GEOMETRICA.

In dem fünften Bande sind die Abhandlungen Leibnizens, die sich auf die Characteristica geometrica und auf die Analysis situs beziehen, zusammengestellt; von den hier folgenden enthalten die ersten noch einige Beiträge in Betreff des Ursprungs und der Anwendung dieser von Leibniz neugeschaffenen Disciplin. Von dem Inhalt der Abhandlung I: De constructione, ist bereits die Rede gewesen*); sie ist insofern von Interesse, als Leibniz darin über die Veranlassung und über die ersten Versuche, eine der Geometrie eigenthümliche Analysis zu schaffen, referirt. — Die Abhandlung II: Specimen Geometriae luciferae, beabsichtigte Leibniz in der vorliegenden Form nicht zu veröffentlichen; in ihrem Aeussern gleicht sie einem im schnellen Fluge hingeworfenen Tableau, durch das Leibniz die Ueberzeugung gewinnen wollte, wie aus den einfachsten Fundamentalbegriffen und mit Hülfe seiner geometrischen Charakteristik ein lichtvolleres Gebäude der Geometrie aufgeführt werden könnte, als bisher geschehen.

Die Nummern III und IV können als Probe dienen, dass Leibniz nicht verschmähte, auch den elementarsten Lehren eine eingehende Aufmerksamkeit zu widmen, wenn es darauf ankam, sie auf eine den Forderungen der Wissenschaft angemessene Weisee zu

*) Bd. V. S. 135 ff.

behandeln. Nach seiner Ueberzeugung war dies zugleich der beste Weg, sie der grössern Menge zugänglich zu machen. Eine ähnliche Tendenz verfolgt Leibniz in der Abhandlung V, in welcher er die Geometrie gegen die Angriffe des unwissenden Haufens in Schutz nimmt.

Die folgenden Abhandlungen sind von Leibniz selbst veröffentlicht worden.

I.

DE CONSTRUCTIONE.

Ex quo Algebram ad lineas accommodare Vieta inprimis et
Cartesius seculum docuere, agnitum est a plerisque omnibus, ad
solvenda in Numeris problemata in quibus rectarum qua-
rundam comparatione cum aliis rectis designatarum
valor ac descriptio quaeritur, nihil fingi posse praestantius,
cum omnis difficultas problematis una aequatione inclusa sit, cujus
tantum radices quaeruntur. Sed illud tamen semper a praestanti-
bus Geometris objectum est, constructiones Geometricas calculi
vestigiis nixas plerumque ab illa simplicitate atque elegantia longe
abesse, qua Veteres implicata saepe problemata per synthesin ab-
solvere. Exemplo nobis esse potest constructio problematum so-
lidorum ope Circuli et Parabolae quam Cartesius tradidit, ubi
aequationis quadrato-quadraticae aut cubicae secundum terminum
tolli postulat, quo facto constat non mediocriter intumescere ae-
quationem etiam suapte natura simplicissimam. Et ea tamen for-
mula construendi Cartesio tantopere placuit, ut omnium quas quis
exoptare possit perfectissimam et generalissimam affirmaverit.

Haec cum inter veteres novosque Geometras studio partium
calentes agitarentur, moderatiores quanquam imperfectionem cogni-
tae analyseos literalis in constructionibus apparere agnoscerent,
non ideo tamen repudiandam putavere, tum ob ingentia commoda
in ipsa inveniendi arte, quae nullis Veterum Datis supplerentur,
tum quod spes esset posse aliquando ex ipsa Analysi aditum re-
periri ad artem syntheseos, qua constructiones elegantes et vete-
ribus dignae redderentur.

Mihi quaenam in hoc quoque argumentum incumbendi fuerit ratio, dicam vel ideo, quod plurimum inde lucis instituto meo accessurum arbitrer. Desarguesius et Pascalius filius, praestantes omnium consensu Geometrae, rem Veteribus, quantum ex servatis eorum scriptis judicari possit, intactam aggressi erant, *universalia Conicorum* demonstratione complecti, qua et harmonia sectionum coni appareret, et proprietates communes observarentur, et constructiones problematum quae in his lineis efficienda proponerentur fierent universales. Hoc illi institutum si absolvissent, totam nobis Geometriam solidorum sive secundi gradus perfectam insigni compendio dedissent. Sed quoniam synthetica methodo per theoremata praedemonstrata ad propositum eniti voluerant, mirum non est, aditum ad problemata difficiliora reperisse nullum, destituente eos patientia in ea itineris asperitate et anfractuum multitudine, quae schemata contemplantes et Conum mente versantes fatigabat. Quanquam autem opus imperfectum reliquissent, inimitabile tamen reddidisse visi sunt multis. Nam quas ipsi in solido et per synthesin generaliter demonstraverant Conicarum Linearum Harmonias, eas Analytici postea secuti re in planum traducta (quod fateor ingenti labore imaginationem absolvit) nondum exhibuere, ne ipso quidem summo Viro Johanne Wittio excepto, qui tamen Analysin Conicam omnium longissime promovisse videtur.

Hoc cum mihi de Analyseos ac Syntheseos comparatione sententiam dicenti nuper illustris Carcavius objecisset, agnoscentem vera dici ad tentandum excitavit, qua ratione eousque produci posset Analysis quo Synthesin perventuram pro desperato habebatur. Aggressus negotium vidi novis quibusdam characteribus opus esse, quibus variae signorum ambiguitates exprimerentur; vidi indivisibile atque infinitum calculo analytico misceri debere, quod unum non satis observasse videtur profundissimus caetera Cartesius; denique modum reperi analyticum, quo sectiones conicae perinde tractari possint, ac si unicum extaret figurae cujusdam genus sectionis conicae nomine, cujus figurae natura aequatione universali explicata centra, axes, vertices, focos, abscissas, ordinatas, tangentes, perpendiculares, nulla specierum Hyperbolae, Parabolae, Ellipseos, Circuli, Rectae mentione, statim prodat; unde theoremata universalia innumerabilia in promptu fuere, et ad omnium problematum conicorum aequationibus comprehensibilium solutionem communem mihi strata est via.

Restabat fastigium operis, problema scilicet problematum id genus omnium generale: *Formulam reperire, unam sectionibus Conicis et Aequationum formis omnibus communem, construendi problema solidum quodlibet ope sectionis conicae datae et circuli.* Hac enim formula reperta, problemata conica omnia (modo sursolida non sint) solo circulo et recta planorum instar construi, et quod non minoris est momenti, solutione Conicis omnibus communi comprehendi possunt. Sin desideretur, nec Universalia Conica ad finem perducta censeri possunt. Quod ut appareat, exemplum afferri utile est. Esto problema propositum: *ex puncto dato* D (fig. 30) *minimam sive perpendicularem* DY *ducere ad Conicam datam* AY. Patet hoc problema multos complecti casus, nam et quinque sunt Linearum Conicarum genera, Recta, Circularis, Ellipsis, Hyperbola et Parabola, et in qualibet trium inprimis posteriorum linearum specie quinque aut minimum quatuor habentur subdistinctiones pro vario situ puncti dati D; unde si quis problema plene solvere volet, in omnibus linearum specierum generibus et punctorum datorum casibus, ei novem minimum calculis constructionibusque separatis opus erit, et frustra sperabit absoluto uno calculo supplere caeteros conjectura: cum a me quidem calculo non magis operoso, quam si in uno tantum ex casibus difficilioribus fuisset laboratum, unica communis omnibus lineis casibusque aequatio reperta sit. Hanc jam aequationem communem, quae generaliter loquendo quadrato-quadratica est, fingamus esse:

$$y^4 + ly^3 + amy^2 + a^2n + a^3p \sqcap 0,$$

valore scilicet linearum l, m, n, p ambiguo, ut alibi a me docebitur, patet opus esse formula construendi hanc aequationem generali, quae neque signa neque valores terminorum moretur, adeo ut quivis ex terminis cognitis l, m, n, p possit intelligi major minorve alio vel etiam nihilo aequalis; alioquin formula non esset omnibus problematis casibus communis. Praeterea formula opus est, quae sit omnibus Conicis communis, ita ut ope ejus centrum radiusque circuli, cujus intersectione cum conica data solvi debet problema, una eademque methodo investigetur, qualiscunque etiam sectio conica in problemate data sit.

Formulam autem hujusmodi, si dicendum quod res est, hactenus prodidit nemo. Cartesiana enim formula Parabolae propria est; Amplissimus Huddenius aliam pro Hyperbola dedit non minus elegantem; uterque tamen opus habet praeparatione aequationis, quod calculos plerumque reddit prolixos. Inter eos quorum extant in hanc rem meditationes, longissime omnium progressus est Illustris Slusius, cui si in mentem venisset quaerere, quod ego mihi hoc loco proposueram, utique elegantius multo absolvisset; is ergo unam dedit formulam omnibus aequationum formis communem, nec praeparatione indigentem, sed non omnibus Conicarum speciebus: coarctatur enim ad intersectionem parabolae datae et circuli cujusdam inventi. Unde intelligi potest, rem constructionum non ita perfectam esse, uti nonnullis auditu potius aut superficiaria lectione quam attenta meditatione talia aestimantibus videri posset.

Mihi ergo necessarium visum est rem de integro red-ordiri. Quod dum facio, novisque artibus characterum ambiguorum usus institutum urgeo, primum in vias incidi jam impeditas ut pene de exitu desperarem; formulas enim prolixiores pro nihilo ducebam, nec nisi simplicibus atque elegantibus uti decreveram. Hoc me admonuit, non esse statim irrumpendum in calculum, sed accurata meditatione digerenda primum subsidia esse, unde aptiora eligi possint; alioquin evenit, ut in ipso limine superando defatigati aut resiliamus irriti coeptorum, aut non nisi recollecta mente novis viribus sumtis, sero ad exitum producamur. Nolo errationum mearum vestigia describere, quanquam id quoque profecto usus habiturum esset non contemnendos, nisi prolixitas deterreret; suffecerit hoc loco itinerarium dare cogitationum mearum, ex quo in veram viam coorta subito luce redierant.

Constructio est determinatio puncti quaesiti ductu linearum; ergo constructio eo censeri debet elegantior, quo lineae quas ducere necesse est simpliciores paucioresque sunt. Simpliciores autem censentur Geometricae mechanicis, et inter Geometricas eae quae gradus sunt inferioris, superioribus. Si duae sint ejusdem problematis constructiones, quarum altera paucioribus, altera simplicioribus lineis utatur, posterior praeferenda plerumque est; malim enim profecto decem describere circulos, quam conchoeidem unam, cum re accurate considerata ad descriptionem conchoeidis infinitis circulis, id est motu circuli integri per spatium, opus sit, cujus infinita vestigia pro totidem descriptis circulis haberi possunt. Hinc patet, non esse utendum linea superiore ad problema inferius, nisi ea linea superior jam tum adsit sive quod data sit in problemate, sive quod alia ex causa

describenda fuerit. Exempli causa, si quaestio sit de ratione inveniendi punctum flexus contrarii in conchoeide, constat problema sua natura esse solidum, sive sectionibus conicis efficiendum; quia tamen omnia problemata inferiora lineis superioribus solvi possunt, ideo rectius solvetur per conchoeidem datam et circulum; satius enim conchoeide jam descripta uti, quam novam curvam conicam describere.

Ex his intelligi potest, regulas constructionum elegantium easdem esse cum praeceptis parsimoniae ex arte oeconomica petitis, ne scilicet inutilibus utamur, aut ne quibusdam utilibus in nostra potestate sitis non utamur. Unde intelligitur data omnia minutim examinanda, ut appareat quid inde erui possit in rem nostram; datae autem sunt tum figurae sive lineae, tum quantitates sive valores quaesitarum linearum earumve potestatum. In datis lineis utique mutari potest nihil; sed quoniam constat, ad eandem lineam quaesitam dati valoris variis modis posse deveniri, pro vario datarum linearum usu, ideo quaeritur electio modi cujusdam prae caeteris facilis atque elegantis, id est valor simplicior dato factus ex dato linearum datarum facili in alias transmutatione. Sed quoniam ad ista non ante veniendum est, quam valor linearum pure habeatur, et vero saepe non ipsius lineae, sed potestatis ejus potestatumve diversarum aggregati valor habetur, ideo aequationis inde natae quaerendae sunt radices id est valores unus pluresve, qui lineae quaesitae tribuendi sunt ut aequationi datae respondere possit, iisque valoribus inventis, tum demum de ratione cogitandum est, qua reddi queant simplices. Verum quia saepe valores linearum quaesitarum puri per calculum exacte haberi non possunt, Geometria succurrit defectui Analyseos, et quod ista nominare non potest, efficit intersectione quarundam linearum. Hinc apparet, duo esse summa genera constructionum in Geometria, quemadmodum duo sunt genera operationum in Arithmetica: Algorithmum quem vocant quatuor specierum (qui additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem et horum combinationes varias complectitur) et Extractionem Radicum. Nam si sit $x \sqcap a - b + \frac{bc}{a} + d + \sqrt{da}$, patet ad habendam x additione quatuor quantitatum, subtractione unius b, multiplicatione ipsius b per c et divisione producti per a, ac denique radice ex da opus esse. Quae ut quam compendiosissime fiant, variae artes tum ab ips calculo, tum a Geometria suppeditantur: a calculo, ut si addenda sint $1a + 2a + 3a + 4a + 5a \sqcap x$, ponendo numerum terminorum $5 \sqcap d$ et proxime majorem $6 \sqcap d + 1$, fiet summa $\frac{ad^2 + da}{2} \sqcap x$ seu $15a$; a Geometria, ut si addenda sint $b^2 + c^2$, tantum rectae b extremo uno altera c normaliter imponatur, punctisque reliquis duobus extremis alterius cujusdam lineae ductu, erit hujus lineae quadratum aequale duorum quadratorum datorum summae: quam sane praxin non calculus, sed Geometriae pars a calculo independens docet, sed artis foret. Ex quo intelligi potest, Geometriam, quanquam calculo Algebraico subordinata sit scientia, suam tamen quandam peculiarem analysin habere, qua theoremata ipsi propria demonstrentur, et constructiones ultimae, calculo quantum licet contracto, tandem in lineis efficiantur.

Hanc Analysin Geometriae propriam videntur agnovisse ac tenuisse Veteres, cum in eorum scriptis agnoscere mihi videor vestigia quaedam, Algebrae praeterquam ubi de numeris agebatur nulla. Et vero quas illi hac arte detexere propositiones, nisi dudum haberemus, aegre quibus nunc utimur methodis inveniremus. Ejus artis prima lineamenta mihi videor assecutus rationemque reperisse, qua inventis symbolis aptis constitutisque principiis quibusdam caetera quadam calculi imitatione fieri possint, ne lineas imaginatione persequi necesse sit, quod nescio an habuerint Veteres. Intelligo, Clarissimum Aleaumium, Vietae aequalem, peculiarem quandam sibi fecisse characteristicam, qua amici ab eo mira praestari agnoscebant, sed cujus post ejus mortem vestigia superfuere nulla.

Ego cum Euclidis elementa nuper attente legerem, quod fateor a me fieri perraro, aut potius si de integro libro quaestio sit, factum hactenus nunquam, tria esse vidi propositionum genera: aut enim ex calculo pendent, quales sunt quae de rationibus ab eo demonstrantur, ac de quadratis, atque incommensurabilibus nonnullae; aut ex linearum ductu, quales sunt quae prioribus libris habentur pleraeque, de angulis, de perpendicularibus, de parallelis; aliae denique ex utrisque subsidiis inter se junctis. Hae propositiones aut theoremata aut problemata sunt. Theorematum elegantium calculi pariter ac Geometriae haec est natura, ut non possint nisi casu inveniri, nisi quis omnes ordine combinationes notionum (delectu tamen aliquo fateor habito quod peculiaris quoque artificii est) instituere velit, quo facto eum in theoremata in-

signia omnia incidere necesse est; at Problematum diversa est ratio, dato enim problemate desideratur ars quaedam solvendi certa, ita ut semper in nostra potestate sit exitum reperire; sin minus, nota est scientiae imperfectae. Animadverti autem, multa problematum calculi genera esse in nostra potestate, at problematum Geometriae purae nulla: nam exempli causa problema illud simplicissimum, rectam lineam invenire cujus quadratum datarum duarum linearum rectarum quadratis sit aequale, quis solveret quaeso, nisi theorema Pythagoreum jam extaret? Unde intelligitur, horum aliorumque multorum Geometriae purae problematum solutionem non arti ac methodo, sed memoriae nostrae deberi, Veterum autem ingenio ac felicitati; nam forte nec illis methodus fuit. Ingenium autem et felicitatem jugenda esse constat, quando methodus deest; methodus enim hominem mediocrem, quantum ad exitus certitudinem, aequat ingenioso qui de suo invenire possit, aut experto qui memoria ab aliis inventorum polleat, etsi tempore semper distinguantur, quod inexercitatus ac hebes, sed methodo instructus sibi majus suo quodam jure postulat. Fatendum est ergo, Analysin Geometriae hactenus perfectam non esse, cum sint problemata quorum solutio non nisi per synthesin habetur. Fortasse nulla sunt problemata (de iis semper loquor, quae possunt aequatione comprehendi) quae ex iis quae per synthesin habentur in Geometria pura, accedente Analysi calculi, solvi non possint; sed elegantissimas omnium constructiones eligere ex calculo dato, res est non nisi ab illa quam supra tetigi arte symbolica, Geometriae peculiari, expectanda.

Hoc loco vero Symbolicam illam novam non attingemus, cum peculiaris sit operae speculatio, nec valores calculo invenire nec inventos contrahere docebimus: sed unum nunc explicabimus, quomodo radices aequationum, etiamsi analytice extrahi non possint, Geometrica constructione commode definiantur, ejusque artis specimen dabimus, prodita methodo generali construendi problema solidum quodlibet utcunque affectum sectione conica data circuloque invento, quam eo pluris faciendam arbitror, quo rariore connubio universalitatem junxit elegantiae ac brevitati.

Quaerimus Constructionem Aequationis solidae cujuscunque ope sectionis conicae cujuscunque et circuli. Quaeritur ergo linea, quae simul ad sectionem conicam indefinitam et circulum ordinata esse possit, ac proinde duos habeat valores duabus aequationibus duas easdem incognitas habentibus seu duobus locis expressos; unde una denique unius incognitae fiat aequatio, similis datae, cum singuli termini, singulis terminis aequationis datae collati, definiant totidem lineas arbitrarias in locis exprimendis assumtas. Unde intelligitur, utile esse multiplicare numerum linearum arbitrariarum quoad ejus fieri commode potest, nam si quae post omnes aequationes collatitias resolutas supersint, poterunt a nobis definiri pro arbitrio; unde apparent modi infiniti construendi problema idem formula eadem, ex quibus elegantiores eligi possunt. Ut autem lineae arbitrariae multiplicentur, locus ad Conicam circulumve assumendus ille est, qui plurimas lineas recipit.

Quemadmodum inter multa ad eandem curvam loca quidam est simplicissimus, ita vicissim alius omnium maxime compositus habetur; quemadmodum autem ille ad naturam curvae concipiendam, demonstrandas proprietates, inveniendasque dimensiones, ita alter ad problematum constructionem utilior haberi debet. Lineae conicae simplicissimus locus hac ni fallor aequatione universali, conicis omnibus communi, exprimitur: $2ax \mp \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$, posito a latere recto, q transverso. Omissa Parabola, Hyperbolae atque Ellipsis communis aequatio simplicissima haec est: $a^2 \mp \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$, et circuli: $a^2 - x^2 \sqcap y^2$. Compositus maxime locus ad sectionem conicam tali aequatione exprimitur: $\mp \frac{a}{q}x^2 + bx + ca \sqcap y^2 + dy$, cui respondet talis aequatio ad circulum:

$$-x^2 + cx + \Theta a \sqcap y^2 + \lambda y.$$

Facile autem cuivis Analytices perito ex ipso harum aequationum intuitu patet, nullas alias magis compositas ad sectionem conicam circulumve esse in natura rerum, cum harum quidem omnia loca sint completa, et ad gradus altiores ascendere non liceat. Tantum ergo peculiaris horum locorum descriptio determinatioque exhibenda est, ut ipsarum x et y pariter ac caeterarum b, c, d situs cognoscatur.

Hoc autem via analyseos regia sic obtinebitur, si aequatio composita data reducatur ad simplicissimam; duos enim terminos dy et ca tollere in nostra potestate est, quia duas etiam incognitas pro arbitrio explicare possumus, nempe x et y. Quod ideo monere volui, quia viam aperit universalem ad loca altiorum etiam

curvarum examinanda. Hac enim arte facile intelligi potest, quae loca possint esse ad eandem curvam quorum scilicet unus ex alio fieri potest; unde methodus apparet exhibendi loca curvarum altioris cujusdam gradus simplicissima, unde certus quoque earum numerus innotescet. Eadem methodo aperitur via ad investigandos modos describendi curvam datam: sane enim finitus est numerus locorum, si rectae incognitae x et y parallelae inter se intelligantur. Sed quoniam varios alios earum situs comminisci licet, ut si in Triangulum coeant circa focos quosdam rotatile, ut fit cum Ellipsis aut Hyperbola ex focis quibusdam describitur, hinc fit ut infinita possint intelligi loca ad eandem curvam, quorum tamen pleraque ad constructiones problematum inepta sunt, ubi duabus curvis sese intersecantibus necesse est y incognitas non tantum ubique easdem, sed et x inter se parallelas esse, et coincidere y, vel contra. Est et alia locorum per abscissas ordinatasque explicatorum praerogativa, ut ad dimensiones inveniendas utilia sint.

Reliqua tamen loca ad descriptiones curvarum organicas usui esse possunt, puncta enim curvae cujusdam datae non tantum relatione ad quandam directricem per perpendiculares sive ordinatas, sed et relatione rectarum ad certa quaedam puncta ductarum designari possunt: quae sane expressio longe priore simplicior est, cum non nisi una saepe ordinata opus habeat. Data jam curva punctum quoddam unum plurave invenire, ad quod omnia curvae puncta relationem habeant adeo simplicem, ut una incognita exprimi possit, problema credo fuerit supra vires humanas, nisi Synthesis succurrat Analysi laboranti, nimirum quod supra dixi Theoremata elegantia vi quadam subita eruere non est in nostra potestate, sed si per combinationes idearum minutim procedas, ipsa sese ordine offerunt meditanti. Ergo primum cogitabimus, si una recta a quolibet curvae puncto ad idem punctum duci possit, eam esse circularem; si a quolibet curvae puncto ad duo quaedam puncta rectarum ductarum summa vel differentia sit cuidam rectae datae aequalis, lineam esse Ellipsin vel Hyperbolam; si a quolibet curvae puncto dato duae ductae lineae brevissimae, altera ad punctum quoddam, altera ad rectam quandam, sint inter se aequales, curvam fore Parabolam. Unde sumtis jam pluribus punctis, aliae possunt combinationes institui, quibus ordine omnes curvas Geometricas exhiberi posse non est dubitandum; idque ad Geometriae perfectionem plane necessarium est, ut habeatur ratio omnium commodissima describendi curvam. Quo perfecto de caeteris describendi modis infinitis non erit laborandum, nisi si qui peculiares quosdam usus habere possint. Quales sunt describendi rationes eccentricae, quibus portiones curvarum longissime a centro foco ve distantes exiguis tamen machinis perfici possint, quale quiddam in circuli sphaeraeve portionum eccentrica tornatione habetur, et memini Johannem Ottium, Analyseos peritissimum, simile quiddam nobis in Ellipsi, Hyperbola et Parabola promittere, quod ad altiores curvas generali methodo produci posse non dubito. Mihi rem consideranti, aptissimus ei usui videtur conus; habita enim exigua trianguli portione sufficiente, etiam coni sufficiens portio describi potest, ex quo secari potest portio curvae, utcunque focus ejus longissime absit; idem ad circulum traduci potest, quia circulus ex cono aliter etiam quam parallele ad axem secari potest, cum scilicet subcontraria quam vocant sectio est. Porro cum eadem sectio aliquando ex pluribus possit secari conis, eligendus est commodissimus in rem nostram. Addenda sunt in eam rem quae Hookius de descriptione eccentrica superficiei sphaericae explicuit; item quam Wrennus invenit admirabilem Hyperbolae proprietatem, ostendit enim in Conoeidis Hyperbolici superficie infinitas duci posse rectas, idque ad ejus descriptionem applicuit; demonstrationem dedit Wallisius libro de Motu. Caeterum videndum est, possitne reperiri Conoeidis genus, ex quo omnes aut certe plurimae secundi generis curvae secari possint. Et credibile est, ex trium Conoeidum, Parabolici, Hyperbolici, Elliptici, sectionibus omnes curvas secundi gradus effici posse. Addo, quemadmodum ex cono secari potest non tantum Parabola, Ellipsis, sed et recta et circulus, ita ex Conoeide quodam altiore, ut Hyperbolico, forte inferiores quoque lineas, ut ipsas conicas, imo et rectam circulumque posse secari, uti de recta id Wrennus ostendit. Haec utique non sunt usu vacua; neque enim despero posse aliquando sectiones conicas, imo et conoeidicas mechanismis quibusdam tolerabilibus exhiberi quantum satis est ad sphaericorum vitrorum speculorumve effectus repraesentandos.

Sed redeundum est ex diverticulo in viam, a locis ad descriptionem utilibus ad loca constructionibus aptiora. Dixi locum ad sectionem conicam maxime compositum reduci posse ad simplicissimum arte analytica tollendi terminos duos dy et ca. Sed hoc quidem necesse non est, nunc quidem, quoniam jam habetur

descriptio loci ad sectionem conicam, neque simplicissimi neque compositissimi, ad quem noster nullo negotio reducitur; id vero est:

$$\mp \frac{a}{q} z^2 + \aleph z \sqcap v^2 + \beth v \sqcap \quad \text{ad sectionem conicam indefinitam,}$$

et $$-w^2 + \gimel w \sqcap y^2 + \daleth y \sqcap \quad \text{ad circulum.}$$

Quarum descriptio haec est: Sit sectionis conicae datae centrum B, Axis seu latus transversum primarium duos vertices oppositos conjungens ABC. Centro eodem B rectangulum DEFG sectioni conicae inscribatur, ita scilicet ut aliquod ejus latus DE axi AC parallelum sit et anguli quatuor D, E, F, G in ipsam lineam terminentur. Sumto jam quolibet in linea puncto ut H, si perpendicularis inde in rectam DE, productam si opus est, demittatur, nempe HL, erit rectangulum DLE ad rectangulum MLH, ut sectionis conicae latus rectum RS ad ejusdem latus transversum AC. Quod in circulo fig. 31, Ellipsi fig. 32, Hyperbola fig. 33, Parabola fig. 34 non minus quam in ipsa recta fig. 35 verum esse constabit examinanti; demonstrationem enim generalem quae prolixiuscula est, nunc quidam afferre alienum est ab instituto praesenti. Tantum in circulo considerandum est, quoniam latus rectum et transversum aequalia sunt, etiam haec duo rectangula aequari, quod et in certa Hyperbolae specie, quam circularem appellare possis, in qua scilicet latus rectum transverso sive axi aequatur, verum est; adde et in angulo rectilineo ERF, qui et ipse sectio superficiei conicae censeri potest, quando rectus est. In Hyperbola considerandum est harmoniae causa duas oppositas sectiones pro una figura habendas, cujus aliquod centrum B cogitari potest, non minus ac Ellipseos vel Circuli, etsi in his oppositae portiones concurrant in lineam in se redeuntem, quae in Hyperbola anguloque rectilineo divergunt. Angulus autem rectilineus eo tantum ab Hyperbola differre intelligi potest, quod latus ejus rectum transversumque sunt infinite parva, et puncta R, S, A, B, C concidunt. At Parabola considerari potest quantum in rem praesentem velut Hyperbola, sed cujus centrum et sectio opposita sint alterius mundi, id est infinite distent abhinc; neque enim aliter Parabola ab Hyperbola differt, quam quod latus illius transversum est infinitum; etsi ergo puncta B, C, D, G in Parabola exhiberi non possunt, nec linea DE vel AC duci queat, calculus tamen nihilo secius procedit.

In fig. 35. $EN^2 \sqcap \frac{a}{q} RN^2$; erit ergo $EN \sqcap RN\sqrt{\frac{a}{q}}$, et LM seu 2EN erit $2\ RN\sqrt{\frac{a}{q}}$, et $DE \sqcap 2RN$. Esto jam $EL \sqcap x$, erit $HL \sqcap x \frown \frac{RN}{RN}\sqrt{\frac{a}{q}}$ sive erit $HL \sqcap x\sqrt{\frac{a}{q}}$. Rectangulum DLE erit $\sqcap 2RN+x, \frown x$ sive $2RNx + x^2$; rectangulum vero MHL erit $\sqcap 2RN\sqrt{\frac{a}{q}} + x\sqrt{\frac{a}{q}}, \frown x\sqrt{\frac{a}{q}}$ sive $2RNx\frac{a}{q} + x^2\frac{a}{q}$; erit ergo Rectangulum DLE ad rectangulum MHL ut q ad a.

II.

SPECIMEN GEOMETRIAE LUCIFERAE.

Saepe notatum est a viris acri judicio praeditis, Geometras verissima quidem et certissima tradere, eaque ita confirmare ut assensus negari non possit, sed non satis illustrare animum, neque fontes inveniendi aperire, dum lector se captum quidem et constrictum sentit, capere autem non satis potest, quomodo inciderit in has casses, quae res facit ut homines Geometrarum demonstrationes magis admirentur quam intelligant, nec satis ex illis percipiant fructus ad intellectus emendationem, in aliis quoque disciplinis profuturam, quae tamen mihi potissima videtur demonstrationum Mathematicarum utilitas. Cum igitur de his rebus saepe meditanti plurima inciderint, quae ad reddendas causas fontesque recludendos facere videntur, eorum specimen placet exscribere familiari sermone ac liberiori structura, prout nunc in mentem venit, severiore illa exponendi ratione in aliud tempus servata.

Utuntur vel uti possunt Geometrae variis notionibus aliunde sumtis, nempe de eodem et diverso seu de coincidente et non coincidente, de eo quod inest vel non inest, de determinato et indeterminato, de congruo et incongruo, de simili et dissimili, de toto et parte, de aequali, majori et minori, de continuo aut interrupto, de mutatione, ac denique quod ipsis proprium est de situ et extensione.

Doctrina de coincidente aut non coincidente est ipsa doctrina logica de formis syllogismorum. Hinc sumimus quod quae coincidunt eidem tertio coincidunt inter se; si duorum coincidentium unum tertio non coincidat, nec alterum ei coincidere. Ita Geometra ostendit, punctum quo duo diametri circuli (id est rectae circulum secantes in duas partes congruas) se secant, coincidere cum puncto, quo duae aliae diametri ejusdem circuli se secant. Vid. fig. 36.

Doctrinae de eo quod inest alteri, partem aliquam etiam demonstrationibus complexus est Aristoteles in prioribus Analyticis, notavit enim praedicatum inesse subjecto, scilicet notionem praedicati notioni subjecti, quanquam etiam contra individua subjecti insint individuis praedicati. Et plura adhuc demonstrari possint universalia de continente et contento seu inexistente, utilia futura tam in Logicis quam Geometricis. Quorum et specimen dedi, ubi demonstravi, si A sit in B et B sit in C, etiam A esse in C fig. 37; item si A sit in L et B sit in L, etiam compositum ex A et B fore in L fig. 38; item si A sit in B, et B sit in A, coincidere A et B fig 39. Problemata etiam solvi, ut plura invenire numero quotcunque talia ut nihil ex ipsis componi possit novum, quod fit si ea continue in se invicem insint, ut si A sit in B et B in C et C in D etc. nihil ex his componi potest novum; quod et aliis modis praestari potest, ut si sint quinque A, B, C, D, E, et A(+)B coincidat C, et A sit in D, et denique B(+)D coincidat E, tunc nihil ex iis componi potest novi, utcunque combinentur. Unde etiam ostendo, quomodo plura dati numeri quoad coincidentiam et inexistentiam sese habere debeant, ut inde institui possint combinationes utiles ad componendum aliquid novum. Et in his versatur pars Scientiae Combinatoriae generalis de formulis universe acceptis, cui non Geometriam tantum, sed et Logisticam seu Mathesin universalem de Magnitudinibus et Rationibus in genere tractantem subordinari alias ostensum est.

Sequitur doctrina de determinato et indeterminato, quando scilicet ex quibusdam datis quaesitum ita circumscriptum est, ut nonnisi unicum reperiri possit, quod his conditionibus satisfaciat. Datur et semideterminatum, cum non quidem unicum, sed plura, certi tamen numeri seu numero finita exhiberi possunt, quae satisfaciunt. Sic datis duobus punctis A, B determinata est recta AB (fig. 40) seu via minima ab uno ad aliud; sed si in plano quaeratur punctum C, cujus distantiae a punctis A et B datis sint magnitudinis datae, problema est semideterminatum, nam duo puncta in eodem plano reperiri possunt, nempe C et (C) quae satisfaciunt quaesito. At non nisi unicus reperiri potest circulus cujus circumferentia per data tria puncta A, B, C transeat. Et proinde si duo circuli sint propositi, et inter ratiocinandum reperiatur, unumquemque eorum per tria proposita puncta transire, certum est circulos nomine tenus duos revera esse unum eundemque seu coincidere. Utrum putem conditiones datae sint determinantes, ex ipsismet cognosci potest, quando tales sunt, ut rei quaesitae generationem sive productionem contineant, vel saltem ejus possibilitatem demonstrent, et inter generandum vel demonstrandum semper procedatur modo determinato, ita ut nihil uspiam relinquatur arbitrio sive electioni. Si enim ita procedendo nihilominus ad rei generationem vel possibilitatis ejus demonstrationem perveniatur, certum est problema esse penitus determinatum.

Hinc porro multa insignia Axiomata maximique usus deduxi, quae tamen non satis video observata. Ex his potissimum est, quod determinantia pro determinato aliud rursus determinante, in hac nova determinatione possunt substitui, determinatione hac salva. Sic si rectam indefinitam per duo puncta A et B (fig. 41) transeuntem dicamus esse locum omnium punctorum determinate se habentium ad A et B seu sui ad A et B situs unicorum, demonstro inde duobus aliis punctis in eadem recta sumtis ut C et A (facilitatis nunc et brevitatis causa unum ex duobus prioribus hic rursus assumando) etiam eandem rectam ad haec duo puncta C et A esse determinatam, seu quodlibet punctum in eadem recta esse sui situs unicum ad A et C. Demonstratio est talis: Sit recta per A et B, cujus punctum quodcunque ut L est sui ad A et B situs unicum, ita ut non possit adhuc aliud punctum inveniri eodem modo se habens ad A et B (quod est proprietas rectae), seu A. B. L. un. (sic enim scribere soleo determinationem) sumaturque in eadem recta aliud punctum C, dico quodlibet punctum rectae, ut L, etiam esse sui situs unicum ad A et C, seu A. C. L un. Nam A. B. L. un. (ex hyp.) et A. B. C. un. (quia C est in recta per A, B); jam in determinatione posteriore tollatur B ope determinationis prioris, pro B substituendo A, L (per hoc praesens *axioma*, quia B determinatur ex A. L); itaque in posteriori determinatione pro A. B. C. habebimus A. A. L. C. un. Sed repetitio ipsius A hic est inutilis,

seu si A. A. L. C. est un., etiam A. L. C est un. seu L est sui situs unicum ad A et C, quod demonstrandum proponebatur.

Unde videmus ex hoc exemplo nasci novum genus calculi hactenus a nemine mortalium usurpati quem non ingrediuntur magnitudines, sed puncta, et ubi calculus non fit per aequationes, sed per determinationes seu congruitates et coincidentias. Determinatio enim resolvi potest ope congruitatis in coincidentiam hoc modo: A. B. L. un. id est si situs A. B. L congruat cum situ A. B. Y, coincident L et Y. Soleo autem coincidentiam notare tali signo ∞, et congruitatem tantum tali signo $\propto$. Et proinde A. B. L un. idem valet quod propositio conditionalis sequens: Si sit A. B. L $\propto$ A. B. Y, erit L ∞ Y, ubi literam Y adhibeo pro puncto indefinito, ad imitationem Algebraistarum quibus ultimae literae, ut x, y, significare solent magnitudines indefinitas. Nam quodcunque punctum assumas, ut Y, quod eodem modo se habeat ad puncta A et B, quo L se habet ad puncta A et B, id necesse est coincidere ipsi L, posito scilicet situm L ad A et B esse unicum, seu L esse in recta transeunte per A et B.

Transeamus igitur ad explicandas congruitates. *Congrua* sunt, quae nullo modo discerni possunt, si per se spectentur, ut in fig. 40 triangula duo ABC et AB(C) quorum unum nihil prohibet alteri applicari, ut coincidant. Sola igitur nunc positione discernuntur seu relatione ad aliquod aliud jam positione datum, ut aliquo puncto L dato fieri potest, ut ABC aliter se habeat ad L, quam AB(C) se habet ad L, verbi gratia si L sit propius ipsi C quam ipsi (C). Necesse est tamen, ut aliud L inveniri possit, quod eodem modo se habeat ad AB(C) quo L se habet ad ABC, ita ut congrua sint ABCL et AB(C)(L), alioqui si tale quid fieri non posset pro AB(C) quod fieri potest pro ABC (ita ut non posset (L) inveniri pro illo, ut L pro hoc), eo ipso discerni possent ABC et AB(C) seu non forent congrua. Et hoc ipsum est maximi momenti axioma, ut si duo sint congrua ABC et AB(C) et aliquid reperiatur L se certo modo se habens ad unum ABC, etiam aliquid detur seu possibile sit (L) quod eodem modo se habeat ad alterum AB(C). Designo autem ita (fig. 42) A. B. C $\propto$ L. M. N, quod significat eodem modo inter se sita esse tria puncta A, B, C, quo tria puncta L, M, N. Hoc autem intelligendum est respective secundum ordinem praescriptum, ut scilicet cum congruere seu coincidere seu sibi applicari posse intelliguntur A. B. C et L. M. N, coincidat A ipsi

L, et B ipsi M, et C ipsi N. Hinc si sit $A.B.C \infty L.M.N$, sequitur etiam $A.B \infty L.M$, et ita in caeteris. At vero ut colligamus $A.B.C \infty L.M.N$, opus est prius probari $A.B \infty L.M$ et $A.C \infty L.N$ et $B.C \infty M.N$, tum demum enim licebit secure componendo dicere $A.B.C \infty L.M.N$. Ita videmus (fig. 43) licet triangula ABC et LMN duo latera aequalia habeant, AB ipsi LM et AC ipsi LN, tamen quia tertia aequalia non habent, BC et MN, non esse congrua. Quomodo autem in universum congruitas combinationum gradus altioris possit colligi ex congruitatibus combinationum gradus inferioris, et quod non opus sit omnibus ternionibus ad inveniendam congruitatem quaternionis, sed tribus tantum, et ad colligendam congruitatem quinionum, quinque ternionibus; senionum, septem ternionibus, et ita porro in infinitum, infra apparebit, cum de similitudinibus dicemus.

Patet autem quoque generaliter ex respective congruis omnibus combinationibus unius gradus semper colligi posse congruas esse omnes combinationes alterius gradus, verbi gratia ex omnibus binionibus omnes terniones, quia ex omnibus combinationibus unius gradus, verbi gratia ex omnibus binionibus quatuor rerum congruis, colligi potest ipsa quatuor rerum combinatio totalis seu quaternio A.B.C.D congrua cum L.M.N.P. Jam ex congruitate combinationum totalium sequitur quaelibet combinatio inferior seu quaevis ternio respondenti congrua, ergo ex omnibus binionibus omnes terniones.

Discimus ex his insigne discrimen congruitatum a coincidentiis et inexistentiis seu comprehensionibus. Nam (fig. 44) si recta AB coincidat cum recta LM, et simul recta AC coincidat cum LN, etiam recta BC coincidet cum recta MN. Eo ipso dum coincidunt AB et LM, coincidunt etiam puncta A cum L, et B cum M; et eo ipso dum coincidunt AC et LN, coincidet etiam punctum C cum puncto N; cum ergo puncta A, B, C ipsis L, M, N respective coincidant, adeoque B, C cum L, M, etiam rectae BC et MN coincident. Ex natura rectae quoad inexistentias alibi ostendi, si A insit ipsi L, et B ipsi M, etiam $A \oplus B$ inesse ipsi $L \oplus M$, et si $A \oplus B$ insit ipsi $L \oplus M$, et $A \oplus C$ ipsi $L \oplus N$, etiam $A \oplus B \oplus C$ inesse ipsi $L \oplus M \oplus N$, quem argumentandi modum in congruitatibus et similitudinibus imitari non licet.

Ex his jam quae diximus de discrimine inter coincidentias et congruitates, ratio porro profluit, cur congrua sint triangula ABC

et (L)(M)(N) (fig. 44), si latera AB et (L)(M) itemque AC et (L)(N) congrua sint, licet de tertiis AC et (M)(N) nulla fiat mentio, modo anguli ad A et (L) congrui sint. Nam si recta (L)(M) sit congrua rectae AB, et recta (L)(N) rectae AC, et angulus quoque ad (L) angulo ad A, tunc possunt rectae (L)(M) et (L)(N) transferri in AB et AC, salvo suo situ, adeoque (L)(M)(N) potest applicari ad ABC, ita ut coincidant AB et LM, item AC et LN; ergo ex natura coincidentiae coincident etiam BC et MN; itaque si tam rectae comprehendentes quam anguli earum sint congrui, etiam bases erunt congruae, totumque adeo triangulum triangulo.

Et ex hoc ipso exemplo insigne hoc Axioma magnique usus illustrari potest: quae ex congruis eodem modo determinantur, ea sunt congrua. Sic quia generaliter ex duabus rectis magnitudine datis, et angulo eorum positione et magnitudine dato, determinatum seu positione datum est triangulum, hinc si duo sint triangula ABC, (L)(M)(N) data, habentia crura AB cum (L)(M), et AC cum (L)(N) congrua, itemque angulum quem comprehendunt congruum, angulum A angulo (L), congrua erunt triangula ipsa. Similiter quia ex tribus rectis magnitudine datis, trianguli etiam anguli magnitudine dati sunt, adeoque omnia determinata sunt, quae diversa congruentiam impediunt; hinc si duo triangula tres rectas habeant respective aequales, ac proinde congruas (rectae enim aequales congruae sunt), ipsa triangula congrua erunt. Et haec attentius considerata deprehendetur coincidere cum methodo superpositionum Euclidea.

Sunt et alia axiomata huc pertinentia, ut quae congrua sunt eidem, congrua sunt inter se; et quae congrua sunt inter se, eorum unum si tertio incongruum sit, etiam alterum tertio incongruum erit, quae tamen corollaria sunt tantum axiomatum de eodem et diverso. In iis enim quae congrua sunt, omnia eadem sunt, praeter positionem, ita ut solo differant numero. Et in universum quicquid de uno congruorum fieri dicive potest, id de altero quoque fieri potest et dici, hoc uno excepto, quod ea quae in uno adhibentur, numero differunt seu positione ab iis quae in alio adhibentur. Ita congruere intelligemus non tantum duas ulnas seu duos pedes, sed et duas libras, abstracte sumtas, duas horas, duos aequales gradus velocitatis. Notandum est etiam si duorum corporum ambitus congrui sint, etiam ipsa corpora esse congrua, quia si termini actu congruant seu coincidant, etiam corpora coincident. At non necesse est superficies et lineas coincidere aut congruas esse, quarum extrema coincidunt aut congrua sunt. Illud tamen in universum dici potest, duo extensa coincidere aut congrua esse, si coincidant aut congrua sint ea in ipso quae ab externo attingi possunt, seu ipsi cum externo possunt esse communia. Hinc superficies et lineae cum ubique ab externo attingi possint, non vero solida, terminos earum congruos esse aut coincidentes non sufficit. In genere autem ea est natura spatii, extensi (adeoque et corporis quatenus nihil aliud quam spatium adesse in eo concipitur), ut in internis sit ubique congruum et indiscernibile (ut si in media aqua agam aut in mediis tenebris palpem nec quicquam offendam) tantumque per ea discerni possit, quae ab externo attingi possunt, seu ipsi cum alio (cum quo nullam licet partem communem habet) communia sunt. Hinc quoque si duae superficies reperiantur uniformes aut lineae, extremis congruis aut etiam actu congruentibus, ipsae congruae erunt vel actu coincident.

Ex congruis oriuntur aequalia. Nempe quae congrua sunt, aut transformatione si opus sit congrua reddi possunt, ea dicuntur aequalia. Sic in fig. 45 triangula BAD, BCD, BCE, BFE sunt congrua, ideoque aequalia; quia et triangulum EBD aequale est quadrato ABCD, licet enim congrua non sint triangulum et quadratum, tamen hoc casu ex triangulo transpositione partium fieri potest quadratum priori congruum, nam si trianguli EBD unam partem BCD transferas in congruam BFE, manente altera parte ECB, tunc ex BFE et ECB fit quadratum BCEF congruum quadrato ABCD. Solemus autem aequalitatem designare signo $=$, hoc est $A=B$ significat A et B esse aequalia.

Aequalia etiam dici possunt quorum eadem est magnitudo. At magnitudo est attributum quoddam rerum, cujus certa species nulla definitione potest determinari nullisque certis notionibus, sed opus est fixa quadam mensura quam liceat consulere, et proinde si Deus universum orbem cum omnibus partibus proportione eadem servata redderet majorem, nullum esset principium id notandi. Una tamen re fixa sumta, tanquam mensura, hujus applicatione ad alias res adhibitisque repetitionum numeris magnitudo quoque aliarum cognosci potest. Atque ita magnitudo determinatur per numerum partium, quae inter se sunt aequales, vel certa quadam regula inaequales. Et licet aliqua res sit incommensurabilis respectu mensurae vel respectu rerum, quibus mensura repetita

exacte congruit, tamen continuata in infinitum subtractione quoties fieri potest rei ex mensura vel mensurae ex re, residuique ex eo quod subtractum est, tunc ex progressione numerorum repetitiones exprimentium cognoscitur rei quantitas respectu mensurae. Et proinde aequalia sunt quae eodem modo se habent ad eandem mensuram respectu repetitionis, eaque eo ipso patet fieri posse congrua, cum in partes congruentes singulas singulis eodem modo resolvantur.

Ex his etiam intelligitur, quid Mathematici vocent rationem seu proportionem. Si enim duo sint A et B, et unum A accipiatur pro mensura, tunc alterius B m a g n i t u d o exprimetur per numerum aliquem (vel numerorum seriem certa lege procedentem) posito A exprimi per unitatem. Sed si neutra sit mensura, tunc numerus exprimens B per A, quasi A esset mensura seu unitas, exprimit rationem seu proportionem ipsius A ad B. Et in universum expressio unius rei per unam aliam homogeneam (seu in res congruas resolubilem) exprimit unius rationem ad aliam, ut proinde ratio sit simplicissima duorum quoad magnitudinem relatio, in qua scilicet nihil assumitur tertii ipsis homogenei ad magnitudinem unius ex magnitudine alterius suo valore exprimendam. Verbi gratia sint duae magnitudines A et B (fig. 46) velimusque earum rationem ad se invicem determinare, ponamus A esse majus et B minus, igitur ab A detrahamus B quoties id fieri potest, verbi gratia 2 vicibus, et restare C; hoc C necessario minus est quam B, ideoque a B ipsum C rursus subtrahatur quoties fieri potest, ponamus autem subtrahi posse 1 vice et residuum esse D, et a C detrahi posse D rursus 1 vice et residuum esse E, denique a D posse detrahi E 2 vicibus et residuum esse Nihil. Patet fore $A=2B+C$ (1) et $B=1C+D$ (2); ergo pro B in aequ. 1. substituendo valorem expressum in aequ. 2. $A=2C+2D+1C$ (3) seu $A=3C+2D$ (4). Rursus $C=1D+E$ (5); ergo (ex aequ. 4 et 5) $A=5D+3E$ (6), et (ex aequ. 2 et 5) $B=2D+E$ (7). Denique $D=2E$ (8). Ergo (ex aequ. 6 et 8) fiet $A=13E$ (9) et (ex aequ. 7 et 8) $B=5E$ (10). Unde videmus E esse communem omnium mensuram maximam, et posita E unitate, fore $A=13$ et $B=5$. Quaecunque autem assumatur unitas, tamen A et B esse inter se ut 13 et 5 numeros, et A fore tredecim quintas ipsius B seu $A=\frac{13}{5}B$ (id est $A=\frac{13}{5}$ si B esset unitas) nempe A est 13E, est autem E quinta ipsius B; contra B fore quinque decimas tertias ipsius A seu $B=\frac{5}{13}A$, nam