0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	2
0	0	0	0	1	1	3
0	0	0	1	0	0	4
0	0	0	1	0	1	5
0	0	0	1	1	0	6
0	0	0	1	1	1	7
0	0	1	0	0	0	8
0	0	1	0	0	1	9
0	0	1	0	1	0	10
0	0	1	0	1	1	11
0	0	1	1	0	0	12
0	0	1	1	0	1	13
0	0	1	1	1	0	14
0	0	1	1	1	1	15
0	1	0	0	0	0	16
0	1	0	0	0	1	17
0	1	0	0	1	0	18
0	1	0	0	1	1	19
0	1	0	1	0	0	20
0	1	0	1	0	1	21
0	1	0	1	1	0	22
0	1	0	1	1	1	23
0	1	1	0	0	0	24
0	1	1	0	0	1	25
0	1	1	0	1	0	26
0	1	1	0	1	1	27
0	1	1	1	0	0	28
0	1	1	1	0	1	29
0	1	1	1	1	0	30
0	1	1	1	1	1	31
1	0	0	0	0	0	32

la science des Nombres. Ainsi je n'y employe point d'autres caractères que que 0 et 1, et puis allant à deux, je recommence. C'est pourquoi deux s'écrit ici par 10, et deux fois deux ou quatre par 100, et deux fois quatre ou huit par 1000, et deux fois huit ou seize par 10000, et ainsi de suite. Voici la Table des Nombres de cette façon, qu'on peut continuer tant que l'on voudra.

On voit ici d'un coup d'oeil la raison d'une propriété célébre de la progression Géométrique double en Nombres entiers, qui porte que si on n'a qu'un de ces nombres de chaque degré, on en peut composer tous les autres nombres entiers au dessous du double du plus haut degré. Car ici, c'est comme si on disait par exemple, que 111 ou 7 est la somme de quatre, de deux et un, et que 1101 ou 13 est la somme de huit, quatre et un. Cette propriété sert aux Essayeurs pour peser toutes sortes de masses avec peu de poids et pourroit servir dans les monnoyes pour donner plusieurs valeurs avec peu de pièces.

100	4
10	2
1	1
111	7

1000	8
100	4
1	1
1101	13

etc.

Cette expressions des Nombres étant établie, sert à faire très facilement toutes sortes d'opérations.

Pour l'Addition par exemple. ☽

110	7	101	5	1110	14
111	6	1011	11	10001	17
1101	13	10000	16	11111	31

Pour la Soustraction.

1101	13	10000	16	11111	31
111	7	1011	11	10001	17
110	6	101	5	1110	14

Pour la Multiplication. ⊙

11	3	101	5	101	5
11	3	11	3	101	5
11		101		101	
11		101		1010	
1001	9	1111	15	11001	25

Pour la Division.

15	1111	101	5
3	1111		
	11		

Et toutes ces opérations sont si aisées, qu'on n'a jamais besoin de rien essayer ni deviner, comme il faut faire dans la division ordinaire. On n'a point besoin non plus de rien apprendre par coeur ici, comme il faut faire dans le calcul ordinaire, où il faut savoir, par exemple, que 6 et 7 pris ensemble font 13, et que 5 multiplié par 3 donne 15, suivant la Table d'une fois un est un, qu'on appelle Pythagorique. Mais ici tout cela se trouve et se prouve de source, comme l'on voit dans les exemples précédens sous les signes ☽ et ⊙.

Cependant je ne recommande point cette manière de compter, pour la faire introduire à la place de la pratique ordinaire par dix. Car outre qu'on est accoutumé à celle-ci, on n'y a point besoin d'y apprendre ce qu'on a déjà appris par coeur: ainsi la pratique par dix est plus abregée, et les nombres y sont moins longs. Et si on étoit accoutumé à aller par douze ou par seize, il y auroit encore plus d'avantage. Mais le calcul par deux, c'est-à-dire par 0 et par 1, en récompense de sa longueur, est le plus fondamental pour la science, et donne de nouvelles découvertes, qui se trouvent utiles ensuite, même pour la pratique des nombres, et surtout pour la Géométrie, dont la raison est que les nombres étant reduits aux plus simples principes, comme 0 et 1, il paroit partout un ordre merveilleux. Pour exemple, dans la Table même des Nombres, on voit en chaque colonne régner des périodes qui recommencent toujours. Dans la première colonne c'est 01, dans la seconde 0011, dans la troisième 00001111, dans la quatrième 0000000011111111, et ainsi de suite. Et on a mis de petits zéros dans la Table pour remplir le vuide au commencement de la colonne, et pour mieux marquer ces périodes. On a mené aussi des lignes dans la Table, qui marquent que ce que ces lignes renferment revient toujours sous elles. Et il se trouve encore que les Nombres Quarrés, Cubiques et d'autres puissances, item les Nombres Triangulaires, Pyramidaux et d'autres nombres figurés, ont aussi de semblables périodes, de sorte qu'on en peut écrire les Tables tout de suite, sans calculer. Et une prolixtié dans le commencement, qui donne ensuite le moyen d'epargner le calcul et d'aller à l'infini par règle, est infiniment avantageuse.

Ce qu'il y a de surprenant dans ce calcul, c'est que cette Arithmétique par 0 et 1 se trouve contenir le mystère des lignes d'un ancien Roi et Philosophe nommé Fohy, qu'on croit avoir vécu il y a plus de quatre mille ans et que les Chinois regardent comme le Fondateur de leur Empire et de leurs sciences. Il y a plusieurs figures linéaires qu'on lui attribue, elles reviennent toutes à cette Arithmétique; mais il suffit de mettre ici la Figure de huit Cova comme on l'appelle, qui passe pour fondamentale, et d'y joindre l'explication qui est manifeste, pourvû qu'on remarque premièrement qu'une ligne entière — signifie l'unité ou 1, et secondement qu'une ligne brisée -- signifie le zéro ou 0.

000	0	0
001	1	1
010	10	2
011	11	3
100	100	4
101	101	5
110	110	6
111	111	7

Les Chinois ont perdu la signification des Cova ou Linéations de Fohy, peut-être depuis plus d'un millenaire d'années, et ils ont fait des Commentaires la-dessus, où ils ont cherché je ne sçai quels sens éloignés, de sorte qu'il a fallu que la vraie explication leur vint maintenant des Européens. Voici comment: Il n'y a guères plus de deux ans que j'envoyai au R. P. Bouvet, Jésuite Français célèbre, qui demeure à Pekin, ma manière de compter par 0 et 1, et il n'en fallut pas davantage pour lui faire reconnaitre que c'est la clef des figures de Fohy. Ainsi m'écrivant le 14 Novembre 1701, il m'a envoyé la grande figure de ce Prince Philosophe qui va à 64, et ne laisse plus lieu de douter de la vérité de notre interprétation, de sorte qu'on peut dire que ce Père a déchiffré l'enigme de Fohy, à l'aide de ce que je lui avois communiqué. Et comme ces figures sont peut-être le plus ancien monument de

science qui soit au monde, cette restitution de leur sens, après un si grand intervalle de tems, paroitra d'autant plus curieuse.

Le consentement des figures de Fohy et ma Table des Nombres se fait mieux voir, lorsque dans la Table on supplée les zéros initiaux, qui paroissent superflus, mais qui servent à mieux marquer la période de la colonne, comme je les y ai supplées en effet avec des petits ronds pour les distinguer des zéros nécessaires, et cet accord me donne un grande opinion de la profondeur des méditations de Fohy. Car ce qui nous paroit aisé maintenant, ne l'étoit pas tout dans ces tems éloignés. L'Arithmétique Binaire ou Dyadique est en effet fort aisée aujourd'hui, pour peu qu'on y pense, parce que notre manière de compter y aide beaucoup, dont il semble qu'on retranche seulement le trop. Mais cette Arithmétique ordinaire pour dix ne paroit pas fort ancienne, au moins les Grecs et les Romains l'ont ignorée et ont été privés de ses avantages. Il semble que l'Europe en doit l'introduction à Gerbert, depuis Pape sous le nom de Sylvestre II, qui l'a eue des Maures d'Espagne.

Or comme l'on croit à la Chine que Fohy est encore auteur des caractères Chinois, quoique fort altérés par la suite des tems; son essai d'Arithmétique fait juger qu'il pourroit bien s'y trouver encore quelque chose de considerable par rapport aux nombres et aux idées, si l'on pouvoit déterrer le fondement de l'écriture Chinoise, d'autant plus qu'on croit à la Chine, qu'il a eu égard aux nombres en l'établissant. Le R. P. Bouvet est fort porté à pousser cette pointe, et très capable d'y réussir en bien des manières. Cependant je ne sçai s'il y a jamais eu dans l'écriture Chinoise un avantage approchant de celui qui doit être necessairement dans une Caractéristique que je projette. C'est que tout raisonnement qu'on peut tirer des notions, pourroit être tiré de leurs Caractères par une manière de calcul, qui seroit un des plus importans moyens d'aider l'esprit humain.

XXII.

DE DYADICIS.

§ 1. Definitio. Numerus dyadice expressus est dcba, si idem significet quod simul sumti $\left\{\begin{array}{r} a \\ b0 \\ c00 \\ d000 \end{array}\right.$ et b0 idem sit quod bis b, et c00 idem quod bis bina c seu quater c, et d000 idem quod bis quaterna d seu octies d, et ita porro.

§ 2. Itaque 10 est 2, et 100 est 4, et 1000 est 8, et 10000 est 16, et ita porro. Patet ex praecedenti, si pro a, b, c, d ponatur 1, 1, 1, 1, et generaliter Numerus progressionis Geometricae a binario incipientis exprimitur dyadice per unitatem tot nullitatibus praefixam, quot sunt unitates in progressionis Geometricae exponente seu $2^e = 10^e$, Tabulaque ita stabit:

1	1 =	2^0
10	2	2^1
100	4	2^2
1000	8	2^3
10000	16	2^4
100000	32	2^5
1000000	64	2^6
10000000	128	2^7
100000000	256	2^8
1000000000	512	2^9
10000000000	1024	2^{10}

§ 3. Omnis Numerus dyadice potest exprimi, nullas alias adhibendo notas quam 0 et 1. Nam cum omnis numerus fiat additione continua unitatum, et unitas unitati addita faciat 10, ut nempe 0 scribatur in sede ultima, et 1 in penultima seu penultimae addatur, ibi ergo scribetur, si-illic sit 0 seu si vacet. Sed si ibi jam 1 inveniat, rursus mutabit in 0 facietque tantum 1 addi in antepenultima, ut prius in penultima, et ita porro de sede in sedem. Unde patet, si semel incipiamus ab 1, uti faciendum sane est, non posse alias prodire notas quam 0 et 1, promota tantum sede.

§ 4. Quoties unitas transferenda seu addenda est sedi sequenti ex praecedente, memoriae ergo in sequenti sede notetur

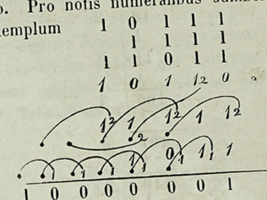
punctum, verb. gr. si 11 et 1 (seu 3 et 1) in unum addi debeant, utique in sede ultima 1 et 1 est 10, scribatur 0, notetur 1 per punctum in sede sequenti. Rursus in sede penultima 1 et 1 (nempe quia punctum ibi significat 1) fiet 10, scribatur 0 et notetur 1 in sede antepenultima. Jam in sede antepenultima non est nisi punctum seu unitas translata, quod significat 1 et fiet 100.

$$\begin{array}{r} 11 \\ \cdot\,\cdot 1 \\ \hline 100 \end{array}$$

§ 5. Exhibeatur Generatio Numerorum per additionem unitatis continuam ab 1 ad 16:

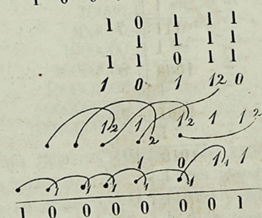
0	0
1	1
1	
1	
10	2
1	
11	3
·1	
100	4
1	
101	5
·1	
110	6
1	
111	7
··1	
1000	8
1	
1001	9
·1	
1010	10
1	
1011	11
··1	
1100	12
1	
1101	13
·1	
1110	14
1	
1111	15
1	
10000	16

§ 7. Generalis praxis Additionis. Si sint quotcunque unitates in una sede expressae numero dyadico edcba, pro quavis ex his notis a, vel b, vel c, vel d, vel e etc. unitatem significante notetur punctum in sede tantum remota sinistrosum a sede praesente, quantum sedes notae remota est ab ultima, colligantur autem in ipsa sede praesente per ascriptas ultimae unitati cujusque progressionis duplae notas numerales vulgares. Hoc etiam observabo ut punctum in quavis columna fiat in primo loco, si est a columna proxime praecedente, in secundo si in altera, in tertio si in tertia, et ita porro, ita enim semper dignosci potest, unde punctum sit ortum, quod prodest revisioni nec possunt plura uno puncta incidere in eundem locum; praefero autem primum locum ab imo ascendendo. Pro notis numeralibus adhibere etiam licebit – vel =. Sit exemplum



Lineas hic duxi a punctis ad numeros ex quibus oriuntur, ut rationem redderem processus, non quod his ductibus sit opus in praxi.

vel



Praestat pro = vel ≡ scribere 2 vel 3, sed malo – quam 1, ne confundatur 1 significans notam collectionis cum ipsa columnae unitate.

In columna ultima sumantur primum unitates maximi qui adest numeri progressionis duplae, nempe 4, et quartae seu ultimae ascribatur 2 (ob $4 = 2^2$) quod notat punctum signandum in columna abhinc secunda (nempe antepenultima), et quidem loco secundo seu inter notam ejus secundam et tertiam. Superest nullus amplius numerus progressionis duplae, sed 1, itaque debet 1 notari sub columna infra lineam sub omnibus columnis ductam. In columna penultima rursus ascribatur 2 unitati quartae et 1

secundae post hanc, nam $4=2^2$ et $2=2^1$. Et ob 2 notetur punctum in loco secundo columnae abhinc secundae, et ob 1 notetur punctum in loco primae columnae abhinc primae, et sub columna 0, quia nihil superest. In antepenultima seu 3tia eadem contingunt; in penantepenultima seu quarta rursus eadem, in antepenantepenultima seu quinta rursus eadem. In sexta occurrunt duae unitates, ergo secundae ascribo 1, et punctum signo in loco primae columnae primae abhinc, et sub columna sexta scribo 0. Eadem prorsus fient in 7^{ma} columna. At in octava nil superest nisi 1, quae sub ea scribitur, et prodit 10000001.

§ 8. Subtractionis praxis haec est, ut si plura sint subtrahenda, vel subtrahantur sigillatim, vel prius addantur in unum, deinde summa subtrahatur. Utroque modo non nisi unius numeri subtractione est opus. Quo facto subtrahatur nota a nota ejusdem sedis, et si nota subtrahenda sit 1, sed ea a qua debet subtrahi sit 0, scribetur residuum 1, sed signetur punctum ad notam subtrahendi proxime sequentem, et si is jam sit unitas, iterum ad sequentem, et ita porro. Itaque ubi binae occurrunt unitates in subtrahendo, habentur pro 0, fietque subtractio non nisi 0 ab 1 vel 1 ab 1, ex quibus prior relinquit 1, posterior 0. Exempli gratia

```
1 1 0 1 0 0 1 1 0
  1 1 0 1 1 0 1 1
  . .   . .   . .
-------------------
  1 1 0 0 1 0 1 1
```

§ 9. Praxis Multiplicationis. Haec est facillima, quia notae multiplicantes sunt 0 et 1. Jam 0 in numerum multiplicandum facit 0, et 1 relinquit qualis erat. Sed 1 in sede secunda cum sit binarius, duplicat numerum multiplicandum, id est promovet in sedes proxime sequentes. Et 1 in sede tertia, cum sit quaternarius, quadruplicat numerum multiplicandum, id est promovet in sedes tertias, et ita porro.

```
      e d c b a
        1 1 0 1
    -----------
      e d c b a
    e d c b a 0
  e d c b a
```

```
   1 1 0 1 | 13
     1 0 1 |  5
   -------   --
   1 1 0 1
 . . . .
 1 1 0 1 0
-----------  --
1 0 0 0 0 0 1 | 65
```

Nam 1000000 est 64 et 1000001 est 64+1.

Hinc in Multiplicando Dyadice non opus est Tabula quam vulgo Pythagoricam appellant, et quam memoriter ediscere oportet; nec de ea adhibemus nisi initium, nempe quod semel unum est unum.

§ 10. Praxis Divisionis non minus et facilis, quia quotiens non potest esse major quam 1. Itaque tantum opus est exemplo, ubi majoris claritatis causa vulgari methodo procedo.

```
  1111
1000001 | 1101
  101111
   1000
    11
```

§ 11. Series Numerorum naturalium ab 1 ad 64. Possunt omitti 0, quas non praecedit 1, adjecimus tamen ut progressus periodorum magis appareret.

0 0 0 0 0 0	0				
0 0 0 0 0 1	1	0 1 0 1 1 0	22	1 0 1 0 1 1	43
0 0 0 0 1 0	2	0 1 0 1 1 1	23	1 0 1 1 0 0	44
0 0 0 0 1 1	3	0 1 1 0 0 0	24	1 0 1 1 0 1	45
0 0 0 1 0 0	4	0 1 1 0 0 1	25	1 0 1 1 1 0	46
0 0 0 1 0 1	5	0 1 1 0 1 0	26	1 0 1 1 1 1	47
0 0 0 1 1 0	6	0 1 1 0 1 1	27	1 1 0 0 0 0	48
0 0 0 1 1 1	7	0 1 1 1 0 0	28	1 1 0 0 0 1	49
0 0 1 0 0 0	8	0 1 1 1 0 1	29	1 1 0 0 1 0	50
0 0 1 0 0 1	9	0 1 1 1 1 0	30	1 1 0 0 1 1	51
0 0 1 0 1 0	10	0 1 1 1 1 1	31	1 1 0 1 0 0	52
0 0 1 0 1 1	11	1 0 0 0 0 0	32	1 1 0 1 0 1	53
0 0 1 1 0 0	12	1 0 0 0 0 1	33	1 1 0 1 1 0	54
0 0 1 1 0 1	13	1 0 0 0 1 0	34	1 1 0 1 1 1	55
0 0 1 1 1 0	14	1 0 0 0 1 1	35	1 1 1 0 0 0	56
0 0 1 1 1 1	15	1 0 0 1 0 0	36	1 1 1 0 0 1	57
0 1 0 0 0 0	16	1 0 0 1 0 1	37	1 1 1 0 1 0	58
0 1 0 0 0 1	17	1 0 0 1 1 0	38	1 1 1 0 1 1	59
0 1 0 0 1 0	18	1 0 0 1 1 1	39	1 1 1 1 0 0	60
0 1 0 0 1 1	19	1 0 1 0 0 0	40	1 1 1 1 0 1	61
0 1 0 1 0 0	20	1 0 1 0 0 1	41	1 1 1 1 1 0	62
0 1 0 1 0 1	21	1 0 1 0 1 0	42	1 1 1 1 1 1	63

§ 12. Collatio designationis nostrae cum ea quam reliquit Fohy, antiquissimus Sinarum Rex. Quod nos per 0, designavit ille per — — lineam fractam seu interruptam, et quod nos per 1, ille per lineam integram —.

0	0
1	1
00	0
01	1
10	2
11	3
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15

Simili ratione characterum suorum Tabulas Fohius continuavit usque ad 64, easque modo in circulum, modo in forma quadrati disposuit. Cumque Dyadicas meas notas explicuissem per literas R. P. Bouveto, Societatis Jesu missionario ad Sinas, ille statim consensum cum Fohianis characteribus animadvertit et ad me perscripsit, Tabula simul transmissa qua 64 characteres Fohiani tum in quadrato, tum rursus in circulo circumscripto continentur, hoc tantum discrimine, quod in quadrato ordinem nostrum sequantur, in circulo vero semicirculus unus a summo descendens in sinistro latere continet characteres a 0 ad 31, sed alter semicirculus rursus a summo descendens in dextro latere continet characteres a 32 ad 63, ita enim sibi opponuntur e regione in eadem altitudine ii characteres qui non differunt nisi quod sinistrarum prima nota est 0 seu ¦, dextrarum vero 1 seu |. Ex. gratia 0 et 32, 1 et 33, 2 et 34

0	000000	100000	32
1	000001	100001	33
2	000010	100010	34
	etc.	etc.	

Ita mirum accidit, ut res ante ter et amplius annos nota in extremo nostri continentis oriente, nunc in extremo ejus occidente, sed melioribus ut spero auspiciis resuscitaretur. Nam non apparet, antea usum hujus characterismi ad augendam numerorum scientiam innotuisse. Sinenses vero ipsi ne Arithmeticam quidem rationem intelligentes nescio quos mysticos significatus in characteribus mere numeralibus sibi fingebant.*)

---

*) Leibniz hat bemerkt: Caetera alias prosequar, ostendamque generaliter summas seriei periodicae dare seriem periodicam, et columnas alterius columnae summatrices habere periodum, hoc modo, ut ad minimum periodus primae columnae summatricis sit longitudine dupla periodi summandae, secundae longitudine quadrupla, tertiae longitudine octupla etc. Tunc enim semper 0 incidit in columnae summatricis et summatricium praecedentium simul cum fine periodi, ita omnia ab integro prodeunt ut ante. Hinc apparet statim periodus naturalium. Ostendam et addendo in unum duas columnas periodicas fieri periodicam. Ergo addendo in unum quotcunque periodicas orietur periodica. Hinc demonstro numeros naturales et progressionis arithmeticae, et polygonos quosque, tum etiam quadraticos, cubicos etc. periodicas series dare.

XXIII.

DEMONSTRATIO, QUOD COLUMNAE SERIERUM EXHIBENTIUM POTESTATES AB ARITHMETICIS AUT NUMEROS EX HIS CONFLATOS, SINT PERIODICAE.*)

Omnis series numerorum rationalium, qui sint arithmeticorum potestates ejusdem gradus (exempli gratia series omnium x^4, posito x esse progressionis Arithmeticae numeros), continuatis quantum opus differentiationibus dat differentiam constantem.

Idem est, si series exprimi possit per formulam analyticam integram ex potestatibus conflatam, verbi gr. $4x^4+6x^2-7x+11$.

Idem est, etsi formula habeat numeros in denominatore, modo termini sint numeri integri. Nam multiplicata per denominatorem communem dabit differentiando seriem arithmeticorum, ergo et non multiplicata, id enim aequalitatem differentiae non mutat. Exempli gratia numeri $\frac{xx+x}{2}$ sunt semper integri; itaque horum series aliquam differentiam (hoc loco secundam) habet constantem, primae vero differentiae sunt progressionis Arithmeticae.

Hinc etiam omnes series Figuratorum continuatis differentiationibus dabunt seriem Arithmeticorum. Et generaliter omnis series Numerorum integrorum, qua Analytice expressa per formulam, incognita non cadit vel in denominatorem (ut fit in progressione Harmonica) vel in Exponentem (ut in Geometrica) continuatis quantum opus differentiationibus dat seriem Arithmeticorum, vel quod idem est, vice versa omnis hujusmodi series produci potest per summationem arithmeticorum replicatam. Omnis enim series ex suis differentiis cujuscunque gradus continuatis summationibus conflatur.

Hinc jam pergo ad Numerorum expressionem per proportiones Geometricas sive Dyadicam sive decadicam aut aliam quam-

---

*) Auf dem Entwurf, der dieser Abhandlung zu Grunde liegt, hat Leibniz bemerkt: Berolini Novembr. 1701. Haec Dn. Angicourt demonstravi.

cunque. Et cum omnes series Arithmeticorum, sed manifeste imprimis dyadice expressae, habeant columnas periodicas, sequetur omnes series potestatum vel Numerorum figuratorum vel aliorum supra dictorum habere columnas periodicas, ubi ostensum fuerit, omnem seriem summatricem periodicae esse periodicam. Nam ita et summatrix summatricis periodica erit. Imo ex hoc sequitur, quod praesupposueramus, Arithmeticam seriem esse periodicam, cum sit summatrix seriei constantium, quae utique periodica est.

Ut ostendatur, summatricem seriei periodicae esse periodicam, quod sit Lemma 1, consideremus initio separatim quamlibet columnam summandae seriei, tanquam ipsa haec columna sola esset summanda. Dico: Si series summanda periodica unius esset columnae, seriem summatricem habituram esse omnes columnas periodicas, ex. g. seriei summandae constantis ex columna

	N	M	L	A	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	1	
0	0	1	0	1	
0	0	1	0	0	
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	1	
0	0	1	1	0	
0	1	0	0	1	⊙
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	
0	1	1	0	1	
0	1	1	0	0	
0	1	1	0	0	
0	1	1	1	1	
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	1	☽

A series summatrix constet ex columnis LMN etc., dico, quia A est periodica, etiam L, M, N etc. esse periodicas. Nempe ubi evenit, ut periodo (simplici vel replicatae) columnae A respondeat 0 in columnis summatricibus, omnia in iisdem columnis redeunt ut ante. Id pro columnis L et M fit in loco ⊙, ubi simplex columnae A periodus finitur. At pro columnis L, M, N id fit in loco ☽, ubi finitur duplicata columnae A periodus, quae etiam ipsa per se integram periodum constituit. Praevideri autem potest, quota replicatione periodi columnae A incidat 0 in summatricem. Nam constat, quot periodus simplex summandae A habeat unitates, v. g. hoc loco 4. Jam semel 4 dat 100 dyadice adeoque 0 in prima et secunda columna summatrice; sed columna duarum periodorum columnae A seu bis 4 est 1000 dyadice, id est, dat 0 etiam in tertia columna summatrice etc. Si periodus simplex habuisset unitates tres, tunc fuisset

semel 3 bis 3 ter 3

$$1.3=11 \text{ et } 2.3=110 \text{ et } 3.3=1001 \text{ et } 4.3=1100 \text{ etc.}$$

Et ita primae columnae summatricis periodus foret dupla periodi columnae summandae, secundae columnae summatricis periodus foret quadrupla periodi columnae summandae, tertiae foret octupla etc. idque contingit, quoties summa periodi ipsius A est numerus impar.

Assummo jam Lemma alterum: Duae vel plures columnae periodicae in unum additae, ita ut addatur terminus termino respondenti, dant seriem periodicam. Nam si duae sint columnae addendae D, E, semper addetur aut 0 et 0, aut 0

G	F	E	D
	0	0	0
	1	1	0
1	0	1	1
1	0	1	1
	1	1	0
	1	1	0
	1	0	1
1	0	1	1

et 1, aut 1 et 1. Primo casu prodit 0 in seriei conflatae F, G prima columna F, secundo casu 1, tertio 0 seu 10; id esto cum translato 1 in columnam sequentem G; nec ex duabus D, E conflatis prodeunt columnae nisi binae F et G, et utraque harum sequitur periodum columnae ex duabus prioribus longissima periodo praeditae, quae hic est E. Nam semper post hanc redeunt priora. Suppono enim, ut semper in nostris Dyadicis, periodum majorem continere minorem, esse scilicet ejus duplam vel quadruplam vel octuplam etc. [quanquam si una alteram non metiretur, tamen periodus communis tandem haberetur facta ex numeris periodicis, ut si una periodus esset terminorum 3, altera 4, periodus communis foret terminorum 12]. Hinc sequitur rursus etiam tres vel plures alias columnas in unum conflatas ita scilicet, ut termini respondentes in unum addantur, dare seriem periodicam, cum utique tertia columna periodica sit addenda conflato ex duabus prioribus, quod uti jam ostendimus, ex columnis periodicis constat.

Hactenus diximus de sola columna A summanda; nunc consideremus seriem summandam datam posse constare ex pluribus columnis A, B, C etc. et quamlibet suas habere summatrices, ut A

C	B	A
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
et	caet.	

	Z	Y	X	
.	.	.	.	
etc.	.	.	.	.
etc.	.	.	.	.
etc.	.	.	.	.
etc.	.	.	.	.
et	caet.			

ipsas L, M, N etc., B ipsas λ, μ, ν etc., et C ipsas ל, מ, נ etc.; ipsam autem seriem summatricem habere columnas X, Y, Z etc.; dico X fore L, sed Y fieri ex λ et M, et Z fieri ex ל, μ, N; et ita porro. Vel ut clarius res exprimatur: ipsius columnae A summatrices columnae L, M, N habeant terminos designatos per circellos, ipsius columnae B summatrices columnae λ, μ, ν habeant designatos per triangula, et ipsius C summatrices, nempe ל, מ נ, habeant designatos per quadratula; patet X constare ex meris circellis columnae L, Y conflari ex circellis columnae M et triangulis columnae λ, Z denique conflari ex circellis columnae N, triangulis columnae μ

$$\begin{array}{lccc|l}
 & N & M & L & \\
\text{etc.} & 0 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & \text{Ex} \\
 & 0 & 0 & 0 & A \\
 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
 & \nu & \mu & \lambda & \\
\text{etc.} & \triangle & \triangle & \triangle & \\
 & \triangle & \triangle & \triangle & \text{Ex} \\
 & \triangle & \triangle & \triangle & B \\
 & \triangle & \triangle & \triangle & \\
\hline
 & \text{נ} & \text{מ} & \text{ל} & \\
\text{etc.} & \square & \square & \square & \\
 & \square & \square & \square & \text{ex } C \\
 & \square & \square & \square & \\
 & \square & \square & \square & \\
\hline\hline
 & Z & Y & X & \\
 & \multicolumn{3}{c}{\text{fit per}} & \\
 & 0 & 0 & 0 & \\
\text{etc.} & \triangle & \triangle & & \\
 & \square & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & \\
 & \triangle & \triangle & & \\
 & \square & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & \\
 & \triangle & \triangle & & \\
 & \square & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & \\
 & \triangle & \triangle & & \\
 & \square & & & \\
\end{array}$$

et quadratis columnae ל, et ita porro. Vel si verbis enuncies: X prima columna seriei summatricis XYZ constat ex L (columna prima summatrice primae columnae summandae A), sed Y secunda columna seriei summatricis conflatur ex M (secunda columna summatrice primae columnae summandae A) et ex λ (prima columna summatrice secundae columnae summandae B), et Z tertia columna seriei summatricis conflatur ex N (tertia columna summatrice primae columnae summandae A) et ex μ (secunda columna summatrice secundae columnae summandae B) et denique ex ל (prima columna summatrice tertiae columnae summandae C), et ita porro.

Cum autem (per Lemma 1) singulae columnae conflantes sint periodicae, etiam conflata erit periodica per demonstrationem praecedentem seu per *Lemma 2*, et licet inter conflandum rursus aliquid rejiciatur in columnas sequentes), manifestum tamen est, id ipsum quoque esse periodicum, adeoque id addendo caeteris periodicis columnas tandem periodicas constitui debere. Q. E. D.

XXIV.

ZWEI BRIEFE LEIBNIZENS AN JOH. CH. SCHULENBURG.

I.

Etsi Dom. Sanderus plus petierit meo nomine quam ipse ego fuissem ausus, qui tempore Tuo abuti nollem, plurimum tamen lucri inde ad me pervenit literis a Te acceptis humanissimis et muneribus etiam quibus plurimum sum delectatus, et gratias debeo

singulares. Utraque dissertatio, quam misisti, argumenti mihi pergrati est. Nam urnae repertae sub tumulis, de quibus *Blumianae Theses*, antiquitates harum regionum illustrant. Calculi vero Mathematici applicatio ad usum, ac praeterea ratiocinia in Metaphysicis Semi-Mathematica, quae utraque in Knolleanis reperi, plane sunt ad palatum meum. Velim delineatas haberi urnas, caeteraque quae praefatione memoras, et Dom. Knolleum pergere optem in his quae ornare coepit studiis illustrandis. Ejus meditatio Metaphysica habere mihi visa est aliquid pulchri et profundi et si hoc quoque addere licet congrui ad sensus meos.

Nimirum fines seu limites sunt de essentia creaturarum, limites autem sunt aliquid privativum consistuntque in negatione progressus ulterioris. Interim fatendum est, creaturam, postquam jam valorem a Deo nacta est qualisque in sensus incurrit, aliquid etiam positivum continere seu aliquid habere ultra fines neque adeo in meros limites seu indivisibilia posse resolvi. Ac proinde etiam ex ipsiusmet thesium Autoris puto sententia postulatum, ex quo resolutionem in meros fines seu mera indivisibilia infert, ad creaturam cum valore sumptam applicari non posse. Atque hic valor, cum consistat in positivo, est quidam perfectionis creatae gradus, cui etiam agendi vis inest, quae ut ego arbitror substantiae naturam constituit, adeo ut valor ille a Deo tributus revera sit vigor seu vis indita rebus, quam quidam frustra negant, non animadvertentes sese ita praeter opinionem incidere in doctrinam Spinosae, qui Deum solum facit substantiam, caetera ejus modos.

Atque haec est origo rerum ex Deo et nihilo, positivo et privativo, perfectione et imperfectione, valore et limitibus, activo et passivo, forma (i. e. entelechia, nisu, vigore) et materia seu mole per se torpente, nisi quod resistentiam habet. Illustravi ista nonnihil origine numerorum ex 0 et 1 a me observata, quae *pulcherrimum est Emblema perpetuae rerum creationis ex nihilo, dependentiaeque a Deo.* Nam adhibita progressione simplicissima, nempe dyadica loco decadicae vel quaternariae, omnes numeri exprimi possunt per 0 et 1, ut in Tabula adjecta patebit, in qua genesi numerorum, quae maxime naturae convenit, multa latent mira ad meditationem, imo et ad praxin, etsi non pro usu vulgari.

0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8

Caeterum rogo, ut Dom. Knolleum data occasione etiam meo, si tanti videtur, nomine horteris, uti in praeclaris istis meditationibus pergat, qualium similes saepe ab ipso videre velim sive in Mathematicis, sive in Philosophia illa altiore. Excitandum etiam putem ad colendam illam sublimiorem Mathesin, quae continet Scientiam Infiniti, cujus elementa quaedam a me sunt prodita, novo calculi genere proposito, quem Hugenius aliique praestantes viri non sine plausu excepere et quem nunc illustrarunt inprimis Dom. Bernoullii fratres et peculiari etiam dissertatione Dom. Marchio Hospitalius Gallus. Et compertum est, non alia melius ratione aperiri aditum a Geometria ad Naturam, quae per infinitos gradus intermedios in omni mutatione, ut ego arbitror, progrediens characterem habet Autoris infiniti. Quae olim mihi de nostro solis incolatu ex praeclari Astronomi Dom. Eimmarti placitis indicari curaveras, verissima arbitror, si intelligamus tellurem esse inter planetas seu satellites solis; sin altius aliquid subest, fatebor mentem Autoris mihi non esse perspectam. Newtonus, Mathematicus excellens, astrorum vortices tollendos putat, sed mihi, ut olim in Actis Lipsiensium prodidi, non tantum conservari posse, sed etiam pulcherrime procedere videntur circulatione harmonica, cujus admirandas deprehendi proprietates.

De observatis Eimmartianis vellem aliquando nosse distinctiora, ac Tuis etiam doctissimis cogitationibus frui; sed agnosco occupationes Tuas laboriosas, et valetudini etiam parum firmae indoleo, meliora precatus speransque, modo in tempore Tibi prospicias, quod faciendum puto. Vale. Dabam Hanoverae 29. Martii 1698.

II.

Valde Tibi obstructus sum non minus pro egregiis dissertationibus Tuis, quam pro elegantibus delineationibus urnarum, vellemque vicissim aliqua re demereri posse. Mentem meam circa progressionem dyadicam optime assecutus es, et praeclare etiam observasti, quam pulchra illic omnia ratione procedant. Puto autem, et utilitatem habituram ad augendam scientiam, etsi alioqui non sit transferenda ad communem usum calculandi. Certa etiam lege procedere deprehendentur notae pro variis proprietatibus numerorum. Nam regula generalis est: Ubicunque principia sunt ordinata, omnia etiam derivata ordinate progredi,

de quo jam hic meditari dudum coepi. Et primum patet, numeros naturali ordine dispositos ita procedere, ut nota prima dextra sit 01 etc., secunda 0011 etc., tertia 00001111 etc., quarta 0000000011111111 etc., quinta 0 (sedecies) 1 (sedecies), et ita rursus. Atque hoc modo apparet, in prima sede periodum semper redeuntem esse binariam 01, in secunda esse quaternariam 0011, in tertia octonariam, in quarta sedenariam, et sic porro. Verum quod notatu dignissimum est, eadem lex ordinis observatur, si sumas non omnes ordine numeros, sed uno omisso alterum quemque, nam tunc proveniunt vel omnes pares vel omnes impares; imo amplius, si sumas tertium quemque seu omnes ternarios sive divisibiles per 3; itemque in omnibus quaternariis, et quinariis, et ita porro, ut periodi eaedem sint quae naturalium. Ecce ternarios in exemplum, ubi in sede dextra prima 01 binaria periodus, secunda 0110 quaternaria, tertia 00101101 octonaria, quarta 0001110011100011 sedenaria, quinta 00000011111000000111111100000011111, et ita porro.

Et notandum, hic dimidiam cujusque periodi semper habere notas oppositas notis respondentibus alteri dimidiae ejusdem periodi, v. g. 0001110011100011 constat ex 00011100 et ex 11100011 $\Big\}$ ubi permutatio inter 0 et 1.

Has aliasque id genus observationes prosequendo via aperietur ad novas et miras atque etiam utiles numerorum proprietates. Et ut verbo dicam, latet in his quaedam novi generis Arithmetica theoretica, quam Tecum possimus divinam dicere, cujus tantum primos adhuc aditus videmus. Nec dubium est, etiam quadratos et cubos et alios numeros figuratos certas quasdam suae progressionis leges esse habituros.

Et si haec a viginti ac amplius annis jam in mente habuerim, ita raro tamen animum huc adjeci, ut de nominibus imponendis non cogitaverim,

0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15
etc.	

0000000	0
0000011	3
0000110	6
0001001	9
0001100	12
0001111	15
0010010	18
0010101	21
0011000	24
0011011	27
0011110	30
0100001	33
0100100	36
0100111	39
0101010	42
0101101	45
0110000	48
0110011	51
0110110	54
0111001	57
0111100	60
0111111	63
1000010	66
1000101	69
1001000	72
1001011	75
1001110	78
1010001	81
1010100	84
1010111	87
1011010	90
1011101	93
1100000	96
1100011	99
etc.	

quia potius soleo enuntiare ad morem vulgaris Arithmeticae 10 per
decem, 100 per centum, etsi significent 2 et 4. Obiter adjiciam,
ex hac expressione sine ulla demonstratione sequi, cur nummi et
pondera progressionis Geometricae duplae apta sint, ut paucissimis
datis caetera possint componi. Ex. gr. quinque ponderibus uncia-
rum 1, 2, 4, 8, 16 combinatis confici potest pondus quodcunque
unciarum infra 32. Hinc monetarum examinatores hac progres-
sione in ponduscults suis utuntur. Ejus rei rationem varii inda-
garunt. et Schotenius inter alios in Miscellaneis, sed per ambages;
hic verum primo obtutu patet, ex. gr. quia 29 est 11101, etiam
$10000+1000+100+1$ erit $16+8+4+1$.

Cartesianos praejudicia vetera novis mutasse, dubium nullum
est. Recte quidem illi omnia phaenomena specialia corporum per
Mechanismos contingere consent, sed non satis perspexere, ipsos
fontes Mechanismi oriri ex altiore causa, quanquam interim Male-
branchio, Sturmio aliisque insignibus viris non assentiar, putanti-
bus nihil esse virtutis actionisque in materia. Scilicet non satis
percepere, quae sit natura substantiae valorisque, quem Deus con-
tulit rebus qui in se involvit perpetuam actionem. Meo judicio
longe aliud est in corporea substantia quam extensio et loci reple-
tio, nempe cogitandum est, quid sit illud quod locum replet. Spa-
tium, quemadmodum et tempus, nihil aliud sunt quam ordo pos-
sibilium existentiarum, in spatio simul, in tempore successive,
realitasque eorum per se nulla est, extra divinam immensitatem
atque aeternitatem. Vacuum nullum esse pro certo habeo. Inte-
rim materiae non tantum extensionem, sed et vim seu nisum ad-
scribo. Latentque in his alia multo majoris momenti. Fateor
olim mihi interstitiola vacua placuisse, hodie contra sentio, etsi
ut dixi materiae naturam non collocem in extensione. Puto etiam
a me monstratum, non esse verum quod ajunt, corpus eam quam
perdit quantitatem motus alteri dare. De potentia tamen motrice
id verum deprehendi. Et sane potentia aliquid reale est; motus
vero nunquam existit, cum nunquam existat totus, non magis
quam tempus. Reveraque etiam ex alio capite imaginaria involvit
motus. In quo consistat unio animae et corporis commerciumque
diversarum substantiarum, problema est quod puto me solvisse.
Qua de re aliquando amplius. Atque haec ad Tuas dissertationes
volui annotare paucis, unum hoc addens, causam parheliorum ab
intersectione halonum a Gassendo allatam mihi quoque placuisse.

Et in parheliorum explicanda ratione Cartesium non recte versatum,
apparebit credo quando Dioptrica Hugenii, posthumum opus,
prodibit.

Specimina calculi infinitesimalis sive differentialis et summa-
torii a me propositi ante annos complures extant in Actis Erudi-
torum, ubi primum edidi Anno 1684. Inde Bernoulli Helvetii,
Craigius Scotus, Marchio Hospitalius Gallus miro successu sunt
secuti. Nieuwentyt Batavus partim carpere, partim in se mutatis
notis transferre voluit: utrumque frustra, praesertim cum non satis
intellexerit, nec aliquid per se in ea re potuerit praestare. In
Germania neminem adhuc satis in haec ingressum esse sum mira-
tus. Desunt nobis juvenes spei singularis; messis multa est, ope-
rarii autem pauci. Et cum Mathematicae artes liberaliter alant
cultores suos, plerique etiam se discere velle profiteantur quae
πρὸς τὰ ἄλφιτα faciunt, tamen magis magisque haec studia inter
nostros homines sterilescunt, credo quod nunc plerique inania aut
in speciem adornata sectantur quae delibare sufficit, a veris autem
laboribus, quibus peritus excolendus est animus, abhorrent. Sed
Tuo hortatu atque exemplo et paucorum Tui similium meliora im-
posterum spero. Vale. Dabam Hanoverae 17. Maji 1698.
