esse 2 rectis aequales. Quod ipsum si quis demonstratum velit, ita facile satisfiet. Ex C ponatur duci CF parallela ipsi DA, erit (21) ang. FCE = ang. ADC, sed rursus (22) ang. CAD = ang. ACF cum sint alterni. Ergo ex (21) et (22) fit (23) $FCE + ACF - ADC + CAD =$ (24) ACE. Ergo per (44) et (17) habetur artic. (18) seu demonstratum est, in Triangulo tres

angulos esse 2 rectis aequales. Quodsi adhuc desideretur demonstratio artic. (22) seu theorematis, quod alterni aequales, id facillime fiet. Producantur CA in G, et BA in H. Ob parallelas AH et CF sunt (25) anguli ACF et GAH aequales. Sed (26) aequales sunt oppositi GAH et CAD. Ergo per (25) et (26) aequantur alterni ACF et CAD, ut habebat artic. (22). Omnia ergo reduximus ad veritates evidentes, quales sunt: Triangula similia habere latera proportionalia (ad 7), CF normalem ad AE bisecare angulum ACE in triangulo ACE, quod ob circulum cujus centrum C est isosceles (ad 13 et 20), item angulos qui sibi deinceps DCA et ACE aequari 2 rectis (ad 17 et 24), parallelas ad eandem facare angulos aequales ad easdem partes (ad 16 et 25).

IV.

EPISTOLA AD VIRUM CELEBERRIMUM, ANTONIUM MAGLIABECCIUM, UBI OCCASIONE QUORUNDAM PROBLEMATUM A BATAVIS FLORENTIAM MISSORUM DE USU ANALYSEOS VETERUM LINEARIS ET IMPERFECTIONE ANALYSEOS PER ALGEBRAM HODIERNAE DISSERITUR, NOVUMQUE TRIGONOMETRIAE SINE TABULIS INVENTUM ATTINGITUR.

Vorbemerkung. Von einem Ungenannten waren den Mathematikern zwölf Aufgaben vorgelegt worden, an deren Behandlung der Neapolitaner Antonio de Monforte sich versucht hatte. Er veröffentlichte seine Lösungen in einem an den berühmten Magliabecchi gerichteten Schreiben, das „Neapoli nono Cal. Janu. an. 1676" datirt ist. Dieses Schriftchen gerieth in die Hände Leibnizens; er machte, wie er zu thun gewohnt war, seine Bemerkungen darüber und stellte sie in dem folgenden ebenfalls an Magliabecchi gerichteten Schreiben zusammen.

Das Programm, in welchem der Ungenannte die zwölf Aufgaben bekannt machte, lautet wie folgt:

Geometra post tabulam latens, quae sequuntur Problemata, Matheseos Professoribus resolvenda proponit.

1. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet alterutrum laterum circa verticem ad differentiam eorundem, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

2. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet laterum aggregatum circa verticem ad lineam aliquam datam, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

3. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet aggregatum laterum circa verticem recta data multatum, ad rectam aliquam itidem datam, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

4. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet differentia laterum circa verticem ad alterutrum laterum, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

5. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet rectangulum sub lateribus circa verticem ad datum planum, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

6. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet quadratum unius e lateribus circa verticem auctum rectangulo sub iisdem, vel plano utcunque ejusdem multiplici ad quadratum alterius lateris, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

7. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet laterum aggregatum circa verticem ad alterutrum e lateribus, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

8. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet quadratum lateris alterutrius circa verticem ad rectangulum sub aggregato ex differentia praedicta et latere minori et sub eadem quoque differentia, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

9. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet quadratum aggregati ex praedicta differentia et latere alterutro circa verticem ad excessum, quo idem supererat quadratum praedictae differentiae, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

10. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet aliquota pars rectanguli sub lateribus circa verticem, datum planum assumens ad aliud datum itidem planum, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

11. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet aggregatum quadratorum e lateribus circa verticem ad datum planum, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

12. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet quadratum aggregati laterum circa verticem, assumens datum planum ad datum itidem planum, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

Viro Celeberrimo

Antonio Magliabeccio.

Incidit*) nuper in manus meas inscripta Tibi Epistola doctissimi ut apparet Antonii Monfortii. Quam cum evolvissem, vidi duodecim problemata Trigonometrica Lugduno Batavorum summissa ab eo tractari, quae Geometra nescio quis, qui se post tabulam latere ait, Mathematicis solvenda proposuit, quibus omnibus hoc commune est, ut in Triangulo quaesito detur differentia segmentorum baseos, et angulus aliquis ad basim. Dantur praeterea in probl. 1. ratio lateris circa verticem ad differentiam eorundem, probl. 2. ratio aggregati horum laterum ad rectam datam, probl. 3. ratio ejusdem aggregati recta data multati ad rectam datam, probl. 4. ratio differentiae horum laterum ad alterutrum laterum, probl. 5. (secundum ordinem solutionis) ratio aggregati ad latus alterutrum, probl. 6. (secundum ordinem solutionis) ratio rectanguli sub dictis lateribus ad planum datum, probl. 7. (secundum eundem solutionis ordinem) ratio quadrati unius lateris rectangulo laterum aucti ad quadratum alterius lateris, probl. 8. ratio quadrati lateris minoris (semper circa verticem intelligo) ad rectangulum sub aggregato ex data differentia segmentorum basis et latere minore et sub ista data, probl. 9. ratio quadrati ab aggregato istius datae dictae, et lateris majoris ad excessum hujus quadrati supra quadratum ejusdem datae, probl. 10. ratio aliquotae partis rectanguli sub lateribus dato plano aucti ad datum planum, probl. 11. ratio aggregati quadratorum a lateribus ad datum planum,

---

*) Leibniz hat auf dem Manuscript bemerkt: optimum erit non nominari Monfortium, quia laudari non potest.

probl. 12. ratio quadrati ab aggregato laterum dato plano aucti ad datum planum. Quanquam autem problemata ipsa plane in potestate sint hominis analytica docti, qualia ego quidem aggredi non soleo cujus in eo potius versatur studium, ut ipsa Analyticae artis pomoeria proferam ad ea quae Algebram transcendunt, quoniam tamen Tibi inscripta video et Monfortianae solutiones quibusdam animadversionibus indigent, credidi veniam apud Te pariter et Cl. Monfortium libertati meae paratam fore, si providere studeam ne quid Mathematica exactitudo dissimulatione nostra detrimenti capiat, eaque occasione alia quaedam majoris momenti admoneam, quibus Geometriae contemplatio pariter et usus magnopere augeri possit. Et primum quanquam exiguum hoc sit, moneo tamen (ne imposterum in allegando confusio oriatur) in programmate proponentis, ut edidit Monfortius, problema septimum esse id quod solvit Monfortius loco quinto, ideo quintum et sextum proponentis sunt sextum et septimum Monfortii; caetera consentiunt. Illud vero magis notari meretur, problema primum et quartum esse unum et idem, nec differe nisi verbis, quod miror non animadvertisse Cl. Monfortium, quemadmodum alia incongrua quae mox ostendam. Primum enim problema est: Data differentia segmentorum baseos una cum ratione quam habet alterutrum laterum circa verticem ad differentiam eorundem datoque alterutro angulorum ad basin, reperire triangulum; problema quartum est: Data differentia segmentorum baseos una cum ratione quam habet differentia laterum circa verticem ad alterutrum laterum datoque alterutro angulorum ad basin, reperire triangulum. Haec duo problemata in eo solum differunt, quod in primo datur ratio lateris alicujus ad laterum differentiam, in quarto vero ratio differentiae laterum ad aliquod latus, cum tamen nemo ignorare possit, data una ratione quae directa est, utique dari et alteram quae reciproca est. Quid est frustra problemata multiplicare, si hoc non est? Non tamen video, quomodo alicubi (pag. 22) Cl. Monfortius velit, omnia problemata duodecim reduci posse ad unum, cum constet, ut mox ostendam, pleraque quidem ex illis esse plana, nonnulla tamen solida, quae utique diversi sunt generis a planis. Caeterum sunt et alia, quae mihi in ipso modo quo problemata haec concepta sunt, displicent. Exempli causa in probl. 2. datur aggregati laterum ratio ad rectam datam, notum autem est, cujus ratio ad datum datur, id dari ipsummet. Cur non ergo proponens dixit potius, dari ipsum aggre-

gatum quam aggregati rationem? an detorquendo nonnihil problema credidit se id difficilius reddere? Idem est de problemate tertio, quod si recte inspicias, nihil differt a secundo. Nam in tertio datur aggregati laterum recta data multati ratio ad rectam datam; cujus autem ratio ad datum datur, id ipsummet datur. Datur ergo aggregatum laterum recta data multatum. Quod vero dato multatum datur, id ipsummet datur; datur ergo aggregatum laterum. Redimus ergo ad problema secundum. Eodem modo in probl. 6. datur ipsum rectangulum laterum. Similia ut ita dicam ἀγεωμετρήματα in probl. 9, 10, 11, 12 notari possunt. Et quidem problema decimum non nisi specie verborum differt a sexto secundum ordinem Monfortii vel quinto secundum ordinem proponentis. Nam si datur ratio aliquotae partis rectanguli sub lateribus datum planum assumentis ad datum planum, dabitur haec aliquota pars datum planum assumens; ergo datur ipsa aliquota pars. Data aliquota parte rectanguli sub lateribus, dabitur ipsum et recidimus in problema sextum.

Venio ad ipsas solutiones doctissimi Monfortii, quibus tamen nescio an satisfactum sit Geometrae proponenti. Primum enim videtur is, qui simpliciter proponit problemata Geometrica, postulare solutiones Geometricas, non vero Arithmeticas, lineas scilicet seu lineares constructiones, non numeros. Deinde videtur is, qui proponit problemata generalia, postulare etiam solutiones problematis generales; Monfortius autem certos casus pro arbitrio assumit, in quibus problema est rationale, eosque solvit. Et sane tertio foret hoc aliquid, si methodum generalem exposuisset solvendi haec problemata in numeris rationalibus, quoties fieri potest; sed ille si quid credi potest sumsit exempla aliunde nota, eaque in speciem tantum methodo analytica investigavit. Quomodo autem infinita exempla reperiri possint, quibus problemata trigonometrica hujusmodi (quae scilicet non aliae rectae ingrediuntur, quam latera, segmenta baseos, perpendicularis et ex his orta, nempe summae, differentiae, rationes, rectangula etc.) in numeris rationalibus exhiberi queant, id quoniam Cl. Montfortius non docuit, et usum tamen saepe habere potest, exponam quia facile est. Nimirum (fig. 78) si duo sint in numeris rationalibus triangula rectangula ADB et CDB habentia unum latus circa rectum BD commune seu aequale, ex illis in unum compositis fiet triangulum ABC, quod non latera tantum, sed et altitudinem et segmenta baseos, adeoque et quae ex his oriuntur rationalia habebit: sed quomodo habebimus duo triangula rectangula rationalia latus circa rectum commune habentia? Respondeo, id quoque facillimum esse; datis enim duobus triangulis rectangulis rationalibus quibuscunque, inde bis fabricari poterunt duo alia triangula rectangula rationalia latus circa rectum commune habentia. Exempli causa duo sunt simplicissima triangula rectangula rationalia in numeris integris, nempe unum cujus latera circa rectum 3 et 4, hypotenusa 5, alterum cujus latera circa rectum sunt 5 et 12, hypotenusa 13. Quodsi volumus inde facere duo triangula rectangula latus unum circa rectum commune habentia, multiplicemus per crucem, triangulum 3, 4, 5 per 5 et fiet 15, 20, 25, et triangulum 5, 12, 13 per 3 et fiet 15, 36, 39. Idem aliter praestare possumus ex iisdem assumtis, multiplicando

triangulum 3, 4, 5 per 4 et fiet 12, 16, 20,
triangulum 12, 5, 13 per 1 et fiet 12, 5, 13.

Possunt tamen et aliis modis reperiri duo triangula latus circa rectum commune habentia, scilicet generaliter quot modis fieri potest in numeris rationalibus, ut sit ab aeq. cd, vel ut sit aa—bb aequ. cc—dd, vel denique ut sit 2ab aequ. cc—dd, habebuntur enim duo triangula rectangula rationalia quorum latera

2ab, aa—bb, aa + bb
2cd, cc—dd, cc + dd

habentia unum latus circa rectum commune, tot igitur etiam modis haberi potest triangulum rationale, cujus altitudo et segmenta basis sint rationalia. Et sumto ex infinitis ejusmodi triangulis quocunque, quodcunque ex problematis a Cl. Monfortio hic solutis eodem modo solvi poterit, quo ab illo factum est; quod sane nulla analysi indiget, cum ea ratione jam tum notum sit quod quaeritur, licet tractetur perinde ac si ignotum adhuc et quaerendum esset.

Sed nunc a nobis jure postulari videbitur, ut solutiones geometricas exhibeamus. Quod ut cum fructu aliquo fiat, in re alioqui sterili, placet modum ostendere quomodo pleraque solvi queant sine calculo, et viam inire, quae praebeat specimen analyseos cujusdam linearis, ab analysi algebraica sive calculatoria plane diversae; ita simul fortasse lucem aliquam analysi Veterum affundemus, quae consistebat in usu D a t o r u m, cui juvando etiam librum suum de Datis Euclides scripserat, in quem extat Marini, veteris philosophi, ὑπόμνημα. Problemata igitur primum et (Monfortiano ordine) quintum haec sunt: Data differentia segmentorum

baseos AD, DC (fig. 79), ratione lateris AB ad differentiam vel aggregatum laterum AB et BC et denique angulo A, invenire triangulum ABC. Quod sic vestigabimus: In segmento majori AD sumatur DE aequalis minori segmento DC, erit AE differentia segmentorum data; jungatur BE. Datur ratio lateris AB ad differentiam (aggregatum) laterum AB et BC, ergo datur ratio laterum AB, BC inter se, quemadmodum notum est. Et ob datum angulum A datur ratio BD ad AB; jam datur ratio AB ad BC (ut paulo ante ostendimus), ergo datur ratio ex his composita BD ad BC, ergo datur angulus C. Datis jam trianguli duobus angulis A et C, datur et tertius ABC. Omnes ergo trianguli quaesiti ABC angulos habemus. Porro datur angulus CBD, supplementum ipsius inventi C ad rectum; ergo et datur angulus EBD (ipsi CBD aequalis, quia ED et CD aequales), datur et angulus ABD (supplementum ipsius dati A ad rectum), a quo si inventus angulus EBD auferatur, habebitur residuus ABE. Trianguli ergo BAE habebuntur anguli duo, A et ABE, ergo et tertius AEB. Habentur ergo omnes anguli trianguli BAE, habetur et unum ejus latus AE (differentia segmentorum baseos data), ex quibus habitis habetur ipsum triangulum BAE (et geometrice quidem, ut ostendam in solutione sequenti), ergo et latus ejus AB, ergo et trianguli ABC, cujus etiam omnes anguli habentur; habetur unum latus AB, habetur ergo ipsum Triangulum ABC quaesitum, quod desiderabatur. Ex hac analysi lineari, quemadmodum alias ex calculatoria, facile fuisset constructionem elicere, eamque synthetice demonstrare, dissimulata analysi seu inveniendi ordine; sed haec non tam problematis, quod tanti non est, quam analyseos causa attulimus.

Problema quartum nihil differt a primo: problemata secundum et tertium non differunt inter se, ut ostensum est. Solutio eadem quoque methodo facile habebitur, sine ullo calculo, per solam analysin linearem. In triangulo ABC (fig. 80) dato angulo C, et data FC differentia inter AD et DC, segmenta baseos, datoque CH aggregato (vel etiam differentia, quanquam id inter problemata proposita non sit) laterum AB, BC circa verticem, quod aggregatum CH habetur si in producta CB sumatur BH aequal. AB, quaeritur triangulum. Jungatur FH. In triangulo FCH datur angulus C et duo latera CH, CF, ergo datur triangulum et q u i d e m non tantum trigonometrice seu per Tabulas, sed et geometrice, nam ex F ducta FG perpendiculari ad CH, habemus duo triangula rectangula FGC et

FGH, et in priore dato uno latere FC et uno angulo C, dantur reliqua ut constat, nempe latera FG, GC. Habita jam recta GC, detrahatur a data CH, habebitur HG. Habitis HG et FG, habetur FH. Habemus ergo trianguli FCH tria latera CH, CF, FH geometrice, ex dato angulo et duobus lateribus, quod jam in problematis primi solutione assumseramus. Ergo datur et angulus ejus FHC. Jam triangulum HBF est isosceles (quia tam BH quam BF aequales ipsi AB, ergo cum detur angulus ejus FHB (sive FHC), dabitur et ei aequalis HFB. Datis ergo trianguli HBF duobus angulis et basi FH, dabitur ipsum, et geometrice quidem ad modum eorum, quae proxime ostendimus. Datur ergo et latus HB vel BF, id est AB. Quod si auferatur a dato CH, dabitur residuum BC. Habemus ergo AB, BC et angulum A, unde caetera statim habentur. Solvimus ergo problemata secundum et tertium, quae huc redire ostendimus. Et alia eis similia, si scilicet differentia aggregato substituatur. Problema quintum solventis Monfortii seu septimum proponentis solutum est cum primo.

Quod sexto loco a Cl. Monfortio tractatum est, ejus calculum assurgere ad quadrato-quadratum ostendit ipse Monfortius, ac proinde innuit sua natura esse solidum, etsi in quibusdam casibus facilioribus studio quaesitis, qualem exhibet Monfortius, deprimi queat. Inuere autem videtur sequentia sex esse etiam solida, quia negat se plus quam sexies eandem methodum ponere velle. Et sane in speciem talia sunt, sed non animadvertit omnia deprimi posse et esse plana demto uno decimo, quod coincidit cum sexto. Et sane, si quid judico, a Cl. Monfortio problematum solutionem aggredienti expectandum saltem erat, ut quae plana, quae solida essent, judicaret. Quod certe aut omnino non fecit, aut non recte fecit. Ego vero deprehendi omnia esse plana praeter dicta duo, quod in singulis ostendam. Nonum itaque, ut hinc neglecto ordine incipiam, etsi solidi speciem habeat et calculum ad quadrato-quadratum attollat, tamen planum esse sic ostendo: In eo duo sunt quadrata, unum ab uno latere recta data aucto, alterum a recta data. Et dicitur ratio dari prioris ad excessum suum supra posterius, sive dicitur dari ratio unius ad differentiam ab altero. Jam vero quoties hoc fit, toties datur ipsa duarum quantitatum ratio inter se. Datur ergo ratio quadrati ab uno latere recta data aucto, ad quadratum rectae datae. Sed data ratione duorum quadratorum, datur et ratio laterum, ergo datur ratio lateris recta data

aucti, ad rectam datam; et redivimus ad problema planum, omnium hactenus tractatorum facillimum. Nam cujus datur ratio ad datum, id ipsum datur, datur ergo unum latus recta data auctum. Quod autem dato auctum datur, id simpliciter datur. Datur ergo unum latus. Problema ergo 9. reductum est ad hoc: Dato uno angulo ad basin, uno latere ad verticem, et differentia segmentorum baseos, invenire Triangulum, quod utique facillimum est. Nam si datum latus AB (fig. 81) sit ad datum angulum A, dabitur utique et (ob angulum datum) ratio AD ad datum AB, ergo datur et AD; unde caetera habentur. Quodsi detur angulus A et latus BC, tunc in basi si opus producta sumatur DF aequal. AD, erit CF differentia segmentorum baseos data. Jungatur BF quae erit aequalis ipsi AB, et angulus F angulo A dato. Itaque in triangulo BFC datur angulus F et duo latera BF, CF, ergo datur triangulum geometrice per supra ostensa. Ergo dabitur et latus BF seu AB, unde ob datum angulum A habebitur et AD, adeoque et AC, id est dupla AD ademta data CF.

Eodem fere modo et problema duodecimum sive ultimum solvetur. Nam datur in eo ratio quadrati ab aggregato laterum, plano dato auctum, ad planum quoddam datum. Datur ergo quadratum ab aggregato laterum plano dato auctum. Ergo datur ipsum quadratum ab aggregato laterum. Dato autem quadrato dabitur id cujus est quadratum. Datur ergo aggregatum laterum, et recidimus in problema 2. supra solutum. Sed et probl. 8. planum esse comperietur: Nam datur in eo ratio quadrati a latere minori circa verticem ad rectangulum sub data et sub eodem latere eadem data aucto. Ergo datur ipsum latus per constructionem planam, quod sequi sic ostendo. Posito enim id latus esse y, datam esse a, dabitur ratio: yy ad $y+a$ in a seu ad $ya+aa$, eadem cum data ratione b ad a, ergo fiet $yy : ya+aa :: b : a$ seu yy aequal. $by+ba$, quae aequatio plana est, cujus constructio simplicissima et satis nota. Habemus ergo latus y. Dato autem latere uno trianguli circa verticem, angulo uno ad basin, et differentia segmentorum basis, dari triangulum paulo ante ostendimus. Habetur ergo solutio problematis 8. Quod de latere minori ostendimus, eodem modo praestari potest et in majori. Unde proponens problema incongrue de solo minori concepit.

Quin imo et problema septimum (Monfortiano ordine, at sextum proponentis) quod maximam solidi speciem habet, planum esse comperi. Datur enim in eo ratio quadrati lateris unius cum rectangulo sub lateribus, ad quadratum lateris alterius. Sed hinc ajo dari rationem laterum inter se. Sunto enim latera z et y, erit ratio $zz+zy$ ad yy eadem datae b ad a. Sumatur alia recta e quae sit ad a. ut z ad y, fiet: z aequ. $\frac{ey}{a}$ eritque $\frac{eeyy}{aa} + \frac{eyy}{a} : yy :: b:a$ et fiet $ee+ae$ aequ. ab; habetur ergo e per constructionem planam simplicissimam jam satis notam, adeoque et ratio ejus ad datam a, ac proinde etiam ratio z ad y, seu ratio duorum laterum circa verticem. Recidimus ergo in problema 1. Ergo et problema septimum solutum habetur.

Postero inveni et problema undecimum planum esse, in quo datur aggregatum quadratorum laterum circa verticem. Insistendo literis Cl. Monfortii sit (fig. 82) AB, z et BC, y et CD, x et differentia inter AD et CD data sit a, nempe AF vel AG, et angulus A vel GAF etiam datus. Hinc data quoque ratio AB ad AD seu z ad $x+a$ sive AG seu a ad AH seu b. Denique datum aggregatum laterum $zz+yy$, quod sit aequ. cc quadrato a recta data c vel AL. Ex natura trianguli differentia quadratorum laterum $zz-yy$ est aequalis $2ax+aa$ sive rectangulo sub intervallo segmentorum a et basi AC, $2x+a$. Ergo $2zz$ est aequ. $2ax+aa+cc$, seu zz aequ. $ax+\frac{aa+cc}{2}$. Est autem z aequ. $\frac{a}{b}\overline{x+a}$, ergo x aequ. $\frac{b}{a}z-a$. Habemus ergo: zz aequ. $bz-aa+\frac{aa}{2}+\frac{cc}{2}$ seu zz aequ. $bz+\frac{cc-aa}{2}$. Unde facilis constructio est, nam si triangulum rectangulum fiat cujus latera circa rectum sint dimidia AH, et alia recta quae possit dimidium excessus quadrati ab AL super quadratum ab AF, ejus trianguli hypotenusa, assumens dimidiam AH, erit latus AB trianguli quaesiti ABC, unde caetera habentur.

Restant duo tantum problemata. sextum ordine solventis Monfortii (quod proponenti quintum est) itemque decimum, sed supra ostendimus decimum ab hoc sexto reapse non differre. Ipsum autem sextum, qui generaliter solvere volet, solidum esse deprehenderet, cum scilicet praeter segmentorum baseos differentiam et unum ad basin angulum datur rectangulum sub lateribus circa verticem. Servatis enim iisdem literis eodemque (qua licet) calculo, quem paulo ante adhibuimus, habemus: $zz-yy$ aequ. $2ax+aa$,

x aequ. $\frac{b}{a}z-a$ ob data omnibus problematis nostris communia, unde fit: $zz-yy$ aequ. $2bz-2aa+aa$ sive $zz-yy$ aequ. $2bz$ aa. Jam ob data hujus problematis propria esto rectangulum zy aequale plano dato cc, fiet: y aequ. $\frac{cc}{z}$ et yy aequ. $\frac{c^4}{zz}$, quem valorem substituendo in aequ. praecedenti fiet: $zz-\frac{c^4}{zz}$ aequ. $2bz-aa$, tollendoque fractionem atque ordinando z^4-2bz^3+aazz aequ. c^4. Quae aequatio (tractabilior Monfortiana) licet sit quadrato-quadratica, cum tamen sit admodum simplex, nec proinde ullo praeparationis artificio indigeat, facillime per Circulum et Parabolam, vel per Circulum et Hyperbolam construi potest secundum methodos vulgo notas. Itaque immorari istis supervacuum foret. Quod autem problema generaliter ac per se sit solidum, ita ostendemus: Pro z substituatur $\frac{cc}{y}$, habebitur $\frac{c^4}{yy}-yy$ aequ. $\frac{2bcc}{y}-aa$ seu $y^4-ayy+2bccy$ aequ. c^4, quam generaliter et per se solidam esse sic demonstro. Omnis aequatio quae in aliquo exemplo est solida, ea generaliter sumta seu per se solida est, vel quod idem est, generalem depressionem non patitur. Utique enim alias generalis illa depressio speciali exemplo accomodaretur contra hypothesin. Nostra autem novissime dicta exemplum habet, quo indubitabiliter solida est. Ponatur enim primum in casu aliquo speciali esse b aequ. $\frac{1}{cc}$, tunc 2bcc erit aequ. 2, et loco proximae aequationis habebimus: $y^4-aayy+2y$ aequ. c^4. Rursus in eodem exemplo ponamus praeterea esse a aequ. 0, et c etiam aequ. 0, tunc evanescent termini aayy, item c^4, et restabit tantum: y^4+2y aequ. 0 sive y^3 aequ. -2, quod problema est solidum, nam radix ejus negativa est una duarum mediarum proportionalium inter 1 et 2, sive habetur per duplicationem cubi. Problema igitur sextum adeoque et decimum sua natura solidum est. Atque ita praestitimus circa haec problemata omnia quicquid poterat desiderari. Quae solida sint, talia esse demonstravimus, eaque aequatione tam simplici expressimus, ut notis et apud Cartesium Slusiumque extantibus regulis brevissime construi possint a quovis Tirone, itaque constructionem ipsam huc transcribere foret tempore abuti. Caetera et plana esse demonstravimus, et quomodo ex aliis problematibus jam datis dentur, ostendimus, ut nihil praeterea addere operae pretium sit. Addidimus tamen, quomodo exempla solutionum in numeris rationalibus infinita nullo negotio habeantur. Caetera praestare tironis exercitationi magis conveniet.

Velim autem in his problematis quae plana ostendimus, animadverti usum analyseos linearis Veterum, qui sane tantus est, ut si quis ea neglecta sine discrimine solam recentiorum algebram adhibeat, in calculos ingentes se induere possit. Saepe enim altissime assurget et anxius inquirere cogetur depressiones, nisi paulo ante problema profundius inspiciat; plerumque etiam in constructiones incidet contortas et minime naturales, quas evitabit si cum Veteribus subinde usum Datorum adhibebit et cum analysi recentiorum opportune miscebit. Sciendum enim est, quod pauci animadverterunt, duplicem esse analysin, unam qua problema unumquodque resolvitur per se, et incognitae habitudo ad cognitas investigatur, alteram qua problema propositum reducitur ad aliud problema facilius, quod fit usu Datorum, quando ostenditur uno dato haberi et aliud. Et prior quidem Methodus Algebraica est, quam a Vieta et Cartesio maxime celebratam, recentiores hodie solam analysin esse putant, cum tamen altera methodus et Veteribus usitata fuerit, quod multis exemplis ostendi posset, et suas quoque certas et constantes regulas habeat, et difficultatem magis dividat in partes, atque ideo soleat feliciores exhibere solutiones magisque naturales, et intellectum non per symbola sed ipsas rerum ideas ducat. Unde aestimandum tibi relinquo, Vir Clarissime, quam longe adhuc absit analysis, quae hodie passim in usu est, a perfectione vulgo jactata.

Quod vero Cl. Monfortius ad te scribit se problemata haec aggressum, ut vim analytices experiretur in his quoque, ubi inter data habetur angulus, quibus casibus Ghetaldus et Beaugrandius Analysin Speciosam haerere putent; item hinc disci posse artem solvendi problemata trigonometrica sine usu tabularum, id meo judicio admitti non potest. Quanquam enim non meminerim, quae sit horum scriptorum sententia, illud tamen scio, Geometras cum negant calculum circa angulos in potestate esse, non intelligere angulos ita datos, ut hoc loco cum Monfortio et aliis assumsimus, cum scilicet angulus rectus determinatur (ut cum positione dantur rectae AB, AC (fig. 83) angulum A comprehendentes, vel cum datur ratio laterum AB, AD in triangulo rectangulo ADB) et nihil aliud quaeritur, quam aliae rectae ex datis

rectis, sed tum demum Geometras difficultatem agnoscere, cum angulus datur per numerum graduum, sive per rationem arcus BE cui ex centro A insistit, ad totam circuli circumferentiam, et quaeruntur inde latera seu rectae, vel contra cum lateribus datis vel rectis determinantibus numerus graduum seu ratio arcus ad circumferentiam desideratur, tunc enim Geometrae hactenus omnes ad tabulas quas vulgo Sinuum vocant, recurrere coacti sunt, fassi neque Algebram neque Geometriam constantes solvendi regulas praebere. Quod adeo verum est, ut asseram ego algebram in his non tantum imperfectam sed et impossibilem esse, sive ut rem exemplo explicem, dato sinu toto AE et BD sinu anguli BAE, ajo impossibile esse per algebram invenire sinum FG anguli FAE, posito arcum FBE esse ad arcum BE, ut diagonalis quadrati est ad latus. Tale enim problema, quemadmodum facile demonstrare possum, neque est planum neque solidum, neque tertii aut quarti aut quinti, aut ullius alterius gradus, nec proinde per ullam earum curvarum, quas solas Cartesius in Geometriam recipi voluit, construi potest. Quod rursus signum est, non tantum analysin Geometricam (quae sola algebra nititur) esse imperfectam, sed et alias adhuc curvas Geometricas excogitari debere, quae Algebraicae quidem non sint (nec proinde relationem habeant ordinatae ad abscissam ex axe, aequatione quadam certi gradus explicabilem), possint tamen motu continuo describi. Ubi vero curvas excludo, cycloidi similes, etsi enim accurate describi possint, tamen assumunt curvae materialis applicationem ad planum tangens vel quod eodem redit extensionem fili curvae materiali applicati in rectum, quod perinde est ac si quis Geometra sphaeram aqua replens et eandem aquam mox inde in rectangulum solidum effundens, se sphaeram cubasse dicat. Hujusmodi enim constructiones a Geometris non desiderantur, etsi rectae sint, et probae, et nonnunquam adhibendae donec meliores inveniamus. Assero autem posse inveniri novum curvarum Geometricarum genus, quae solo rectarum materialium seu regularum motu constante et ab uno principio dependente, continuo tractu describantur, ac proinde aeque sint Geometricae ac ulla earum quas Cartesius exhibet; his curvis ajo problemata algebram transcendentia solvi posse perficique Geometriam. In locum quoque Aequationum Algebraicarum, quae scilicet sunt certi gradus, ut planae, solidae, sursolidae etc., novum plane calculum introduco problematibus transcendentibus inservientem, adhibitis aequationibus infinitis. Quod inventum, cum sit inter praestantissima censendum, maximique in tota re Mathematica usus, exemplo illustri declarabo: Anguli BAE vel arcus BE sit tangens EH, secans AH; hanc tangentem EH vocabo t, radium AB vocabo r, et arcum BE vocabo a; ajo hanc aequationem haberi a aequ. $t - \frac{t^3}{3rr} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - \frac{t^{11}}{11t^{10}}$ etc. in infinitum. Ope hujus aequationis in Triangulo rectangulo AEH ex datis lateribus habebuntur anguli, sine ullis tabulis, calculo tam exacto quam quis velit, modo radius r sit latus circa rectum majus et tangens t minus, et quidem aequatione ejusmodi exactus continetur valor arcus, quia continentur in ea omnes appropinquationes simul in infinitum. Nam si terminos priores quotlibet ut $t - \frac{t^3}{3rr} + \frac{t^5}{5r^4}$ assumas, error semper erit minor termino proxime sequenti ut $\frac{t^7}{7r^6}$, ergoque tam parvus quam velis, nam posito t esse minorem quam r, patet terminos istos t, $\frac{t^3}{rr}$, $\frac{t^5}{r^4}$, $\frac{t^7}{r^6}$ etc. continue decrescere in progressione geometrica; quae autem sic decrescunt, ea satis promte evanescere constat. Arcu autem in numeris quantumlibet exactis hac ratione invento, dabitur etiam ratio ejus ad circumferentiam numeris Ludolphi Coloniensis expressam; ergo quantitas anguli seu numerus graduum t et r, seu AE et E(H) sunt aequales, quod fit cum arcus (B)E est quadrans circuli, tunc loco aequationis prioris (B)E seu a aequ. $t - \frac{t^3}{3rr} + \frac{t^5}{5r^4}$ etc. fiet (B)E aequ. $r - \frac{r}{3} + \frac{r}{5} - \frac{r}{7}$ etc. ac proinde, si radius circuli sit 1, erit arcus quadrantis $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc., vel si quadratum diametri sit 1, erit area circuli $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. Quod a me inventum theorema summos Geometras, quibus ostendi, mirifice delectavit. Nec puto in numeris rationalibus simpliciorem atque elegantiorem magnitudinis circuli expressionem reperiri posse. Appropinquatio autem subita non ab his, sed a generali theoremate petenda est, assumendo arcum quadrante minorem, cujus data sit ratio ad circumferentiam, ut tangens quoque in numeris quantum satis est exactis habeatur. Quodsi Ludolphi Coloniensis tempore nota fuisset haec methodus, ne centesima quidem laboris parte ipsi opus fuisset.

Contra ex datis angulis et uno latere reliqua latera investigaturus alia opus habet aequatione infinita, quae neque facilitate neque elegantia priori cedit: eam vero alias exponam, nunc specimen dedisse contentus, unde intelliges, quanta hinc geometriae etiam practicae accessio habeatur. Cum enim nihil sit trigonometricis problematibus frequentius atque utiljus, quae hactenus sine tabulis satis exacte expediri non possunt, tabularum autem libros per terras et maria circumferre non sit in potestate; nos inventis regulis facillimis, et quarum semel perceptarum ne oblivisci quidem possis si velis, et quibus nullo negotio etiam ultra ipsam tabularum exactitudinem ire liceat, scientiam tam indecora servitute absolvimus, ac nunc denique effecimus, ut Geometra ingenio fretus libris carere possit.

Atque haec quidem, Vir Celeberrime, ideo tibi scribenda putavi, primum ut tuo judicio probata, quod multorum instar est, per te, si tanti tibi videntur, ad alios perveniant, in Italia inprimis vestra doctos viros, quorum sententias libenter audiam, deinde ut illi qui sibi persuasere Analysin Mathematicam nihil ab Algebra differre, aut jam ad vestigium pervenisse, noxio scientiae augmentis errore liberentur. Scio summos in Italia esse Geometras, Romae Riccium et Grandium, quibus P. Honoratus Fabry et si adhuc ibi agit Joh. Alphonsus Borellus addi posse videntur, Florentiae Vivianum, Petavii Renaldinum, ut alios taceam. Hi etsi Algebrae intelligentissimi, mecum tamen opinor persuasionem damnabunt, quam in quibusdam locis maxime inter eos qui Cartesiani appellantur, invalescere video, quasi in Algebra, quam vocant Speciosam, inprimis qualem Cartesius tradidit, omnium problematum solutio contineatur, quoniam scilicet Cartesiani vulgo fere non nisi minoris momenti ususque problemata attingunt, qui si vel trigonometriam recte considerassent, aliter sentirent.

Porro vera Algebrae incunabula Italiae jam a superiori seculo debentur. Primarius enim finis Algebrae est, invenire valorem incognitae quantitatis, sive formulam quandam si licet finitam, qua exacte exprimatur radix aequationis. Et quidem ejusmodi formula jam satis habebatur ex Veteribus, quando aequatio non excedebat quadratum. Sed quando aequatio est cubica, primus formulam radicis invenit Scipio Ferreus et post eum Nicolaus Tartalea, a quo didicit Cardanus. Nam si aequatio cubica generalis a secundo termino liberata sit

$$x^3 + px \text{ aequ. } q,$$

radix generalis erit

$$x \text{ aequ. } \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}},$$

quod inventum ego inter praestantissima censeo. Proximum est inventum Ludovici Ferrarii Bononiensis, qui Cardano familiaris fuit, et cujus vita etiam extat inter Cardani opera. Is primus invenit modum reducendi aequationem quadrato-quadraticam quamlibet ad cubicam. His duobus inventis omnia problemata solida per algebram absoluta habentur, et revocantur vel ad trisectionem anguli, vel ad inventionem duarum mediarum proportionalium inter duas datas. Neque quisquam hactenus generalem pro altiori aliqua aequatione radicis formulam dedit, quanquam ego aditum ad eam rem reperisse mihi videar, cujus et specimina habeo, sed prolixi calculi necessarium taedium devorare nondum vacavit. Vieta autem et Cartesius cum ultra progredi non facile possent, alio flexere, ille quidem ad Exegesin numerosam, hic vero ad linearem. Quod vero proprie Algebraicum esset, nihil admodum adinvenere, etsi summos fuisse Geometras et usum inprimis Algebrae in Geometria eos pro parte aperuisse non negem. Quae ideo adjeci, Vir Clarissime, ut populares tuos autoritate tua excitem ad colendam porro scientiam, quam majores eorum tantis incrementis auxerunt. Vale.

V.

DISSERTATIO EXOTERICA DE STATU PRAESENTI ET INCREMENTIS NOVISSIMIS DEQUE USU GEOMETRIAE.*)

Quae cum saepe mihi cum variorum studiorum hominibus communicatio est, audire subinde fecit querelas de vanitate Geometriae, quibus illa frustra opponat demonstrationes suas, quando

*) Leibniz hat später darüber geschrieben: De usu Geometriae Statu praesenti ac novissimis ejus incrementis.

non de veritate, sed usu quaeritur. Scilicet non inepte jactatur, laborare nos intemperantia studiorum, unde nihil redundet in vitam; utilia pleraque dudum inventa esse, aut si qua supersint, non esse speranda a Geometria. Pro Scholasticorum nugis (sic enim illi vocant, nescio an jure) nunc passim explosis alias introduci nugas, magis speciosas, sed et magis difficiles. Parum accessurum generi humano, si duae proportione mediae inveniantur inter duas datas, nisi forte redeunte oraculo Delphico pestem aliquando accurata cubi duplicatione depelli regionibus posse credamus. Illam vero toties imprudenter jactatam, toties vane promissam circuli Quadraturam, quid tandem producturam putemus, an forte aurum philosophicum sive Lapidem illum mirificum quatuor Elementorum velut lateribus in unius circuli circumferentiam coeuntibus indissolubiliter compaginatum, quemadmodum disserebat Michael Mayerus Chymista, Rosae-Cruciorum assecla, peculiari tractatu de circulo quadrato. Sunt qui vix risum continent si de parabolis aut hyperbolis loquare; quid facerent si scirent, geometras ad quartas dimensiones et sursolida ascendere, quae adeo nusquam sunt, ut nec intelligi possint. Campum aliquem metiri, aut horologium solare describere, aut castelli formam delineare, in eo omnem Geometriae laudem sitam putant. Algebrae vero sunt qui nec nomen ferre possint, quemadmodum de se ait Fortinus de la Hoguette in testamento. Scilicet crucem ingeniis figi, et novas excogitari scientias, quasi non satis veteres praebeant, quod agamus, aut quasi vita longa sit, ars brevis. Et memini egregios quosdam viros mirari Cartesium de se fassum, quam male ut multis videri possit tempus collocaverit, sex septimanis integris in una Pappi quaestione consumtis. Alii quando Geometras ad naturae opera explicanda accedere vident, et de apum cellis aut sexangula nivis forma, aut aquae salientis limen ratiocinari, Aristophanis jocos renovant, qui Socratem introducit pulicum saltus curiose metientem. De mechanicis autem ita sibi aliisque persuadent, parum profici Geometrarum subtilitatibus, quibus materia reluctetur: inutilem eorum diligentiam fuisse, qui Cartesii autoritate aut rationibus persuasi, hyperbolas polire aggressi sunt, et inventa pulcherrima casui potius aut superficiariis ratiocinationibus quam Mathematicorum profunditati deberi testimonio esse posse, tubi optici concinnatorem primum hominem literarum expertem. Denique Cartesium ipsum in flexu aetatis, versis ad physicam studiis, Geometriae solenniter renuntiasse. Haec et his

fortiora dicuntur passim a viris etiam doctis et prudentibus, dum
vero inprimis clam causas irarum habent, ut Scaliger in Clavium et
Vietam, nec abnuo subesse aliquid veri, et saepe plus promittere geo-
metras, quam praestare possit Geometria, et magna theorematum
farragine memoriam obrui et acriore figurarum contemplatione
animi vigorem labefactari, qui rebus agendis servari debet; quare
operae pretium erit paucis exponere quantum ab accuratis rerum
aestimationibus ....*) quis sit verus ejus in
vita usus, et quousque ab homine indulgendum videatur scientiae
pellaci.

Geometrae nomen, ut hinc ordiar, semper latius apud erudi-
tos, quam apud vulgus patuisse. Geometria enim plerisque videtur
scientia figurarum tantum, de Lineis, de Triangulis, de Circulis, de
Solidis, de Cylindro, Cono, Sphaera. Docti vero ita judicant, unam
eandemque esse scientiam illam quae per omne rerum genus dif-
fusa accuratas et in longum protractas ratiocinationes exercet.
Quemadmodum enim Oceanus idem est, qui prout varia litora alluit,
nunc Atlanticus, nunc Aethiopicus, nunc Indicus appellatur, ita ea-
dem sciendi ars omni argumento apta variorum theorematum vel-
ut sinus facit. Unde constat Veteres cum Apollonium geometrae
nomine velut praecipuo honestassent, omnibus doctrinae solidioris
laudibus a se cumulatum credidisse: et hodieque si quem hoc no-
mine homines in his studiis versati appellent, ab ingenio illo ma-
thematico laudare quod per longinqua et difficilia non tentandi arte
aut divinandi felicitate, sed quodam animi vigore sibi viam facit;
itaque et Aristotelis Analytica geometrice scripta dicere ausim, quae
in demonstrationes redigere non difficile, et si quis res Metaphysi-
cas pari rigore tractaverit, ei Geometrae laudem non abnuerim,
etsi nec aequationes unquam nec figuras cogitarit. Diophantum
quoque fateor et Fermatium in mediis numeris Geometras egisse,
et Archimedem ac nostro tempore Galilaeum non minora in Me-
chanicis quam in Tetragonisticis aut Centrobarycis Geometriae spe-
cimina dedisse, Cartesium autem magno ingenio id egisse, ut phy-
sica ipsa quantum licet Geometrica esset. Nec dubitem de eo quod
justum aut utile est, de numero habitantium, de pretio rerum, de
re mercatoria aliisque multis dici posse quae Geometriam sapiant,

*) Schadhafte Stelle des Manuscripts.

certitudine pariter dogmatum et eruendi difficultate. Geometriam
ergo tueri idem est ac ratiocinandi severitatem defendere, quae
longo mentis itinere characterum aut figurarum auxilio incorrupta
recurrat. Unde sunt aliqui qui se geometras esse ignorant ipsi,
cum severe tamen et profunde in eo quod intelligunt argumento
ratiocinentur.

Ego qui me non ante autores capere arbitror, quam origines
intelligam fontesque unde egregia cujusque inventa manarint, duo
eorum qui inventores habentur summa genera notavi, aliisque in-
genia geometrica, aliis combinatoria esse. Qui geometrico sunt in-
genio, eorum inventa difficilia sunt et profunda, et multa medita-
tione expressa. Qualia nec facile enuntiantur nec statim a quovis
auditore aut spectatore intelliguntur. Exemplum elegans habemus
in machina textrice, nunc passim frequentata, Scoti cujusdam in-
vento, quod novennio integro occupavit autorem suum, aut in
arithmetico instrumento, quod omnem animi laborem in rotas
transfert.

Combinatoria ingenia plus habent felicitatis, minus laboris;
simplicia sunt inventa eorum et paucis verbis tota dicuntur, ut
plerumque animadversione potius quam meditatione indigeant ac
levi magis animi ictu, quam subtili indagatione parentur. Petuntur
enim fere ex rebus e medio positis, certa quadam relatione con-
nexis, aut experimentis quae hactenus pro sterilibus habita, felici
conjunctione subito usum inveniunt. Acus magneticae vim di-
rectricem, credibile est, diu incultam jacuisse opinione inutilitatis,
donec genius aliquis non vulgaris vidit, quanti esset notam sem-
per habere mundi plagam. Quid facilius quam vaporem e rebus
calore sublatum in corpus densare, exempla balneorum ante ocu-
los erant, nemini tamen Graecorum Romanorumque in mentem
venit spiritum e vino elicere, quamvis testatus esset Galenus, quan-
tum illi debiturus esset qui separationem partium vini docere
posset, qualis lactis jam tum habebatur. Quod nuper prodiit arti-
ficium motus aequabilis pure mechanicum, felicis tantum combina-
tionis opus est, ut mirari queas nulli in mentem venisse, fieri
posse ut dum elateria per vices agunt, prima in eundem semper
statum restituantur, antequam ad ipsa revertatur ordo, quo fit ut
post breves admodum periodos ad eandem plane formam machina
redeat, adeoque idem quoque redeat effectus periodique fiant aequi-
diuturnae. Unde intelligi potest, aliquando homines longinqua perspi-