XVII.

DIVISIONES FORMULARUM REPERIRE.

Divisores formulae sunt ejusdem Generatores. Itaque magni ad analysin momenti est, ad inveniendas analogias, extractiones, depressiones, aliosque usus eruere latentes divisores formularum, sive literalium sive numericarum, quas assumta litera pro unitate possumus reducere ad literales. Formula autem hic utiliter considerari potest instar aequationis, quoniam divisores aequationis etiam formulae sunt divisores. Ex aequatione tollantur irrationales, et quidem quantum sine exaltatione aequationis licet. Aequatio secundum literam aliquam ordinetur, qualis x, quae vocetur litera ordinalis. Quodsi aequatio sit divisibilis per formulam, a qua litera ordinalis absit, oportet ut ultimus terminus aequationis et reliqua ejus pars habeant divisorem communem (facile nota methodo reperiendum) qui erit divisor aequationis, adeoque formulae datae. Deinde videbimus an aequatio divisibilis sit per formulam, in qua ipsa contineatur litera ordinalis, quae erit simplex vel quadratica vel cubica vel biquadratica etc. veluti $h+x$ vel $h+kx+xx$ vel $h+kx+lxx+x^3$ vel $h+kx+lxx+mx^3+x^4$, et ita porro. Id vero an fieri possit, et quomodo, sic investigabimus.

Ante omnia praeparetur aequatio data liberando eam a fractionibus, et summum ejus terminum a coefficiente, quod notum est semper fieri posse multiplicando radicem aequationis. Praeparata jam aequatione, investigetur an habeat radicem rationalem, seu an sit divisibilis per formulam simplicem $h+x$, ita enim habebitur valor rationalis ipsius x seu erit $x=-h$. Inventum jam est ab Harrioto, quantitatem h quaesitam fore unum ex divisoribus ultimi termini aequationis datae. Esto aequatio data $p+qx+rxx+sx^3+tx^4+x^5$; quaerantur divisores rationales integri ipsius p. Unus ex ipsis debebit esse 10, et si quaesitum succedit, unoque ex iis assumto pro 10, tentandum erit an $10+x$ dividat aequationem datam. Sed quia ubi plures sunt divisores (tam affirmativi quam negativi) saepius tentanda esset divisio, ideo minuatur vel augeatur radix aequationis datae, pro x ponendo $y+e$ eumque valorem substituendo in aequatione data, habebitur aequatio nova se-

cundum ordinalem y, cujus terminus ultimus erit $p+qe+ree+se^3+te^4+e^5$, nam reliquos ejus terminos investigare, nihil nunc quidem necesse est. Quodsi aequatio data est divisibilis, erit etiam nova divisibilis eodem modo, et cum datae divisor quaesitus debeat esse $h+x$, novae divisor erit $h+e+y$. Itaque $h+e$ debet esse unus ex divisoribus ultimi termini aequationis novae, qui vocetur (h), ergo $(h)-h=e$, ac proinde ex divisoribus ultimi termini aequationis datae seligatur ille, cujus differentia ab aliquo divisore termini ultimi aequationis novae sit quantitas assumta e. Quodsi plures divisores ex aequatione data hoc praestent, varietur quantitas assumta, pro e ponendo f et ex succedentibus divisoribus rursus deligatur is, qui ab aliquo divisore aequationis novae secundae differet quantitate altera assumta f. Et tam diu continuabitur variatio, donec divisor omnis, qui non constanter succedit, excludatur. Ita reperto h, tentanda est divisio per $h+x$. Quae si non succedit vel si nullus divisor non excluditur, impossibilis erit divisio quaesita, et aequatio data non habet radicem rationalem. Ut autem calculus facilior, loco ipsius e vel f vel g etc. quantitatis assumtae assumatur $1a$ vel $10a$ vel $100a$ vel $-1a$ vel $-10a$ vel $-100a$, literam a habendo pro unitate. Atque haec quidem jam habentur apud alios, repetenda tamen erant, ut caetera facilius intelligerentur.

Sed si aequatio sit divisibilis per formulam alicujus gradus, adeoque reducibilis licet non per valorem radicis rationalem, haec methodus nondum applicata habetur; reperi autem olim posse eam huc quoque promoveri magna facilitate nec minore fructu. Et quidem semper verum manet, ultimum terminum aequationis datae fore divisibilem per h, ultimum vel infimum terminum formulae dividentis quaesitae. Quodsi ea jam sit quadratica, nempe $h+kx+xx$, in ea pro x substituatur $e+y$ et terminus infimus novae secundum y prodeuntis erit $h+ke+ee$, quae quantitas sit (h) ut ante, unus nempe ex divisoribus termini ultimi aequationis novae, fiet $(h)-h$ divisibilis per e. Idem est in altioribus formulis, nam si esset cubica $h+kx+lxx+x^3$, pro x substituatur $e+y$, et ultimus terminus formulae novae erit $h+ke+lee+e^3$, id est (h) unus ex divisoribus ultimi termini aequationis novae, itaque rursus $(h)-h$ erit divisibilis per e. Generaliter ergo, ut investigetur an aequatio data alicujus rationalis integra sit divisibilis per talem formulam rationalem inferiorem secundum eandem literam ordinalem, velut x, notentur omnes divisores ultimi termini aequationis datae, et pro x ponendo $y+e$, notentur divisores ultimi termini aequationis novae, et ex divisoribus prioribus seligantur illi quorum differentia a posterioribus sit divisibilis per assumtam quantitatem e, utcunque e varietur; ita facile excludentur divisores non succedentes, cum quaevis variatio ad excludendum servire possit. Quodsi nullus non excludatur divisor ultimi termini aequationis datae, non potest ea aequatio vel formula dividi per formulam talem inferiorem, cujuscunque sit gradus, idque adeo praeclarum huic methodo inest, quod omnes gradus una eademque opera excluduntur. Sed si post quotcunque variationes ipsius e aliquis supersit divisor (duos autem minimum superesse necesse est, sibi respondentes seu ultimum terminum producentes), ex hypothesi poterunt etiam inveniri caeteri coefficientes formulae dividentis k, l, m etc., prout ea scilicet minus aut plus assurgit. Et licet diversa nonnihil operatione opus est pro graduum diversitate, est tamen communis processus, ut mox patebit.

Incipiamus a Formula dividente quadratica $h+kx+xx$, quae transformata, pro x ponendo $e+y$, dabit formulam novam, cujus ultimus terminus erit $h+ke+ee=(h)$. Ob inventas jam h et (h) notamque e, unam ex assumtis, cui respondet (h), habebitur et $k=(h)-h-ee,:e$, qui est integer, adeoque habebitur et formula dividens quaesita $h+kx+xx$, et porro quantitatem $(h)-h-ee,:e$ quia recurret, per compendium vocabimus 110.

Si formula dividens sit cubica $h+kx+lxx+x^3$, fiet $h+ke+lee+e^3=(h)$ et, quia $(h)-h-e^3$ dividi potest per e, proveniens compendio appellabimus 310 et fiet $k+le=310$. Sed pari jure pro e assumendo f, loco (h) sumatur (2h) et loco $(2h)-h-f^3,:f$ assumatur 311, fiet $k+lf=311$, ergo fiet $l=310-311,:,e-f$ $=320$, et fiet $k=310-320\,e$.

Si formula dividens sit biquadratica $h+kx+lxx+mx^3+x^4$, fiet $h+ke+lee+me^3+e^4=(h)$ et $(h)-h-e^4,:e=410$, adeoque $k+le+mee=410$, et pari jure faciendo $(2h)-h-f^4,:f=411$, fiet $k+lf+mff=411$; vocetur 420 et $+el+eem=410-411$, et 410

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -f\ \ -ff$

$-411,:,e-f$ vocando 420 fiet $l+em=420$. Sed pari jure fa-

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f$

ciendo $(3h)-h-g^4,:g=412$, et $410-412,:,e-g=421$, fiet $l+em=421$; habebimus $(f-g)m=420-421$, fiatque $420-421,:$

g

$,f-g=430$, proditque $m=430$ et $l=420=(e+f)430$, et $k=410$ $-420e+430(e+f)e-430ee$, et fiet $k=410-420e+430ef$.

Si formula dividens sit surdesolida $h+kx+lxx+mx^3+nx^4$ $+x^5$, fiet $h+ke+lee+me^3+ne^4+e^5=(h)$. $(h)-h-e^5,:e=510$, adeoque $k+le+mee+ne^3=510$, et pari jure $k+lf+mff+nf^3=511$. Sit $510-511,:,e-f=520$, fiet $l+m(e+f)+n(ee+ef+ff)=520$, et pari jure ob g, fiet $l+m(e+g)+n(ee+eg+gg)=521$, unde $m(f-g)+ne(f-g)+n(ff-gg)=520-521$, et posito $520-521,:,f-g$ $=530$, fiet $m+n(e+f+g)=530$ et pari jure $m+n(e+f+\gamma)=531$ et $n(g-\gamma)=530-531$. Sit $530-531,:,g-\gamma=540$, et fiet tandem $n=540$ et $m=530-540(e+f+g)$ et $l=520-530(e+f)+$ $540(ee+2ef+ff+eg+fg)-540(e+ef+ff)$ seu fiat $l=520-530(e+f)$ $+540(ef+eg+fg)$ et $k=510-520e+530e(e+f)-540e(ef+eg+fg)$

$$\begin{array}{ll} -530ee & +540ee(e+f+g) \\ & -540e^3 \end{array}$$

seu $k=510-520e+530ef-540efg$.

Sit ergo formula dividens aequatione data inferior eamque dividens quaecunque veluti $h+kx+lxx+mx^3+nx^4+x^5$, pro x substituatur $e+y$, fiet aliqua formula secundum y, cujus infimus terminus (h) erit $h+ke+lee+me^3+ne^4+e^5$, cujus maximus terminus quicunque e^c posito c exponentem gradus formulae dividentis, uti c hoc loco $=5$, fiat $(h)-h-e^c,:e=910$, adeoque erit $910=k+le$ $+mee+ne^4$. Similiter pro e ponendo f, et pro (h) ponendo (2h), fiat $(2h)-h-f^c,:f=911=k+lf+mff+nf^3$, quarum duarum aequationum ope tollendo k, et faciendo $910-911,:,e-f=920$, fiet $920=l$ $+m(e+f)+n(ee+ef+ff)$; pro f assumatur g, cui respondeat (3h), et ita fiet $(3h)-h-g^c,:g=912=k+lg+mgg+ng^3$ et 910 $-912,:,e-g=921$, prodibit $921=l+m(e+g)+n(ee+eg+gg)$, et fiet $920-921=m(f-g)+ne(f-g)+n(ff-gg)$. Sit $920-921,:$ $,f-g=930$, prodibit $930=m+n(e+f+g)$. Ita habetur et m, sed quia adhuc superest invenienda litera n, opus est adhuc una variatione, itaque loco ipsius g assumatur Θ, et fiat $931=m+$ $n(e+f+\Theta)$, et tollendo m fiet $930-931=n(g-\Theta)$, et sit $930-931,:$ $,g-\Theta=940$ et fiet $n=940$; itaque $m=930-940(e+f+g)$, $l=920$ $-930(e+f)+940(e+f,e+f+g)$

$\qquad -940(ee+ef+ff)$

seu $l=920-930(e+f)+940(ef+eg+fg)$;

denique
$$
\begin{array}{l}
k=910-920e+930e\,(e+f)-940e\,(ef+eg+fg)\\
\qquad\qquad\qquad +930ee \qquad\quad +940ee(e+f+g)\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; -940e^3
\end{array}
$$

seu $k=910-920e+930ef-940efg$.

Generale ergo theorema huc redit: Quaeritur formula aequatione data inferior eamque dividens $h+kx+lxx+mx^3+nx^4+$ etc. Ponamus h esse divisorem ultimi termini aequationis datae methodo superiore inventum, reliqui coefficientes k, l, m, n etc. sic invenientur: posito quantitates assumtas variandae aequationi datae fuisse e, f, g, Θ etc. nempe pro x ponendo $y+e$ vel $\nu+f$ vel $\omega+g$ vel $z+\Theta$ etc. et divisores ultimi termini convenientes in quavis variatione fuisse (h) vel (2h) vel (3h) vel (4h) etc., erit

$$
\begin{array}{llllll}
k= & 910 & -920e & +930ef & -940efg & +950efg\Theta\\
l= & & +920 & -930e & +940ef & -950efg\\
 & & & \;\;\;\;\; f & \;\;\; eg & \;\;\; ef\Theta\\
 & & & & \;\;\; fg & \;\;\; eg\Theta\\
 & & & & & \;\;\; fg\Theta\\
m= & & & +930 & -940e & +950ef\\
 & & & & \;\;\;\;\; f & \;\;\; eg\\
 & & & & \;\;\;\;\; g & \;\;\; e\Theta\\
 & & & & & \;\;\; fg\\
 & & & & & \;\;\; f\Theta\\
 & & & & & \;\;\; g\Theta\\
n= & & & & +940 & -950e\\
 & & & & & \;\;\;\;\; f\\
 & & & & & \;\;\;\;\; g\\
 & & & & & \;\;\;\;\; \Theta\\
u & & & & & +950
\end{array}
$$

posito non procedi variando ultra e, f, g, Θ, λ, seu non esse formulam dividentem plus quam quinque dimensionum, columnae et valores tot adjicientur (dementur) quot gradus accedent (decedent) formulae.

Postremo 910, 920, 930 etc. sunt integri quorum valores sic prodibunt:

$910=(h)-h-e$ c.,:l	$911=(2h)-h-f$ c,:f	$912=(3h)-h-g$ c,:g	$913=(4h)-h-\Theta$ c.,:Θ
$920=910-911$,:,e-f	$921=910-912$,:,e-g	$922=910-913$,:,e-Θ	
$930=920-921$,:,f-g	$931=920-922$,:,f-Θ		
$940=930-931$,:,g-Θ			

et continuando quot aequationes accedent uni columnae horum novissimorum valorum, tot etiam caeteris adjicientur.

XVIII.

DE ORTU, PROGRESSU ET NATURA ALGEBRAE, NONNULLISQUE ALIORUM ET PROPRIIS CIRCA EAM INVENTIS.

Algebram esse scientiam praestantissimam summique usus, dubium nullum est; sed cum multum adhuc absit a perfectione, nihil magis progressus ejus impedit, quam quod iis, qui non nisi vulgatis quibusdem problematis sunt exercitati, aut nondum in ejus arcana penetrarunt, absoluta creditur. Errant etiam qui ab ea quidvis sibi pollicentur et de viribus ejus sentiunt immoderati et pro arte inveniendi atque analysi in universum ac scientiarum principe habent. Algebra certe sive Numerosa sive Speciosa, quam nonnulli pro recondita admodum arte venditant, per se nihil aliud est quam Scientia Numerorum indefinitorum seu generalium, et eundem plane modum procedendi habet quam Arithmetica communis, si recte advertas, potestatem vero majorem, quia enim numeros indefinitos perinde tractat ac certos, nullo discrimine datorum seu cognitorum et ignotorum seu quaesitorum. Hinc non tantum ad habitudines datorum et quaesitorum ostendendas variaque problemata indirecta solvenda inservit, sed et generalia detegit, et ipsius Arithmeticae communis fontes aperit. Exemplo facili res erit illustrior.

Sit numerus 12 seu $10+2$, vel $a+b$ (posito 10 esse a et 2 esse b) multiplicandus in se ipsum; conferantur jam varii processus:

I. communis	II. communis explicatus	III. Algebraicus per Numeros distincte processum exhibentes
$\begin{array}{r} 12\\ 12\\ \hline 24\\ 12\;\\ \hline 144 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1^0+2\\ 1^0+2\\ \hline 2^0+4\\ 1^{00}+2^0\;\;\;\;\;\\ \hline 1^{00}+4^0+4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10+2\\ 10+2\\ \hline 10.2+2.2\\ 10.10+\;\;10.2\;\;\;\;\;\;\;\;\;\\ \hline 10.10+(2)10.2+2.2 \end{array}$

IV. Algebraicus per literas

$$
\begin{array}{r}
a+b\\
a+b\\
\hline
ab+bb\\
aa+ab\;\;\;\;\;\;\\
\hline
aa+2ab+bb
\end{array}
$$

ubi processus III et IV ostendit, productum Numero ex duabus partibus a, b vel 10 et 2 constante, per semet multiplicato, sive quadrato, constare ex duobus quadratis partium aa et bb (seu 10.10 et 2.2), itemque duplo ab seu duplo facto ex partibus 10 et 2. Ex quo theoremate ducta est extractio radicis quadraticae in communi Arithmetica usitata. Patet autem hinc, Algebram ipsam literis alligatam non esse, pro literis enim scribi possunt aliae notae, adeoque et numeri quicunque, modo numeri instar literarum tractentur, hoc est tanquam notae generales, non tanquam numeri communes. Itaque multiplicando 10 in 2 algebraice, non scribo 20, sed 10.2, et multiplicando 2 in 2 scribo 2.2, non 4; unde bis 10.2 non scribo 40, sed (2)10.2, ubi (2) est numerus verus, 10 et 2 sunt supposititii seu generales, stantes pro numeris quibuscunque, ut appareat, quis non pro his tantum, sed et pro aliis omnibus debeat esse processus, cum alias in processu I vel II theorema illud generale, quod ex processu III et IV elucet, non deprehendatur. Utile autem saepe animadverti pro literis vulgo usitatis, ut in processu IV, adhibere numeros supposititios, ut in processu III, tum multas alias ob causas, tum quia hoc modo calculum algebraicum continue examinare possum in numeris imo per abjectionem novenarii, quod artificium cum egregii sit usus et summae facilitatis, miror tamen nondum fuisse usurpatum. Si igitur problema proponatur, Algebra potest semper literas vel etiam numeros snpposititios (quod alias communiter tantum in regula falsi faciunt, sed processum literali similem non observando) assumere pro veris quaesitis, modo procedam ut in processu III aut IV. Verbi gratia postulatur a me numerus talis naturae, ut subtractus a suo quadrato relinquat triplum sui. Ponamus illum numerum esse 2, et cum eo procedamus, quemadmodum procederemus cum numero vero, si daretur, ut disceremus an satisfaciat, modo interim recordemur ipsum forte non esse verum, sed supposititium adeoque non actualiter addendum, subtrahendum, multiplicandum, sed tantum *designative*, ut in processu III. Sumamus igitur numerum 2, eumque subtrahamus a suo quadrato 2.2 fiet 2.2—2, qui debet esse aequalis triplo numeri seu (3).2, ubi 3 includo parenthesi quia est numerus verus, cum reliqui sint supposititii. Quoniam ergo 2.2—2 est aequale (3)2, hinc considerando an talis aequatio reddi possit simplicior, observo dividi posse utrumque latus per 2, fietque 2—(1) aequale (3), ergo addendo utrobique (1) ut numerus

supposititius ab uno latere solus habeatur, fiet 2 aequ. (3)+(1) seu 2 aequ. (4). Invenimus ergo numerum supposititium per verum, nempe 2 quaesitus seu suppositus valet (4), quod verum esse deprehenditur. Nam numerus 4 subtractus a suo quadrato 16 relinquit triplum sui, nempe 12. Breviter: 2.2—2 aequ. (3)2; ergo 2—(1) aequ. (3) adeoque 2 aequ. (4). In literis ita staret: aa—a aeq. 3a, ergo a—1 aequ. 3 adeoque a aequ. 4. Ex his paucis totius Algebrae fontes recte consideranti apparere arbitror.

Hinc autem causa apparet, cur Algebra seu Scientia numerorum generalium tractet de quantitate in universum. Id enim ideo accidit, quia revera omnis quantitas seu magnitudo exprimitur numero partium rei; ita magnitudo ulnae exprimi potest bipedalitate seu binario pedum, quia ulna ex duobus pedibus constat. Quoniam vero numerus partium rei quantitatem exprimens variat, prout alia atque alia unitas seu mensura assumitur, nam ejusdem ulnae magnitudo exprimetur per 24, si mensura seu unitas sit digitus sive pollex; hinc numerus quantitatem rei exprimens est indefinitus. Algebram autem de numeris indefinitis agere jam ostendimus, ergo et de rerum quantitatibus in universum. Hinc si numerus quantitatem ulnae exprimens sit ν, quadrata ulna exprimetur per $\nu\nu$, duae ulnae per 2ν, quadratum vero cujus latus sint duae ulnae erit $4\nu\nu$, quod deprehendetur verum, qualiscunque assumatur unitas; nam s unitas sit pes, ν valebit 2, ergo $4\nu\nu$ erit 16, itaque quadratum cujus latus sint duae ulnae, erit 16 pedum quadratorum. Sin unitas sit pollex, ν valebit 24 et $\nu\nu$ seu quadratum de 24 erit 576, et $4\nu\nu$ erit quater quadratum de 24 seu 2304, ac proinde quadratum cujus latus sint duae ulnae, erit 2304 pollicum quadratorum, quod cum 16 pedibus quadratis coincidit, et utraque significatio vel etiam alia quaecunque exprimetur per $4\nu\nu$.

Interim Algebra cum Mathesi universali non videtur confundenda. Equidem si Mathesis de sola quantitate ageret sive de aequali et inaequali, ratione et proportione, Algebram (quae tractat quantitatem in universum) pro parte ejus generali haberi nihil prohiberet. Verum Mathesi subesse videtur quicquid imaginationi subest, quatenus distincte concipitur, et proinde non tantum de quantitate, sed et de dispositione rerum in ea tractari. Itaque duae ni fallor sunt partes Matheseos generalis, *Ars combinatoria* de rerum varietate ac formis sive qualitatibus in universum quatenus distinctae ratiocinationi subjiciantur, deque simili ac dissimili, et

L o g i s t i c a sive A l g e b r a de quantitate in universum. Sane ars deciphrandi, ars ludendi latrunculis, similiaque quae ad Mathesin pertinere judicantur, magis Combinatoria quam Algebra indigent, et ipsa Algebra quatenus quantitates certis formulis exprimit, quae relationes quantitatum varias significant, arti combinatoriae subordinatur et per eam promoveri potest, ut suo loco ostendam. Longeque differt relatio quantitatum in genere ab ea specie, quae dicitur ratio seu proportio. Ita in circulo datur quaedam relatio (non vero proportio sive ratio) semper eadem inter sinum et sinum complementi, sed ad eam exprimendam assumendum est tertium quid nempe radius, interdum et alia plura, cum tamen ad proportionem intelligendam sola relata inter se comparari sufficiat.

Multo magis aberrant, qui Algebram pro arte inveniendi habent et tanquam omnium Scientiarum humanarum principem venerantur, quasi scilicet omnes relationes rerum per Algebram exprimi possint, quae tamen de solis agit relationibus numerorum in genere et aliarum rerum quatenus numeri in iis considerantur. Tantumque abest ut cum Algebra coincidat illa Logicae pars praestantissima, ut potius videamus ipsam hactenus Algebram haerere in suismet praeceptis inveniendis et superioris artis auxilio indigere, multum enim adhuc abest a perfectione, veluti mox patebit. Quidam etiam Algebram cum Analysi, aut Analysin cum arte inveniendi confundunt, quorum utrumque erroneum est; quaedam enim operationes Algebraicae sunt syntheticae, ut quando certas aequationum formulas per genesin sive synthesin ex suis radicibus excito et deinde oblatam aequationem in harum Tabula quaero. Et longe differt Ars inveniendi ab Analysi, scilicet ut genus a specie, nam ut ex hoc exemplo apparet, quaedam per synthesin felicius inveniuntur. Et Tabulae, series, loca, revera instrumenta sunt syntheseos. Itaque si problema aliquod difficile soluturus incipiam a casibus facilioribus ejusdem problematis, aut ab aliis problematibus cognatis, ut scilicet progressionem aliquam deprehendam aut alioqui mihi viam ad quaesitum sternam, revera synthesin exerceo, et si integram aliquam Scientiam vel scientiae partem tractans secundum combinatoriae artis leges omnia problemata potiora percurram a simplicioribus ad magis composita procedens, et ita solutionem problematis alicujus quaesiti inter caetera quasi aliud agendo reperiam, id per synthesin invenisse censebor. Sed quatenus problema aliquod ita tracto ac si nullum aliud problema jam solutum vel ab

alio vel a me ipso uspiam terrarum extaret, eatenus analytice procedo, reducens scilicet problema propositum ad alia faciliora, et haec rursus ad alia adhuc faciliora, donec ad prima postulata reducatur, quae per se in potestate sunt; sed methodus pure analytica valde rara est, et vix in mortalium potestate, et plerumque aliquid syntheseos seu theorematum vel problematum praeinventorum admiscetur. Et sunt quaedam quae nisi per tabularum jam conditarum subsidia sive per quandam inductionem demonstrativam non invenientur. Est autem analysis rursus vel per saltum vel per gradus; posterior pulchrior est, sed nondum satis explicata, prior vulgo analyticis usitatior est, sed non aeque menti satisfacit, et saepe ad prolixos calculos ducit.

Sed et Calculus in universum et ars characterum longissime distat ab Algebra; imo certum est, ne omnem quidem calculum Mathematicum ab Algebra et a Numeris pendere. Dantur enim Calculi quidam ab hactenus usitatis plane diversi, ubi notae sive characteres non quantitates sive numeros definitos vel indefinitos, sed alias plane res, verbi gratia puncta, qualitates, respectus significant. Exempli gratia (ut taceam calculum figurarum et modorum in Logica, ubi literae significant propositionum quantitates et qualitates) datur analysis quaedam peculiaris calculusque sui generis Geometriae proprius a me excogitatus, ab omni hactenus recepto toto coelo diversus, non quantitates sed situs directe exprimens, cum calculus Algebraicus situm ad magnitudinem detorqueat, adeoque in ambages abducat. Unde prolixi calculi algebraici nonnunquam oriuntur, ex quibus vix multo studio exculpitur apta constructio, quam aliquando situs inspectio communi Geometrarum Methodo nullo negotio exhibuisset. Verum quia communis illa Methodus attentione ad figuras imaginationem fatigat, et in implicationibus aegre ad exitum pervenit, hinc ipsamet quoque sui generis calculo sublevari potest; eique conjungenda est analysis Veterum per Data et Loca, cujus apud Euclidem, Apollonium, Pappum, Marinum vestigia reperiuntur.

Quoniam autem Algebra multos habet recessus non satis hactenus cognitos (neque enim insignis haec scientia satis comprehensa hactenus et in artis formam reducta est), placet ideam ejus aliquam paucis delineare. Soleo autem eam comparare cum Logica, et quemadmodum in Logica habemus Terminos simplices, Terminorum habitudines, hoc est propositiones, deinde syllogismos quibus

comprobantur propositiones, et ipsam denique Methodum quae om-
nes istas operationes mentis ordinat ad scopum praefixum: ita in
Algebra considero Numeros, Numerorum habitudines seu quasi
propositiones Algebraicas (quarum potissimae sunt aequationes et
analogiae), modum unam habitudinem ex alia derivandi seu syllo-
gismos Algebraicos, et denique Methodum quae praecepta ad in-
ventionem quasi ordinat. Numeri seu Termini simplices
Algebraici sunt vel positivi vel privativi, integri (iique simplices
aut figurati) vel fracti, rationales vel surdi, et impuri vel affecti,
sunt etiam numeri communes vel transcendentes, et denique pos-
sibiles vel imaginarii seu impossibiles, et generantur per operationes
quae sunt vel syntheticae (additio, multiplicatio, potestatis ex radice
excitatio) vel analyticae (subtractio, divisio, extractio radicis) et
vel actu fiunt vel aliquando tantum faciendae designantur, quod in
analyticis operationibus non semper evitari potest, quia non sem-
per actualis analysis habet locum. Magnaque hujus analyticae pars
in hoc consumitur, ut quando fieri potest fracti reducantur ad in-
tegros, surdi ad rationales, surdi affecti ad puros, imaginarie ex-
pressi ad possibiles, transcendentes ad communes; sed haec inter-
ventu sequentium fiunt. Nihil etiam prohibet inter terminos sim-
plices integram seriem vel integrum locum plurium numerorum
aut quantitatum simul spectari, quando de quolibet termino vel
quantitate seriei aut loci accipi potest quod asseritur, praesertim
cum etiam indefinitos numeros hic considerari jam monuerimus.
Habitudines numerorum sunt aequalitas (Algebristis aequatio), ma-
joritas et minoritas (seu limites), homogeneum, proportio, commen-
surabilitas, analogia proportionum, aliaeque relationes magis com-
positae, cum ad relationem duarum quantitatum exprimendam opus
est tertiam ullam vel plures ipsi homogeneas assumi, ubi magni
sus est dispicere quaenam sint Homoeoptata seu similiter relata,
ut enim analogia seu similitudo proportionum est ad proportionem,
ita homoeoptosis ad relationem; ex. gr. sinus rectus et sinus
complementi in circulo sunt homoeoptata ad radium. Syllo-
gismi Algebraici sunt collectiones unius harum habitudinum
ex alia, verbi gratia transformationes, emendationes, depressiones
proportionum, aequationum et analogiarum, introductio vel abro-
gatio legis homogeneorum, ablegata vel adhibita unitate, inventio
communis mensurae, conversio aequationis in analogiam vel contra,
limites aequationum seu collectio majoritatis ex aequalitate, et

contra; reductio plurium aequationum ad unam ultimam vel saltem ad pauciores seu sublatio literarum, et contra dispersio unius aequationis in plures assumtis literis novis, denique extractio radicum ex aequationibus per inventionem valoris puri, quantum licet simplicis, quae est aequationum absolutissima. Methodus autem ipsa quae oeconomiam calculi totius dirigit, ostendere debet, quibusnam terminis, habitudinibus et habitudinum transformationibus et quo ordine sit utendum, ut ex datis quaesitum obtineatur, idque vel exacte (per expressiones quas natura rei patitur) vel per appropinquationes: ubi et considerandum est quaenam problemata sint definita, cum definitate ambigua (qui fons est irrationalitatis) vel plane indefinita; quo facto interdum satisfacit integra aliqua series seu locus (modo ad ipsum quoque definiendum conditiones adsint sufficientes) vel in eo maximum vel minimum. Interdum in nostra potestate est assumere aliquid cum certa quadam cautione determinante, et sane interdum dantur conditiones quaedam definientes quae admodum exoticae sunt nec ad aequationes aut alias habitudines communes facile, imo aliquando nullo modo revocari possunt, ut fit in multis problematis Diophanteis itemque in problematis Geometriae transcendentis. His denique subjici posset Usus Algebrae in Geometria et aliis partibus Matheseos, ubi inprimis ostendenda sunt haec duo nondum satis explicata, quomodo Geometricae conditiones ad calculum Algebraicum quam optime reducantur, ne postea depressionibus opus sit et contra quomodo ex absoluto jam calculo rursus constructiones Geometricae commode eliciantur, quorum prius est transitus a Geometria ad Calculum, posterius vero est reditus a Calculo ad Geometriam. Atque haec demum idea Algebrae mihi dignitati ipsius respondere videtur, quam nescio an hactenus animo satis complexi sint vel saltem prodiderint, qui de ea scripserunt.

Nunc de Historia Algebrae paucis. Platonem Pappus ait primum Methodo usum esse quaesitum assumendi tanquam inventum, quae potissimum in Algebra adhibetur. Literas vel alias notas sive species pro magnitudinibus exprimendis earumque habitudinibus intelligendis assumi nihil novum est, quid aliud enim fecit Euclides toto libro quinto? Qui Diophantum, imo qui Archimedem et Apollonium legit, ne dubitare quidem potest, quin Veteres calculo usi sint qualis in Algebra speciosa (a speciebus sive literarum notis dicta) hodie usurpatur, licet artem suppresserint. Primi

Arabes ejus Elementa quaedam videntur publicasse, forte ex libris quibusdam Graecis amissis, nisi suspicari malimus Sinensium alioquibusdam rumve Indorum aut etiam Aegyptorum quaedam ad ipsos pervenisse. Scholastici quidam maxime Angli moliti sunt singulares quosdam calculos admodum subtiles circa intensiones et remissiones qualitatum et formarum, viresque ac motus, quos miror plane fuisse neglectos, ut ne quidem celeberrimus Wallisius licet ipse Anglus in sua Algebraicarum rerum historia eorum meminerit, cum tamen subsit aliquid solidi et specimen praebeatur quasi Metaphysicae cujusdam Mathematicae. Princeps eorum fuit Johannes Suisset dictus Calculator, cui addendi Thomas Bradwardinus, Nicolaus Ovem, et alii. Arabum porro Algebra circa Friderici II. tempora videtur et ad Europaeos pervenisse maximeque ab Italis primum fuisse exculta, quibus et inventio Computisticae Mercatoriae debetur. Regiomontanum nostrum intellexisse Algebram et in Geometria quoque exercuisse intelligi potest ex quibusdam problematis Geometricis, quae ipse ait se solvere posse per artem cosae, non vero Geometrice, id est in numeris, non in lineis. Circa tempora Typographiae repertae aut paulo post florebat quidam Frater Lucas de Burgo, cujus scripta Algebraica typis editorum prima sunt, etsi alios ante ipsum scripsisse ex ipsomet appareat. Porro hactenus eo res perducta erat, ut aequationes quadraticae possent solvi, quod jam habet et Diophantus. Primus mortalium Scipio Ferreus circa initium opinor superioris seculi altius ascendit modumque invenit resolvendi aequationes cubicas, neque enim ullum vel vestigium talis inventi ante ipsum hactenus apparet. Artem autem arcanam habuit dum vixit, nec nisi paucos discipulos docuit. Quorum unus forte in certamen doctrinae descendens cum Nicolao Tartalea Mathematico ingeniosissimo, proposuit ei problemata quae ad aequationes hujusmodi reducebantur. Tartalea aemulatione accensus et vinci impatiens, summa animi contentione idem inventum proprio marte feliciter extudit. Quod cum increbuisset, Hieronymus Cardamus, homo maximi ingenii et vastissimae doctrinae, invento diu inhiavit frustra, donec autoritate Gubernatoris Tartaleam Mediolanum acciri curavit, ab eoque demum artificium expiscatus est. Quo semel cognito rem variis additionibus et applicationibus locupletatam publicavit in libro, cui titulum dedit Artis magnae, ita tamen ut sibi inventionem non tribueret. Ex hoc Cardani opere apparet, sublationem secundi termini aliasque emendationes et trans-

formationes aequationum, imo et artem comparandi aequationes cum aliis similibus Cardano non fuisse omnino ignotam. Fuit autem juvenis quidam Bononiensis Cardano familiaris, cui nomen Ludovico Ferrario, cujus florente adhuc aetate extincti vitam scripsit ipse Cardanus, quae inter opera ejus extat. Hic Ferrarius praeclaro invento Algebram uno adhuc gradu promovit, primusque omnium invenit resolutionem quarti gradus seu aequationis quadratoquadraticae, docuitque eam reduci posse ad quadraticam interventu cubicae. Originem inventi totumque processum distincte exposuit Raphael Bombellus in Algebra, Italico sermone jam superiore seculo edita. Itaque fatendum est, Algebram totam quanta nunc habetur, quatenus in perfecta aequationum resolutione seu inventione generalis radicum valoris consistit, revera Italis deberi. Neque enim Vieta aut Cartesius vel hilum adjicere potuerunt, idque adeo verum est, ut ne nunc quidem quisquam dederit aliquid unde spes sit, generaliter aequationes surdesolidas seu quinti gradus atque altiores perveniri posse. Tantum adhuc abest ut Algebra perfecta dici possit. Unde etiam intelligi potest, tantum abesse ut Algebra sit ars inveniendi, ut contra ipsismet Algebristis haereat aqua, donec auxilio superioris alicujus artis aliquando expediantur. Ea autem est Combinatoria, per quam aditum demonstratum habeo ad generales aequationum resolutiones, quantum possibile est, de quo aliquando plenius, ubi calculos exsequi licuerit, quanquam illi per ipsam hanc artem mire contrahantur: nam Scipionis Ferrei et Ludovici Ferrarii artes sunt peculiares suis gradibus, in altioribus cessant. Cartesii quoque methodus pro quarto gradu (quae est Ferrariana transformata) quasi casu tantum succedit in hoc gradu, at pro sexto et aliis paribus minime; et *methodi* tales valde *imperfectae* sunt, quoniam qui eas aggrediebatur, praevidere non poterat se per eas exitum consecuturum esse. Quod in tenebris micare est.

Debet quoque nonnihil Algebra Ludovico Nonio Lusitano, qui de ea superiore seculo non male scripsit, observavitque ni fallor radicem esse divisorem ultimi seu absoluti termini, quod fortasse aliis occasionem dedit longius pergendi. Literas quoque pro numeris jam Algebraici superioris seculi usurpabant, inprimis quando occurebant secundae radices quas vocant, id est quando plures incognitae erant supponendae, quin et Gulielmus Gosselinus Cadomensis in sua Algebra Lutetiae 1575 edita literis utitur pene ad

Vietaeum morem. Nihilominus Franciscus Vieta, Consiliarius et Magister libellorum supplicum Regis christianissimi, Algebrae Speciosae quae nunc frequentatur, verus parens merito habetur; is enim calculum a numeris tam cognitis quam incognitis sic ad notas sive species traduxit, ut jam certae semper formulae generales et quasi Canones habeantur, et ita artis combinatoriae usus esse possit in Algebra, nam revera auxilio hujus artis (quae de formulis earumque similitudine et habitudinibus in universum agit) debetur quicquid Speciosa super communem Algebram praestitit, quanquam eadem per numeros supposititios instar literarum adhibitos multo adhuc majore fructu consequi liceat, ut alias ostendam. Hinc jam facile fuit Vietae sua praecepta de legibus Homogeneorum aequationumque examine condere, quin et Geometriam ex Algebra et rursus hanc ex illa illustrare, dum magnitudines per lineas rectas, potestates autem per rectas in continua progressione geometrica assumtas exprimit. Idem Vieta egregium inventum primus dedit, analysin scilicet aequationum generalem numerosam, ut scilicet radices quadraticae, cubicae, biquadraticae, surdesolidae, et affectae ex termino absoluto aequationis numericae perinde extrahantur ac vulgo radicem puram quadraticam, cubicam etc. ex numero extrahere solemus vel exacte vel quantum satis per appropinquationem, quando exacta radix non datur. Ipse autem Analysi Algebraicae per se (abstrahendo animum ab applicatione ad numeros definitos et lineas) nihil Vieta adjecit nisi quod radices plures ejusdem aequationis et genesin aequationum ex multiplicatione radicum in se invicem cognovit, ut ex ejus Sectionibus angularibus, item et Tabula sub finem operis posita intelligi potest. Caeterum Vietaea prosecuti sunt Alleaumius Andersonus, Alb. Girardus, Oughtredus, qui eleganter contraxit et plana reddidit aliasque notas compendiosas adjecit. Nec dubito quin praeclara quaedam ad Algebrae illustrationem pertinentia lateant in schedis Joachimi Jungii Lubecensis, viri excellentis (si quid ego judicare possum) cum Galilaeo et Cartesio conferendi, inter . . . .*) Algebraici habentur.

Porro novam lucem Algebrae attulit Th. Harriotus Anglus; is occasione eorum ut arbitror quae ex Nonio de divisoribus ultimi termini et ex Vieta de pluribus radicibus ejusdem aequationis

---

*) Schadhafte Stelle des Manuscripts.

paulo ante retulimus, cogitavit aequationes posse concipi tanquam formulas aequales nihilo, et ita produci altiores ex inferioribus in se invicem ductis, adeoque ex multiplicatione tot aequationum radicalium in se invicem, quot dimensionum est aequatio, ipsam aequationem generari. Hinc praecepta de numero radicum aequationis, de discernendis radicibus positivis et privativis, de radicum auctione et diminutione, multiplicatione et divisione, de depressione aequationum per divisionem, itemque de Aequationibus Canonicis seu generalibus, ex quarum signis et terminis datae aequationis natura, constitutio et genesis, numerusque radicum realium, positivarum, privativarum cognosci possit. Quae quidem omnia non nominato Harrioto in sua Geometria exhibuit Cartesius, Wallisio aliisque multis Harriotum exscripsisse non immerito visus, usque adeo enim omnia consentiunt ut in difficilioribus quae Harriotus inexplicata reliquit etiam Cartesius substiterit. Circa eadem tempora..... Fermatius in suprema curia Tolosana Senator feliciter prima fundamenta jecit pulcherrimae Methodi de maximis et minimis, quibus postea Huddenius et Slusius, excellentes Geometrae, inaedificaverunt; ego vero ni fallor edito in Actis Eruditorum schediasmate nuper mense... anni... colophonem imposui effecique invento novo calculi differentialis, ut jam fractas, irrationales et transcendentes non moretur quarum alias sublatio calculi laborem in immensum auget, praeterquam quod transcendentes non semper tolli possunt, quem fructum meae methodi nuper Joh. Craigius Scotus in erudito de Quadraturis libro agnovit et praedicavit.

Is status erat Algebrae, quando in scenam prodiit vir utique insignis Renatus Cartesius, edita Geometria quae licet sit egregia, tamen longe infra opinionem posita est, quam de ea vulgus concepit. Nam ipsi quidem Algebrae nihil plane quod sciam adjecit alicujus momenti, nisi forte quod comparationem aequationum (Vietae et anterioribus non ignotam) reddidit expeditiorem ac frequentius inculcavit. Circa applicationem tamen Algebrae ad Geometriam id unice in Cartesio laudo, quod linearum curvarum etiam altiorum graduum naturas aequationibus expressit. Poterat hoc et Vieta, quis dubitat? sed ille Veterum praejudicium secutus constructiones quae earum ope fiunt, tanquam parum Geometricas spernebat, quanquam et Cartesius postea eundem errorem erraverit, dum lineas illas Geometria exclusit, quae Algebrae communis calculo exprimi non possunt, et perinde locutus est ac si omnia

Ceometriae problemata ad aequationes certi gradus revocari possent. Ex Cartesianae Methodi sectatoribus nemo quod sciam aliquid valde memorabile adjecit Algebrae, praeter Johannem Huddenium et Renatum Franciscum Slusium. Huddenii duae Epistolae perbreves magnam profundarum inquisitionum vim complectuntur. Slusius evitata ultima aequatione unius incognitae docuit facilius solvi problemata per loca seu per duarum incognitarum aequationes duas, Veterum artificia ad novas methodos recte accommodans. Cum vero interim et inventa Geometrica Cavalerii, Gregorii a S. Vincentio ac Guldini increbrescerent, quibus Archimedeae artes detectae sunt, mox in illis alii analytices Algebraicae beneficio multo longius processere, ex quibus excellunt Fermatius, Robervallius, Torricellius, Hugenius, Pascalius, Wallisius, Wrennus, Brounkerus, cum Heuratio Neilius, Jac. Gregorius, Barrovius, quorum praeclara inventa cum fere Geometrica potius sint quam Algebraica, nunc non membro. Nisi quod Wallisius edita Arithmetica infinitorum aliis egregiis meditationibus praelusit, quae antequam persequar, redeundum mihi est ad Johannem Pellium Anglum, Mathematicum plane insignem, qui jam antequam Cartesius increbresceret Algebraicum calculum suo quodam peculiari modo ordinavit pulchra et commoda ratione, cujus specimina extant in eleganti Algebra Joh. H. Rahnii Helvetii Germanice edita. Eundem Pellium audio habere modum aequationes omnis generis eo reducendi ut solvi possint per Tabulas Sinuum et Logarithmorum, quod si commode fieri potest, ego magni faciendum putarem, vereor tamen ut semper procedat. Novam porro lucem Algebrae et Geometriae attulit Methodus per series infinitas, cujus primus quod sciam specimen insigne dedit Nicolaus Mercator Holsatus, Geometra et Astronomus plane eximius, in Logarithmotechnia; sed longius rem provexit Johannes Neutonus Anglus, praestantissimi ingenii Mathematicus, qui ex quacunque aequatione radicem extrahit ope seriei infinitae. Ego vero ad series infinitas diversa plane ratione perveni, specimenque satis hodie notum dedi circa Circuli magnitudinem. Aliaque habeo, quibus series infinitae ni fallor in immensum promoventur. Multa etiam circa summas serierum vel progressionum sive finitarum sive infinitarum exhibendas reperi aliisque variis modis Algebram locupletavi. Pro literis Numeros (sed supposititios sive fictos) postliminio in Algebram reduxi multiplici fructu, quorum unus est quem supra tetigi quod ita semper calculum in numeris

possum examinare, imo per abjectionem novenarii, quod continue ad quamvis novam operationem faciendo, errores calculi, quibus nihil est molestius, mirifice praecaventur. Excogitato calculo differentiali......*) Tetragonisticum voco, Theoremata.......... circa tangentes et quadraturas et his cognata, quae alii per lineas difficulter extuderunt, nullo negotio per singularem calculandi rationem antea ignotam exhibeo et in immensum augere possum, eaque ratione ni fallor Geometriam illam abstrusiorem ad alium plane statum traduxi. Deinde ut meam Machinam Arithmeticam taceam, quae a Baculis Neperianis toto genere differt, et multiplicationes (verbi gratia) nullis intervenientibus additionibus exhibet, aliud reperi diversae naturae instrumentum mire simplex et admodum parabile, quo omnes aequationes utcunque affectae sive lineares sive numericae, quae pro magnitudine instrumenti certum gradum non excedunt, solvuntur. Proposui et modum condendi certas Tabulas, quae idem quodammodo praestarent in Algebra quod Tabulae sinuum et logarithmorum in Trigonometria, et laborem calculi valde levarent, iisque habitis multa primo aspectu dignoscerentur. Praeterea novum plane aditum aperui Algebrae transcendentis, hactenus incognitae, in qua quantitates etiam quas communis calculus exprimere non potest designantur per aequationes finitas quidem, sed gradus indefiniti, ubi ipsa quantitas incognita ingreditur in exponentem. Verbi gratia $x^x + x$ aqu. 30, cui aequationi (quae gradus est indefiniti) satisfacit x aequ. 3, quia tertia potestas de 3 addita ad 3 facit 30. Sed plerumque valor nisi in transcendentibus impossibilis est, licet per Geometriam transcendentem, imo et per numeros appropinquantes exhiberi possit. Multa etiam alia in hoc studiorum genere habeo, sed quae nunc enumerare longum foret. Et jam finiendum est, ubi illud tantum subjecero, Carolum Renaldinum, apud Patavinos Professorem Medicum, multiplicis et accuratae doctrinae virum, duo volumina in folio, ut vocant, bonae frugis plena edidisse de Resolutione et Compositione Mathematica, quibus et communem et speciosam Algebram complexus est. Sed et Joh. Kersey Anglum laudata industria quoddam Algebrae corpus edidisse, cui vellem ex Joh. Collinii, non tantum in his studiis versatissimi, sed et ad instar Mersenni cujusdam Angli aliorum in-

---

*) Das Manuscript ist an dieser Stelle schadhaft.

dustriam excitantis et inventa conservantis promoventisque instructissima penu non vulgaria hujus artis locupletamenta accessissent. Novissime Historiam Algebrae inspersis praeceptis variisque inventis suis, justo opere dedit celeberrimus Wallisius, cui quemadmodum jam supra notavimus, haec studia multum debent. Quae nos hic cogitatis ejus et narrationibus adjecerimus, conferendo intelligentur.

XIX.

REMARQUE SUR UN ENDROIT DES NOUVEAUX ELEMENS D'ALGEBRE DE Mr. OZANAM.

L'Algèbre de Mr. Ozanam, que je viens de recevoir, me paroit bien meilleure que la plûpart de celles qu'on a vûes depuis quelque temps, qui ne font que copier Descartes et ses Commentateurs. Je suis bien aise qu'il fasse revivre une partie des préceptes de Viete, inventeur de la Spécieuse, qui méritoient de n'être point oubliés. On y trouve de plus quelques adresses très utiles dans les problêmes à la mode de Diophante. C'est fort bien fait aussi qu'il cherche de pousser les divisions, qui se doivent faire par des Polynomes irrationels, ou d'ôter l'asymmetrie du Dénominateur d'une fraction, en le multipliant aussi-bien que le Numerateur, par une formule, laquelle, avec le Dénominateur, fait un produit rationel, et par conséquent de résoudre ce problême très utile: Trouver une formule, par laquelle multipliant un Polynome irrationel donné, le produit devienne rationel. Mais il s'est arrêté en beau chemin, ayant crû (p. 77) que cela n'allait que jusqu'aux Quadrinomes dans les racines quarrées. C'est pourquoi je veux en donner la solution dans le Pentanome ou Quinome, comme il l'appelle, afin de l'encourager, ou quelqu'autre qui en aura le loisir à achever cette recherche qui le mérite assez.

Soit un Quinome $a+b+c+d+e$, où j'entends par ces lettres des quantités dont les quarrés sont rationels, par exemple $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}$. Multiplions le Quinome proposé par $a+b+c-d-e$, et il vient $2ab+2ac+2bc-2de+mm$, supposant

$mm=aa+bb+cc-dd-ee$. Il est vrai que ce produit est encore un Quinome en effet; mais nous corrigerons ce défaut dans la suite. Multiplions ce produit par $2ab+2ac+2bc+2de-mm$, et il proviendra $-n^4+4mmde+8abc(a+b+c)$, supposant $n^4=m^4-4aabb-4aacc\ \ 4bbcc+4ddee$. Ainsi ce produit nous est venu en multipliant le Quinome proposé par $a+b+c-d-e$, et en multipliant ce qui en vient, encore par $2ab+2ac+2bc+2de-mm$, ou en multipliant le Quinome proposé tout d'un coup par $(a+b+c-d-e)(2ab+2ac+2bc+2de-mm)$. Mais si au lieu de cela on multiplioit le Quinome proposé par $(a+b+c-d-e)(2ab+2ac+2bc+2de-mm)-8abc$, il est visible qu'il proviendroit $-n^4+4mmde+8abc(a+b+c)-8abc(a+b+c+d+e)$, c'est-à-dire $-n^4+4mmde-8abc(d+e)$. Ce qui est un Quadrinome, et nous avons gagné. Mais qui plus est, ce Quadrinome a l'avantage de pouvoir être reduit d'abord au binome, en employant la seule multiplication par son contraire, sans passer par le trinome: et ainsi nous rattrappons ce que nous avions été obligés de perdre au commencement par une multiplication qui n'avançait pas d'abord. Car multipliant ce produit par $-n^4+4mmde+8abc(d+e)$, il nous viendra p^8-8q^6de, supposant $p^8=n^8+16m^4ddee-64aabbcc(dd+ee)$, et $q^6=mmn^4+16aabbcc$. Et ce produit étant enfin multiplié par p^8+8q^6de, nous aurons une quantité délivrée de l'asymmetrie, qui est $p^8-64q^{12}ddee$. Ce qu'il fallait faire. Et ce produit nous vient en multipliant le Quinome $a+b+c+d+e$ par le produit de ces trois quantités: $(a+b+c-d-e)$, $(2ab+2ac+2bc+2de-mm)-8abc$, $-n^4+4mmde+8abc(d+e)$, p^8+8q^6de.

Il y a démonstration que tout polynome, quelque puisse être le nombre et quelle que puisse être l'espèce des racines, pourra toûjours être multiplié par une telle formule, que le produit soit rationel. Et en poussant le calcul des canons, on y trouvera une progression réglée qui nous épargnera la peine d'aller plus loin. J'appelle Canons, des formules générales, qui donnent d'abord ce qu'on demande. Par exemple, à l'égard des racines quarrées, il y aura

dans le Binome $a+b,\ a-b = aa-bb$

dans le Trinome $a+b+c,$

$$
\begin{array}{lll}
a^3 & -aab+2abc= & a^4-2aabb \\
b^3 & \ \ abb & b^4\ \ 2aacc \\
c^3 & \ \ aac & c^4\ \ 2bbcc \\
 & \ \ acc & \\
 & \ \ bbc & \\
 & \ \ bcc & \\
\end{array}
$$

Et non pourra calculer des canons semblables pour le Quadrinome, Quinome etc., ce qui donnera enfin la règle de la progression, qui est le canon des canons. J'ai coutoume de me servir d'expressions abrégées; par exemple, en disant dans le trinome $a, a^3 - aab + 2abc = a^4 - 2aabb$.

XX.

MONITUM DE CHARACTERIBUS ALGEBRAICIS.

Quoniam variant Geometrae in characterum usu, nova praesertim Analysi inventa, quae res legentibus non admodum provectis obscuritatem parit; ideo e re visum est exponere, quomodo Characteres adhibeantur Leibnitiano more, quem in his Miscellaneis secuturi sumus.

Literae minusculae a, b, x, y solent significare magnitudines, vel quod idem est, numeros indeterminatos; *majusculae* vero, ut A, B, X, Y puncta figurarum; ita ab significat factum ex a in b, sed AB rectam a puncto A ad punctum B ductam. Huic tamen observationi adeo alligati non sumus, ut non aliquando minusculas pro punctis, majusculas pro numeris vel magnitudinibus usurpemus, quod facile apparebit ex modo adhibendi. Solent etiam literae priores, ut a, b, pro quantitatibus cognitis vel saltem determinatis adhiberi, sed posteriores, ut x, y, pro incognitis vel saltem pro variantibus.

Interdum pro literis adhibentur Numeri, sed qui idem significant quod literae, utiliter tamen ursurpantur relationis exprimendae gratia. Exempli causa, sint binae aequationes generales secundi gradus pro incognita x, eas sic exprimere licebit: $10xx + 11x + 12 = 0$ et $20xx + 21x + 22 = 0$. Ita in progressu calculi ex ipsa notatione apparet quantitatis cujusque relatio, nempe 21 (ex gr.) per notam dextram quae est 1 agnoscitur esse coefficiens ipsius x simplicis, at per notam sinistram 2 agnoscitur esse ex aequatione se-

cunda. Sed et servatur lex quaedam homogeneorum. Et ope harum duarum aequationum tollendo x prodit aequatio, in qua similiter se habere oportet 10, 11, 12 et 12, 11, 10; item 20, 21, 22 et 22, 21, 20; et denique 10, 11, 12 se habent ut 20, 21, 22, id est si pro 10, 11, 12 substituas 20, 21, 22, et vice versa, manet eadem aequatio. Idemque est in caeteris. Tales numeri tractantur ut literae, veri autem numeri, discriminis causa, parenthesibus includuntur vel aliter discernuntur. Ita in tali sensu 11.20 significat numeros indefinitos 11 et 20 in se invicem ductos, non vero significat 220, quasi essent numeri veri. Sed hic usus ordinarius non est, rariusque adhibetur.

Signa, Additionis nimirum et *Subtractionis*, sunt + plus, — minus, ± plus vel minus, ∓ priori oppositum minus vel plus. At (±) vel (∓) est nota ambiguitatis signorum, independens a priori, et ((±)) vel ((∓)) alia independens ab utraque. Differt autem *Signum ambiguum* a *Differentia* quantitatum, quae etsi aliquando incerta, non tamen ambigua est. Sic $\pm 5 \mp 3$ (ubi signa adhibentur ambigua) significat vel $+5-3$, id est 2, vel $-5+3$, id est -2. Sed si differentia exprimenda sit inter a et b, non sufficit scribere $\pm a \mp b$; si enim sic pro a et b substituas 5 et 3, patet hoc modo non semper prodire differentiam $+2$, sed vel $+2$ vel -2. Sed differentia inter a et b significat $a-b$ si a sit majus, et $b-a$ si b sit majus, quod etiam appellari potest moles ipsius $a-b$, intelligendo (exempli causa) ipsius $+2$ et ipsius -2 molem esse eandem, nempe $+2$; ita si $a-b$ vocemus c, utique *mol.* c seu moles ipsius c erit $+2$, quae est quantitas affirmativa, sive c sit affirmativa sive negativa; id est sive sit c idem quod $+2$, sive c sit idem quod -2. Et quantitates duae diversae eandem molem habentes semper habent idem quadratum.

Multiplicationem plerumque significare contenti sumus per nudam appositionem; sic ab significat a multiplicari per b. Numeros multiplicantes solemus praefigere; sic 3a significat triplum ipsius a. Interdum tamen punctum vel comma interponimus inter multiplicans et multiplicandum, velut cum 3,2 significat 3 multiplicari per 2, quod facit 6, si 3 et 2 sunt numeri veri; et AB, CD significat rectam AB duci in rectam CD atque inde fieri rectangulum. Sed et commata interdum hoc loco adhibemus utiliter, velut a,b + c, vel AB, CD + EF, id est, a duci in a + b, vel AB in CD + EF; sed de his mox, ubi de vinculis. Porro propria nota Multiplicationis non solet esse necessaria, cum plerumque appositio, qualem diximus, sufficiat. Si tamen utilis aliquando sit, adhibebitur potius $\frown$ quam $\times$, quia hoc ambiguitatem parit, et ita $AB \frown CD$ significabit AB duci in CD.

D i v i s i o significatur interdum more vulgari per subscriptionem divisoris sub ipso dividendo, intercedente linea; ita a dividi per b significatur vulgo per $\frac{a}{b}$; plerumque tamen hoc evitare praestat, efficereque ut in eadem linea permaneatur, quod fit interpositis duobus punctis, ita ut a:c significet a dividi per b. Quodsi a:b rursus dividi debeat per c, poterimus scribere a:b,:c vel (a:b):c. Etsi enim res hoc casu (sane simplici) facile aliter exprimi posset, fit enim a:(bc) vel a:bc, non tamen semper divisio actu ipso facienda est, sed saepe tantum indicanda, et tunc praestat operationis dilatae processum per commata vel parentheses indicari.

Cum idem multiplicatur per se ipsum, prodeunt P o t e n t i a e earumque notae seu E x p o n e n t e s. Ita pro aa scribi etiam potest a^2, et pro aaa scribetur a^3, et ita porro. Interdum et scribitur: qu. AB, idque idem est quod quadratum rectae AB seu AB,AB; et cub. AB idem est quod AB, AB, AB vel $(AB)^3$. Et exponens interdum lineolis includitur hoc modo $\boxed{3}\,(AB+BC)$, quo significatur cubus rectae AB + BC. Exponens etiam interdum est indeterminatus, et significatur per literam, velut a^e, ubi non determinatur utrum e significet 2 an 3 vel alium numerum quemvis; et talis exponens interdum fit compositus, exempli gratia si a^e multiplices per a^n, productum erit a^{e+n}, et utiliter interdum lineola subducitur, ne literae exponentiales aliis confundantur; posset etiam scribi $\boxed{e+n}\,a$.

Contrarium potentiarum sunt Radices, nam ut $\boxed{3}\,a$ est a^3 vel aaa, ita $\sqrt[3]{(a^3)}$ vel $\sqrt{(3)}(a)^3$ rursus est a. Nota $\sqrt{\ }$ significat radicem, et si simpliciter scribimus nullo numero adjecto. significat radicem quadraticam, velut $\sqrt{2}$ significat radicem quadraticam ex numero 2, sed $\sqrt[3]{2}$ vel $\sqrt{(3)}2$ significat radicem cubicam ex eodem numero, et $\sqrt[e]{2}$ vel $\sqrt{(e)}2$ significat radicem indeterminati gradus e ex 2 extrahendam. Interim notandum est, certo sensu radices posse sub potentiis comprehendi, ut numeri fracti continentur sub numeris. Et generaliter, si sit potentia data a^e et e significet numerum ne-

gativum, prodit divisio; ponatur enim e idem esse quod —n, utique a^e vel a^{-n} vel $\boxed{-n}\,a$ idem erit quod $1:a^n$. Quodsi e sit idem quod 1:n seu a^e idem quod $a^{1:n}$, fiet a^e idem quod $\sqrt{(n)}a$, adeoque hoc idem est quod $\boxed{1:n}\,a$.

His notis formantur varii termini, nempe integri iique affirmativi aut negativi; fracti item, ac denique surdi. Sed quia hi omnes sunt vel simplices vel variis modis compositi et ex membris conflati, hinc opus est v i n c u l i s quibusdam ad compositionem indicandam. Pro vinculis vulgo solent adhiberi ductus linearum, sed quia lineis una super alia ductis saepe nimium spatii occupatur, aliasque ob causas commodius plerumque adhibentur commata et parentheses. Sic $a, \overline{b+c}$ idem est quod $a, b+c$ vel $a(b+c)$, et $\overline{a+b}, \overline{c+d}$ idem est quod $a+b, c+d$ vel $(a+b)(c+d)$, id est $+a+b$ multiplicatum per $c+d$. Et similiter vincula in vinculis exhibentur. Ita $a,\overline{bc+e\overline{f+g}}$ etiam sic exprimetur $a(bc+e(f+g))$, et $\overline{a\overline{bc+e\overline{f+g}}+hlm}\,n$ potest etiam sic exprimi $(a(bc+e(f+g))+hlm)n$. Quod de vinculis multiplicationis, idem intelligi potest de v i n c u l i s d i v i s i o n i s; exempli gratia

$$\frac{\dfrac{a}{\dfrac{b}{c}+\dfrac{e}{f+g}}+\dfrac{h}{\left(\dfrac{l}{n}\right)}}{n}$$

sic scribetur in una linea $(a:((b:c)+(e:,f+g))+h:(l:m)):n$, nihilque in his est difficultatis, modo teneamus, quicquid parenthesin aliquam implet pro una quantitate haberi, tanquam litera vel numerus pro eo poneretur; idemque est de parenthesi aliam parenthesin includente, ut fit in radicibus quam universales olim vocabant exprimendis. Idemque igitur locum habet in vinculis extractionis radicalis. Sic $\sqrt{a^4+bc\sqrt{ef+g}}$ idem est quod $\sqrt{(a^4+bc\sqrt{(e(f+g))})}$ vel $\sqrt{(a^4+bc(e,f+g))}$, et pro

$$\frac{\sqrt{aa+b\sqrt{cc+dd}}}{e+\sqrt{f\sqrt{gg+hh}+kk}}$$

scribi poterit $\sqrt{(aa+b\sqrt{(cc+dd)})}:,e+\sqrt{(f\sqrt{(gg+hh)}+kk)}$.

Hactenus notas exposuimus, quibus termini, id est numeri vel quantitates formantur, tanquam subjecta aut praedicata in veritatibus. Sequuntur notae quae explicant modum praedicationis, seu quomodo quantitates quae Terminos constituunt in propositiones conjungantur; potissimum autem de iis enuntiatur, A e q u a l e s esse, vel **majores** vel **minores** aliis; itaque $a=b$ significat a esse aequale ipsi b, et $a \sqsupset b$ significat a esse majus quam b, et $a \sqsubset b$ significat a esse minus quam b.

Sed et **Proportionalitas** vel analogia de quantitatibus enuntiatur, id est rationis identitas, quam possumus in Calculo exprimere per notam aequalitatis, ut non sit opus peculiaribus notis. Itaque a esse ad b sic ut l ad m sic exprimere poterimus $a{:}b=l{:}m$, id est $\frac{a}{b}=\frac{l}{m}$. Nota continue proportionalium erit $\div\!\!\div$, ita ut $\div\!\!\div$ a. b. c etc. sint continue proportionàles.

Interdum nota **Similitudinis** prodest, quae est $\backsim$; item nota similitudinis et aequalitatis simul seu nota congruitatis $\backsimeq$. Sic $DEF \backsim PQR$ significabit Triangula haec duo esse similia, at $DEF \backsimeq PQR$ significabit congruere inter se. Hinc si tria inter se habeant eandem rationem quam tria alia inter se, poterimus hoc exprimere nota similitudinis, ut $a;\, b;\, c \backsim l;\, m;\, n$, quod significat esse a ad b ut l ad m, et a ad c ut l ad n, et b ad c ut m ad n.

Praeter aequalitatem, proportionalitatem et similitudinem occurrit interdum et ejusdem relationis consideratio quam significare licet nota :: ; exempli causa si sit $aa+ab=cc$ et simili forma $ll+lm=nn$, dici potest a, b, c habere inter se eandem relationem quam habent l, m, n, seu $a;\, b;\, c :: l;\, m;\, n$, id est, datur quaedam relatio inter a, b, c, in qua si pro his respective substituas l, m, n, vera manet enuntiatio. Unde patet, relationis convenientiam ad certam quandam referendi formam pertinere neque omnimodam semper in ipsis terminis relationum similitudinem inferre, ex. gr. si a, b, c se habeant invicem ut sinus totus, sinus rectus et sinus complementi, et l, m, n se itidem hoc modo inter se habeant, dici ob eam rem poterit esse $a;\, b;\, c :: l;\, m;\, n$. Sed hoc relativum est ad certum modum referendi.

Quas exposuimus Notas, ad Analysin communem pertinent seu ad Scientiam Finiti; sed novae adjectae sunt Notae, per detectam nuper **Scientiam infiniti** seu **Analysin infinitesimalem** quae potissimum versatur in differentiis et summis. Hic dx significat elementum, id est incrementum vel decrementum (momentaneum) ipsius quantitatis x (continue) crescentis. Vocatur et **differentia**, nempe inter duas proximas x elementariter (seu inassignabiliter) differentes, dum una fit ex altera (momentanee) crescente vel decrescente; similiter d(xy) est tale elementum quantitatis

xy (continue) crescentis, quod explicatum dat $xdy+ydx$. Porro ddx est elementum elementi seu **differentia differentiarum**, nam ipsa quantitas dx non semper constans est, sed plerumque rursus (continue) crescit aut decrescit. Et similiter procedi potest ad dddx seu d^3x, et ita porro; imo potest occurrere d^ex, cum exponens differentiae est indeterminatus.

Contrarium ipsius Eleménti vel differentiae est **summa**, quoniam quantitate (continue) decrescente donec evanescat, quantitas ipsa semper est summa omnium differentiarum sequentium, ut adeo $d\int ydx$ idem sit quod ydx. At $\int ydx$ significat aream quae est aggregatum ex omnibus rectangulis, quorum cujuslibet longitudo (assignabilis) est y aliqua, et latitudo (elementaris) est dx ipsi y ordinatim respondens. Dantur et **summae summarum**, et ita porro, ut si sit $\int dz \int ydx$, significatur solidum quod conflatur ex omnibus areis, qualis est $\int ydx$, ordinatim ductis in respondens cuique elementum dz.

XXI.

EXPLICATION DE L'ARITHMETIQUE BINAIRE, QUI SE SERT DES SEULS CARACTÈRES 0 ET 1, AVEC DES REMARQUES SUR SON UTILITÉ, ET SUR CE QU'ELLE DONNE LE SENS DES ANCIENNES FIGURES CHINOISES DE FOHY.

Le calcul ordinaire d'Arithmétique se fait suivant la progression de dix en dix. On se sert de dix caractères, qui sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, qui signifient zero, un et les nombres suivans jusqu'à neuf inclusivement. Et puis allant à dix, on recommence, et on écrit dix par 10, et dix fois dix ou cent par 100, et dix fois cent ou mille par 1000, et dix fois mille par 10000, et ainsi de suite.

Mais au lieu de la progression de dix en dix, j'ai employé depuis plusieurs années la progression la plus simple de toutes, qui va de deux en deux, ayant trouvé qu'elle sert à la perfection de