$$\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{20}+\tfrac{1}{35}\text{ etc.} = \tfrac{1}{1}\cdot\tfrac{3}{2} = \tfrac{3}{2}$$
$$\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{20}+\tfrac{1}{35}\text{ etc.} = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{2}$$
$$\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{20}+\tfrac{1}{35}\text{ etc.} = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{3}{2}$$
$$\text{etc.}$$

$$\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{35}+\tfrac{1}{70}\text{ etc.} = \tfrac{1}{1}\cdot\tfrac{4}{3} = \tfrac{4}{3}$$
$$\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{35}+\tfrac{1}{70}\text{ etc.} = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{4}{3}$$
$$\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{35}+\tfrac{1}{70}\text{ etc.} = \tfrac{1}{10}\cdot\tfrac{4}{3}$$
$$\text{etc.}$$

Eademque opera apparet, quomodo definitus numerus terminorum columnae trianguli Harmonici (excepta semper prima) summetur. Exempli causa quaeritur summa 100 fractionum seu Reciprocorum triangularium ab $\frac{1}{1}$ usque ad $\frac{1}{4950}$. Sumatur in columna antecedente nempe reciprocorum naturalium, terminus (hoc loco $\frac{1}{1}$) respondens primo summandorum; sumatur et in eadem columna antecedente terminus proxime sequentium qui respondet ultimo sumandorum hoc loco $\frac{1}{4950}$, qui est $\frac{1}{101}$, et $\frac{1}{1}-\frac{1}{101}$ multiplicata per $\frac{2}{1}$ seu $\frac{200}{101}$ erit exacte summa omnium fractionum $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+$ etc. usque ad $\frac{1}{4950}$ inclusive. Haec in Gallia olim reperta per occasionem adjicere visum est.

Sed ad potestates Polynomiorum formandas redeamus, quae scilicet indigent Numeris combinatoriis, ut mox patebit. Constant autem semper ex formis ejusdem gradus, quibus numeri ex combinatoriis multiplicando formati praefiguntur. Formam voco hoc loco summam omnium membrorum ex aliquot literis similiter formatorum. Ita $a+b+c$ etc. est forma primi gradus; at formae secundi gradus sunt $a^2+b^2+c^2$ etc. et $ab+ac+bc$ etc., et formae tertii gradus sunt $a^3+b^3+c^3$ etc. et $a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2$ etc. et $abc+abd+bcd$ etc. Compendio autem, ut jam monui, sic designo, ut $\underset{\cdot}{a}$ mihi significet a vel $a+b$ vel $a+b+c$ vel etc., et $\underset{\cdot\cdot}{a^2}$ significet a^2 vel a^2+b^2 vel $a^2+b^2+c^2$ vel etc., et $\underset{\cdot\cdot}{ab}$ significet vel ab vel $ab+ac+bc$ vel $ab+ac+ad+bc+bd+cd$ vel etc., et $\underset{\cdot\cdot}{a^3}$ erit a^3 vel a^3+b^3 vel $a^3+b^3+c^3$ vel etc., et $\underset{\cdot\,\cdot}{a^2b}$ erit a^2b+ab^2 vel $a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2$ vel $a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+a^2d+ad^2+b^2c+bc^2+b^2d+bd^2+c^2d+cd^2$ vel etc., et $\underset{\cdot\cdot}{abc}=abc$ vel $abc+abd+bcd$ vel etc., itaque

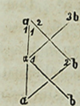
$$a+b+b \text{ etc.} = \underset{\cdot\cdot}{a}$$
$$\text{et quadratum ab } a+b+c \text{ etc.} = \underset{\cdot\cdot}{a^2}+2\underset{\cdot\cdot}{ab}$$
$$\text{cubus} = \underset{\cdot\cdot}{a^3}+3\underset{\cdot\,\cdot}{a^2b}+6\underset{\cdot\cdot}{abc}$$
$$\text{biquadratum} = \underset{\cdot\cdot}{a^4}+4\underset{\cdot\cdot}{a^3b}+6\underset{\cdot\cdot}{a^2b^2}+12\underset{\cdot\,\cdot}{a^2bc}+24\underset{\cdot\cdot}{abcd}$$

Ut jam investigemus numeros coefficientes formis praescriptos, consideremus tot modis prodire quodvis formae membrum in potestate, quot transpositiones literarum in eo membro dari possunt; ita in cubo ab $a+b$ formae a^2b+ab^2 membrum, ut a^2b, prodit ter, quia tres ejus transpositiones seu conflationes; sic in biquadrato ipsius a^2b^2 formationes sunt sex, et in cubo de $a+b+c$ ipsius abc transpositiones sunt sex

1	aab	1	aabb	1	abc
2	aba	2	abab	2	acb
3	baa	3	abba	3	bac
		4	baab	4	bca
		5	baba	5	cab
		6	bbaa	6	cba

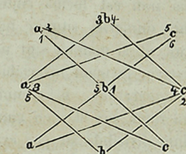
Id lineis ductis numeros eosdem ascriptos habentibus sic apparebit:

pro aab



pro aabb

pro abc



Quot vero sint transpositiones literarum Formae, nondum quod sciam determinatum extat, cum tamen inter primaria sit problemata Combinatoriae Artis. Id aliquando cum potestatibus polynomiorum aliisque hujusmodi in navi per otium sum consecutus. Multo post Cl. Joh. Bernoullius me admonente hanc eandem quam nunc dabo regulam, etsi paulo aliter expressam invenit. Igitur in exemplum, quod sit regulae intelligendae sufficiens, esto forma $a^5b^4c^3d^3e^2f^1g^1$, quaeritur quot modis ejus elementa transponi possint. Est autem gradus $5+4+3+3+2+1+1$ seu decimi noni. Dico numerum transpositionum esse proditurum, si multiplicentur invicem continue numeri Combinatorii (supra expositi) qui designant quot sint 19 rerum 4niones, 19—4 rerum 3niones, 19—4—3 rerum 3niones, 19—4—3—3 rerum 2niones, 19—4—3—3—2 rerum 1niones, 19—4—3—3—2—1 rerum 1niones. Quod etiam per productos continuorum sic poterit enuntiari, ut Numerus Transpositionum formae $a^5b^4c^3d^3e^2f^1g^1$ sit

12*

$$\frac{19,19-1,19-2,19-3}{1.2.3.4},,\frac{19-4,19-4-1,19-4-2}{1.2.3},,$$

$$\frac{19-4-3,19-4-3-1,19-4-3-2}{1.2.3},,\frac{19-4-3-3,19-4-3-3-1}{1.2},$$

$$\frac{19-4-3-3-2}{1}\,,\,\frac{19-4-3-3-2-1}{1}.$$ Ita a^2b^2 habebit transpositiones $\frac{4,4-1}{1.2},,\frac{4-2,4-2-1}{1.2}=\frac{4.3,2.1}{1.2,1.2}=6.$

Porro omnis Numerus Transpositionum Formae, quem et Productum combinatoriorum appellare possis, cum alias habet proprietates memorabiles, tum hanc imprimis egregiam, ut ipse et exponens gradus, ad quem forma assurgit, non possint esse primi inter se. Unde sequitur, si exponens gradus sit numerus primitivus, necesse esse ut dividat numerum transpositionum formae in gradu, ubi tamen intelligo transpositionem quae varietatem pariat, qualis non est forma cujus elementa coincidunt ut a^2, a^3. Unde in his numerus situum non est nisi unitas. Hinc porro consequitur, ut si nomina sint numeri rationales, potestas polynomii post detractam formam invariabilem ejusdem gradus residuum relinquat, ita comparatum, ut ipsum et exponens gradus non possint esse primi inter se: et ideo cum exponens est primitivus, necessario residuum divisibile sit per exponentem. Nempe si e, item a, b, c etc., sint numeri integri et $x=a+b+c+$ etc., tunc x^e-a^e et e nunquam sunt primi inter se, et ideo si e sit primitivus, erit x^e-a^e divisibilis per e. Supra autem exposui, per a^e me intelligere $a^e+b^e+c^e+$ etc. seu summam ex potestatibus omnium partium ipsi x assignatarum.

Quodsi a, b, c, sint unitates erit $a^e=a=1$ et $a^e=a=x$, ergo x^e-x et e nunquam sint primi inter se, et proinde si numerus e sit primitivus, erit x^e-x divisibilis per e. Quae *Numeri Primitivi proprietas Reciproca* esse reperitur, ut si e non sit primitivus, etiam x^e-x per e dividi non possit, sed tantum habeant aliam communem mensuram.

Hinc tandem duci potest aliquid hactenus Analyticis incognitum, aequatio nempe generalis pro Numero primitivo, nempe quoties et solum quoties haec aequatio datur in integris $n^y-n=fy$ vel (si n non sit divisibilis per y) $n^{y-1}-1=gy$, tunc numerus y est primitivus. Et pro n substitui potest numerus integer quicunque atque adeo totidem proprietates reciprocae numeri primitivi habentur. Cumque ex numeris simplicissimus omnium (post uni-

tatem cujus potestates non sunt hujus loci) sit 2, ideo simplicissima pro primitivo aequatio erit $2^y-2=fy$ vel $2^{y-1}-1=gy$. Hinc cum aequatio ista sit transcendens, nullius scilicet certi gradus quando quidem ipsa quantitas y quae exponentem ingreditur, indeterminata est; hinc mirum non est, neminem prius dedisse aequationem generalem exprimentem naturam numeri primitivi: nam nos ipsi primum hoc aequationum transcendentium genus in Analysin introduximus, mentione ejus facta cum nostram Magnitudinis Circuli expressionem per simplicissimam seriem in Actis Eruditorum Lipsiensibus ederemus, cujus deinde magnum in Geometria interiore usum ostendimus ad aequationes complurium Linearum ex Geometria non bene exclusarum Locales exhibendas et tangentes earum aliasque proprietates *Calculo* quem *exponentialem* appellavi, non minus commode inveniendas, quam si Algebraicae, id est certi gradus essent.

Obiter etiam notare operae pretium est, si n sit 10 et y primitivus nec sit 2 nec 5, adeoque non dividat 10, tunc cum locum habeat aequatio supradicta $10^{y-1}-1=gy$, consequens esse, ut 99999 etc. tam diu continuando, donec numerus ipsorum 9 sit $y-1$, quoties et solum quoties y est primitivus, succedat divisio. Hoc interim non prohibet minorem numerum 999 etc. per y dividi posse, ut si y sit 13, potest numerus 999999 dividi per 13; unde consequens est, etiam constantem ex 9 duodecies repetito posse dividi per 13, ut debet. Multa etiam ex his circa numeros perfectos et partes aliquotas colliguntur, quae persequi non est hujus loci.

Hactenus data est potestas polynomii simplicis, ut $a+b$ vel $a+b+c$ vel $a+b+c+d$, et ita porro. Progrediamur jam ad polynomium affectum potentiis alicujus quantitatis, ut $a+bx$ vel $a+bx+cx^2$ vel $a+bx+cx^2+dx^3$ etc. id est ad Formulam rationaliter integre formatam ex x, nempe ad hanc quantitatem primariam, assumtis secundariis coefficientibus a, b etc. Unde si sit $y=a+bx+cx^2$ etc., soleo dicere y dari ex x relatione rationali integra, ubi tamen saepe non refert utrum ipsae quantitates secundariae (quae, cum x variatur, constantes intelliguntur) numeris integris, an fractis vel etiam surdis sint aliquando exprimendae. Manifestum autem, potestatem affecti polynomii a potestate simplicis non differre, nisi quod quantitas secundaria semper ducta intelligitur in potentiam ipsius x, quam afficit. Verbi gratia cum quadratum ipsius $a+b+c$

fuerit $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, manifestum est ipsius $a+bx+cx^2$ quadratum fore $a^2+b^2x^2+c^2x^4+2abx+2acx^2+2bcx^3$, eadem ergo membra et praefixos membris numeros manere, tantum si secundum x ordinanda sit producta potestas, divelli a se invicem quae antea in eadem forma cohaerebant, cum x abesse vel unitati aequalis intelligeretur. Ita ex quadrato ordinato secundum x fiet

$$\begin{aligned}&a^2+2abx+2acx^2\\ &\qquad\qquad b^2x^2+2bcx^3+c^2x^4.\end{aligned}$$

Sed quo promtius appareat ordinatio, redibimus ad numeros pro literis, faciemusque

$$y = 10+11x+12x^2+13x^3+14x^4+15x^5+16x^6,$$

fiet $y^2 =$	10^2	$+2.10.11x$	$+2.10.12x^2$	$+2.10.13x^3$	$+2.10.14x^4$	$+2.10.15x^5$	$+2.10.16x^6$
			$+1.11.11$	$2.11.12$	$2.11.13$	$2.11.14$	$2.11.15$
					1.12^2	$2.12.13$	$2.12.14$
							1.13^2
$y^3 =$	10^3	$+3.10^2.11x$	$+3.10^2.12x^2$	$+3.10^2.13x^3$	$+3.10^2.14x^4$	$+3.10^2.15x^5$	$+3.10^2.16x^6$
			$3.10.11^2$	$6.10.11.12$	$6.10.11.13$	$6.10.11.14$	$6.10.11.15$
						$6.10.12.13$	
				1.11^3	$3.11^2.12$	$3.11^2.13$	$6.10.12.14$
						$3.11.12^2$	$3.10.13^2$
							$3.11^2.14$
							$6.11.12.13$
							1.12^3

ubi apparet progressus ad potestates altiores aperta lege combinationis, quae haec est, ut in valore ipsius y (polynomii affecti seu formulae) membrum quodlibet coefficiens habeat gradum formalem aequalem gradui potestatis ab y et gradum virtualem aequalem gradui potestatis ab x ad quam refertur, numeri autem veri praefixi sint numeri transpositionum quem recipiunt elementa membri. Exempli causa in y^3 membra sunt 10^3, $10^2.11$, $10^2.12$, 10.11^2 etc., quae omnia habent gradum formalem 3tium, quia constant ex quantitatibus tribus 10.10.10, vel 10.10.11 etc., Sed quia gradus virtualis fit ex summa notarum ultimarum quas habent Numeri assumtitii, hinc in $10.10.10x^0$ gradus virtualis est $0+0+0=0$, in $10.10.11x^1$ est $0+0+1=1$, in

$10.10.12x^2$ est $0+0+2=2$, in $10.11.11x^2$ est $0+1+1=2$, in $10.10.13x^3$ est $0+0+3=3$, in $10.11.12x^3$ est $0+1+2=3$, et ita porro. Numeri autem praefixi sunt paulo ante explicati, nempe ipse $10^2.11$ vel 10.11^2 praefigitur 3, ut supra formae a^2b, et ipsi 10.11.12 vel 10.12.13 vel 11.12.13 praefigitur 6, ut supra formae abc.

Sed ecce Theorema Generale pro potestate quacunque, nempe posito

$$y=10+11x+12x^2+13x^3+14x^4+15x^5 \text{ etc.}$$
$$\text{et } y^e=20+21x+22x^2+23x^3+24x^4+25x^5 \text{ etc.}$$

erit $20=10^e$ et $21=e.10^{e-1}.11$ et $22=e.10^{e-2}.12+\frac{e,e-1}{1.2}10^{e-2}.11^2$

et $23=e.10^{e-1}.13+e,e-1,10^{e-2}.11.12+\frac{e,e-1,e-2}{1.2.3}10^{e-3}.11^3$

et $24=e.10^{e-1}.14+e,e-1,10^{e-2}.11.13+\frac{e,e-1}{1.2}10^{e-2}.12^2$

$$+\frac{e,e-1}{1.2},e-2,10^{e-3}.11^2.12+\frac{e,e-1,e-2,e-3}{1.2.3.4}10^{e-4}.11^4$$

et ita porro, ubi membrorum quidem combinatoria formatio ea est quam paulo ante exposuimus ita ut membri gradus quidem formalis semper sit e, gradus vero virtualis ipsius in valore ipsorum 20, 21, 22 etc. sit respective 0, 1, 2 etc. Sic $10^{e-3}11^2.12^1$ habet gradum formalem $e-3+2+1=e$, gradum virtualem $0(e-3)+1.2+2.1=4$, nam reperitur in valore ipsius 24. Numeri autem praefixi sunt numeri transpositionum, quas membri elementa recipiunt, seu producti combinatoriorum, sed generaliter expressi. Ex. gr. $10^{e-3}11^2.12^1$ habet gradum formalem e, itaque praefigendus fit, si invicem ducantur e rerum 2niones $\left(\frac{e,e-1}{1.2}\right)$ et $e-2$ rerum 1niones $\left(\frac{e-2}{1}\right)$ secundum regulam supra explicatam.

Quodsi in valore ipsius y, nempe $10+11x+12x^2+13x^3$ etc. esset $10=0$, nihilominus quidem formula haec generalis nostra pro valore ipsius y^e locum haberet: etsi enim 10 fiat 0, non tamen omnes quantitates per potestates ipsius multiplicatae evanescent, quanquam ita prima fronte videatur, nam supersunt ii, in quibus exponens ipsius 10 fit 0, quoniam 0^0 non est 0, sed 1. Quoniam tamen maxima saltem pars evanescit, praestat nullam mentionem fieri ipsius 10; itaque ex valore praescripto generali ipsius y^e fiet alius pro 10, 11, 12, 13 etc. substituendo respective 11, 12, 13, 14 etc. et deinde totum multiplicando per x^e, fietque valor ipsius y^e is qui esse debet si sit $y=11x+12x^2+13x^3+14x^4$ etc. Quodsi absint simul 10 et 11 (vel 10 et 11 et 12, et ita porro), eo casu in valore ipsius y^e praescripto pro $10+11x+12x^2+13x^3$ etc. loco 10, 11, 12, 13 etc. substituantur respective 12, 13, 14, 15 etc. (vel 13, 14, 15, 16 etc.) et totum multiplicetur per x^{2e} (vel x^{3e}), habebiturque valor ipsius y^e posito y esse $12x^2+13x^3+14x^4$ etc. (vel y esse $13x^3+14x^4+15x^5$ etc. aut ita porro).

Tradita jam ratione excitandi potestates ex formula, superest ut contra ex formula radices extrahamus. Sunt autem radices duplices, purae aut affectae. Purae dicuntur, cum valor potestatis datur absolute et pure, unde ex valore radicis, extrahendo radicem puram habetur latus potestatis seu quantitas. Veluti si valor ipsius yy detur per meras cognitas seu per formulam $10+11x+12x^2$ etc., habebitur y extrahendo ex formula radicem quadraticam. Sed si plures ipsius y potestates simul concurrant in aequatione ut si sit $y^2+gy=ah$, posito a, g, h significare formulas per x, tunc valorem ipsius y invenire est extrahere radicem affectam, seu extrahere radicem non ex quantitate aliqua cognita (quanquam res interdum eo reducatur) sed ex aequatione. Incipiemus a radicibus puris tanquam facilioribus.

Hic vero illud praeclare evenit, ut methodus extrahendi radicem ex formula, in methodo generali excitandi potestatem formulae jam contineatur. Nam si quidem e sit numerus integer, erit y^e id quod vulgo vocant potestatem, nempe unitas, latus, quadratum, cubus, biquadratum etc. prout e est 0 vel 1 vel 2 vel 3 vel 4 etc. Sed si e sit fractus, y^e est radix ex x, veluti si sit $e=\frac{1}{m}$, erit $y^e=\sqrt[m]{y}$. Itaque in theoremate nostro potestatum continentur etiam radices, cum e est fractus, cujus numerator est 1, denominator vero numerus integer. Quin et si numerus e sit, ut ita dicam, semifractus, id est cujus tam numerator quam denominator sit integer major unitate, quo casu y^e idem valet quod $y^{n:m}$, quae est potentia radicum seu $\boxed{n}\sqrt[m]{y}$ vel radix potentiarum $\sqrt[m]{y^n}$, nihilominus locum habebit theorema. In exemplo simplicissimo ponamus $e=\frac{1}{2}$ seu $y^e=\sqrt[2]{y}$; si jam sit $y=10+11x+12x^2+13x^3$ etc. et $\sqrt[2]{y}=20+21x+22x^2+23x^3$ etc. ponaturque facilitatis causa, quod semper effici potest, ut 10 sit 1, fiet $20=10$ et $21=\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{\sqrt{10}}$

et $22=\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{\sqrt{10}}-\frac{1}{4,1.2}\,\frac{11^2}{10\sqrt{10}}$ et $23=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{\sqrt{10}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{11.12}{10\sqrt{10}}+\frac{1.3}{8,1.2.3}\cdot\frac{11^3}{10^2\sqrt{10}}$. Et ita porro 24, 25 etc. habebuntur.

Possunt vel ex hoc solo Theoremate extractionis Radicis Quadraticae per seriem infinitam nullo negotio inveniri dimensiones arearum Circuli, Ellipseos, Hyperbolae, et arcuum quoque, per seriem scilicet infinitam. Sit exempli causa Circuli radius 1, sinus x, sinus complementi y, erit $y=\sqrt{(1-xx)}$. Fit $10=1$ et $11=0$ et $12=-1$ et 13 vel 14 vel 15 etc. $=0$. Sit $y=20+21x+22x^2+23x^3$ etc., fiet $20=1$ et $21=0$ et $22=-\frac{1}{2}$ et $23=0$ et $24=-\frac{1}{4,1.2}$ et $25=0$ et $26=\frac{1.3}{8,1.2.3}$ et $27=0$ et $28=-\frac{1.3.5}{16,1.2.3.4}$. Atque adeo tandem erit

$$y=\sqrt{(1-xx)}=1-\frac{1}{2,1}x^2-\frac{1}{4,1.2}x^4-\frac{1.3}{8,1.2.3}x^6-\frac{1.3.5}{16,1.2.3.4}x^8$$
$$-\frac{1.3.5.7}{32,1.2.3.4.5}x^{10}-\frac{1.3.5.7.9}{64,1.2.3.4.5.6}x^{12}\text{ etc.}$$

$$\text{et }\int ydx=x-\frac{1}{2,1,3}x^3-\frac{1}{4,1.2,5}x^5-\frac{1.3}{8,1.2.3,7}x^7-\frac{1.3.5}{16,1.2.3.4,9}x^9$$
$$-\frac{1.3.5.7}{32,1.2.3.4.5,11}x^{10}\text{ etc.}$$

quae est area zonae circularis, quam ductus radio parallelus sinus complementi abscindit, quaeque adeo praeter radium et sinum complementi etiam sinu recto et arcu continetur. Sed arcus ipse erit

$$x+\frac{1}{2,1,3}x^3+\frac{1.3}{4,1.2,5}x^5+\frac{1.3.5}{8,1.2.3,7}x^7+\frac{1.3.5.7}{16,1.2.3.4,9}x^9\text{ etc.}$$

Operae pretium etiam est, Canonem generalem Polynomii affecti contrahere ad Canonem generalem Polynomii simplicis, ponendo $x=1$, perinde ac si fuisset $y=10+11+12+13$ etc. Sed ita pro membro simplice Canonis polynomii affecti ponenda est forma integra in Canone Polynomii simplicis, quoniam enim x abest, non amplius divelli necesse est a se invicem membra ejusdem formae. Exempli causa in Canone Polynomii affecti non possunt in unum conjungi $10^{e-1}12$ et $10^{e-1}13$ et $11^{e-1}12$, quoniam cum x primum dat $10^{e-1}12x^2$, secundum $10^{e-1}13x^3$, tertium $11^{e-1}12x^e$, quod postremum in Canone polynomii affecti non occurrit nisi latenter: nisi malius adjicere illi jam tum eas formulas, quas in casu 10, vel 10 et 11, vel 10 et 11 et 12 simul evanescentium substituendas tantum praescripsimus, quod utique sano sensu permissum est. Sed in Canone polynomii simplicis statim possunt conjungi membra omnia, ut adeo quodammodo in speciem magis sit compositus Canone affecti. Sed operae pretium erit utriusque Canonis initia comparare inter se, aspectui subjiciendo.

Sit $y=10+11x+12x^2+13x^3+14x^4+15x^5$ etc.

$$y^e=10^e+e.10^{e-1}.11x \quad +e.10^{e-1}.12x^2 \quad +e.10^{e-1}.13x^3 \quad +e.10^{e-1}14x^4 \text{ etc.}$$

$$\frac{e,e-1}{1.2}10^{e-1}11^2\ldots \quad e,e-1,10^{e-1}.11.12.. \quad e.e-1,10^{e-2}11.13..$$

$$\frac{e,e-1,e-2}{1.2.3}10^{e-3}11^3.. \quad \frac{e,e-1}{1.2}10^{e-2}.12^e..$$

$$\frac{e,e-1}{1.2}.e-1,10^{e-3}11^2.12..$$

$$\frac{e,e-1,e-2,e-3}{1.2.3.4}10^{e-4}.11^4..$$

Sit $y = 10+11+12+13+14+15$ etc., poterimus tantum in proximo valore ipsius y^e omittere x cum suis potentiis tanquam posito x vel x^2 vel x^3 etc. esse 1 et cuivis membra subscribere.. vel etc., exempli causa pro $e.10^{e-1}.11x$ scribendo $e.10^{e-1}.11$, vel $e.10^{e-1}.11$, omittendo in se- etc. quentibus quae jam in forma semel posita continentur; itaque valor polynomii ita stabit

$$y^e = 10^e+\underset{\text{etc.}}{e.10^{e-1}.11}+\frac{e,e-1}{1.2}\underset{\text{etc.}}{10^{e-2}.11^2}+\underset{\text{etc.}}{e,e-1,10^{e-2}.11.12}$$

$$+\frac{e,e-1,e-2}{1.2.3}\underset{\text{etc.}}{10^{e-3}.11^3}+\frac{e,e-1}{1.2}.e-1,10^{e-3}.11^2.12+e,e-1,e-2,10^{e-3}.11.12.13$$

et ita porro; vel quia non amplius indigemus numeris fictitiis ad polynomium simplex, quando cessantibas potentiis ipsius x, cessant potentiae virtuales ad eas relatae, ideo faciendo

$y=1+m+n+p+$ etc., fiet

$$y^e=1^e + e1^{e-1}m$$

$$\frac{e,e-1}{1.2}1^{e-2}m^2 + e\,,\,e-1\;1^{e-2}mn$$

$$\frac{e,e-1,e-2}{1.2.3}1^{e-3}m^3 \quad \frac{e,e-1}{1.2}\,,\,e-2\,1^{e-3}m^2n+e,e-1,e-2\,1^{e-3}mnp$$

$$\frac{e,e-1,e-2,e-3}{1.2.3.4}1^{e-4}m^4 \quad \frac{e,e-1,e-2}{1.2.3}\,,\,e-3\,1^{e-4}m^3n \quad \frac{e,e-1}{1.2}.e-2,e-2-1\,1^{e-4}m^2np + e,e-1,e-2,e-3\,1^{e-4}mnpq$$

$$\frac{e,e-1}{1.2}\,,\,\frac{e-2,e-3}{1.2}1^{e-4}m^2n^2$$

Unde si quaeratur speciatim potestas binomii seu si sit $y=1+m$, canon pro potestate quacunque erit

$$y^e = 1^e+\frac{e}{1}1^{e-1}.m+\frac{e,e-1}{1.2}1^{e-2}m^2+\frac{e,e-1,e-2}{1.2.3}1^{e-3}m^3+\frac{e,e-1,e-2,e-3}{1.2.3.4}1^{e-4}m^4+\text{ etc.}$$

quod sufficiebat ad valorem quantitatis $\sqrt{(1-xx)}$ ejusque summatricis seu areae circularis (posito $e=\frac{1}{2}$) vel etiam arcus circuli (posito $e=-\frac{1}{2}$) per seriem infinitam, ita ut supra, exhibendum.

Dignissimum etiam consideratu est, quomodo series (quae generaliter sumta infinita vel potius indefinita est) finiat se ipsam, quando communi modo succedit extractio. Ut si sit $y=a^2+2abx+b^2x^2$, fiet $10=a^2$ et $11=2ab$ et $12=b^2$, et radix quadratica de $a^2+2abx+b^2x^2$ seu $y^{1:2}$ vel $\sqrt[2]{y}$ dabit $\pm a\pm bx$ et termini altiores x^3, x^4 etc. evanescent. Nam quia $e=\frac{1}{2}$, ideo coefficiens ipsius x erit $+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{aa}}.bb-\frac{1}{4}.\frac{1}{1.2}\frac{1}{aa\sqrt{aa}}4aabb=0$ et coefficiens ipsius x^3 erit $-\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{aa}}.2ab.bb+\frac{1}{8}.\frac{1.3}{1.2.3}\frac{1}{a^4\sqrt{aa}}8a^3b^3=0$, similisque destructio in altioribus deprehendetur. Ita simul et quantitatem ordinariam habebimus si datur, et extraordinariam (per seriem infinitam) si ordinaria non datur.

Atque ita absoluta est excitatio potestatum pariter ac purarum radicum extractio. Nunc pergendum est ad illud quod in Algebra olim difficillimum habitum est, extractionem radicum ex aequationibus, quas et vocare solemus Radices affectas. Constat Vietam excogitasse modum radices extrahendi ex aequationibus numerice datis saltem per appropinquationem, sed perplexis admodum praeceptis. At per series nostras infinitas semper valor radicis habetur, etiamsi aequatio sit literalis. Aequatio generalis data cujus incognita est z sit: $0 = 10y - 11z + 12z^2 + 13z^3 + 14z^4 + 15z^5$ etc., quaeritur valor ipsius $z = 21y + 22y^2 + 23y^3 + 24y^4$ etc. Ne diutius teneam, reperietur esse $21 = 10 : 11$ et $22 = 12.21^2 : 11$ et $23 = 2.12.21.22 + 13.21^3, : 11$ et $24 = 12.22^2 + 2.12.21.23 + 3.13.21^2.22 + 14.21^4, : 11$ et ita porro hac lege combinationis, ut in quovis valore quaesitarum 21, 22, 23 etc. denominator sit 11, numerator vero sit summa omnium membrorum possibilium quae formantur ex una quantitate ab initio data (quales sunt 01, 10, 11, 12 etc.) et reliquis jam inventis (21, 22, 23 etc.) ita ut gradus virtualis facti ex combinatione jam inventarum membrum ingredientium sit idem qui gradus virtualis quantitatis cujus valorem ingreditur membrum, et gradus formalis ejusdem combinationis (nempe jam inventarum) sit idem qui gradus virtualis quantitatis ab initio datae in membro. Numeri autem veri praefigendi cuivis membro erunt numeri transpositionum, quas recipiunt quantitates jam inventae in dicta combinatione. Exempli causa in valore ipsius 24 membrum ut $13.21^2.22$ habet unam ab initio datam quantitatem 13, et reliquarum jam inventarum combinatio est 21.21.22, cujus gradus virtualis est $1+1+2=4$ (summa notarum posteriorum) idem qui quantitatis quaesitae 24; sed ejusdem combinationis gradus formalis est 3 (sunt enim tres quantitates invicem ductae) idem cum gradu virtuali ipsius 13.

Hujus Theorematis maximus usus est non tantum ad extractiones radicum ex aequationibus finitis, sed etiam ex infinitis, cum valor quantitatis ut y datur per aliam x ope formulae rationalis integrae infinitae seu per infinitam seriem, quaeriturque vicissim valor ipsius x ex ipsa y. Exempli causa Numeri dati $1+x$ logarithmus (qui sit y) potest intelligi $\frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$ etc. ut Nicolaus Mercator primus in Logarithmotechnia sua demonstravit, quaeritur vicissim dato logarithmo y quis sit numerus $1+x$. In canone nostro

$$\begin{array}{lcccccc} z & 01 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \text{ etc.} \\ \text{erunt } x & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} \text{ etc.} \end{array}$$

Si ergo $x = 21y + 22y^2 + 23y^3 + 24y^4 +$ etc., fiet $21 = 1$, $22 = \frac{1}{1.2}$, $23 = \frac{1}{1.2.3}$, $24 = \frac{1}{1.2.3.4}$, et ita porro. Ac proinde dato logarithmo y, numerus $1+x$ erit $1 + \frac{1}{1}y + \frac{1}{1.2}y^2 + \frac{1}{1.2.3}y^3 + \frac{1}{1.2.3.4}y^4$ etc., quod alia quidem via non una olim facilius deprehendi, quanquam jam ante me a Newtono et Jacobo Gregorio aliisque observatum, sed tamen hinc quoque ut patet derivatur. Et hanc viam insistendo, unde tam elegans eventus minus expectetur, eo ipso pulchra theoremata sese offerunt, dum scilicet multitudo illa quantitatum, etsi finitarum, valde tamen in progressu crescentium, semper summam tam simplicem praebet. Alia via cujus ope ex Numero Logarithmus, ex sinu vel sinu complementi aut tangente aliave functione arcus circuli, et vicissim ex Logarithmo Numerus, ex arcu sinus aut sinus complementi aut tangens aliave functio per seriem infinitam a me inventa est, ducta ex aequationibus differentialibus, jam a me exposita est olim in Actis Eruditorum Lipsiensibus; cujus usus etiam ad alia est maximus, cum per eam constructio habeatur aliqua lineae transcendente non tantum per rectarum tangentium aut circulorum osculantium, sed etiam differentialium altiorum proprietates datae.

XVI.

DE CONDENDIS TABULIS ALGEBRAICIS, ET DE LEGE DIVISIONUM.*)

Tabulas Algebraicas condendas saepe cogitavi, quemadmodum Arithmeticas habemus; sed Algebraicae debent esse generales, quarum duplex erit usus, unus ut quousque porrigitur Tabula non amplius calculo prolixo sit opus in exemplis specialibus, sed sim-

*) Leibniz hat bemerkt: 5. Januar. 1694.

plici substitutione; alter ut detegatur lex progrediendi. Porro Ad-
ditionum et Subtractionum Tabulas condere non admodum refert,
nam ubi addenda concordant inter se, res redit ad additiones uni-
tatum prodeuntque Numeri ex Arithmetica communi. Ubi vero
addenda non concordant, nihil aliud fieri potest, quam ut juxta se
invicem scribantur, velut $a+b$. Idemque est dicendum de subtractione.
Sed in multiplicatione, etsi nihil commune habeant termini dati,
tamen novi prodeunt termini quaesiti, nempe datorum producti
dimensionum altiorum; ut si $a+b$ ducas in $l+m$, prodit $al+am$
$+bl+bm$. Nihil aliud ergo erit multiplicationum generalissimarum
tabula, quam repraesentatio combinationum cujuslibet termini unius
aggregati vel formulae cum quolibet termino alterius formulae; ita-
que si aggregata fiant ex solis quantitatibus simplicibus sibi ad-
ditis (quod est simplicissimum et generalissimum, quia talis quan-
titas simplex vel litera pro quacunque alia utcunque composita
supponere potest), erit multiplicatio duorum aggregatorum ex sim-
plicibus inter se invicem, aggregatum binionum ex omnibus literis
datis, demtis binionibus literarum ejusdem aggregati; et multipli-
catio trium aggregatorum ex simplicibus inter se invicem erit ag-
gregatum ternionum ex omnibus literis datis, demtis ternionibus
continentibus duas ejusdem aggregati literas. Et generaliter Mul-
tiplicatio in se invicem quotcunque aggregatorum seu formularum
simplicibus seu literis sumtis velut inter se diversis, erit aggrega-
tum combinationum exponentis ejusdem cum numero formularum
seu Multiplicantium, demtis combinationibus continentibus plures
literas ejusdem formulae. Ceterum si coincidant quaedam literae,
ut cum diversae formulae invicem coincidunt inter se ex toto vel
parte, excitanturque potentiae, vel aliae formulae regulares vel
quantitates figurae; tunc ex hac regula diversorum generali ducitur
regula consentientium. Semper enim in Characteristicis casus iden-
titatis in generali regula diversitatis continetur. Sic nihil prohi-
bet, ut exemplo utar, pro $2a$ seu pro $a+a$ intelligi $a+b$, ubi b
supponit pro a. Jam $a+b$ reducitur ad regulam generalem. Hinc
igitur potentias tam aequales, ut quadratos, cubos etc., quam et
pronicas, velut Triangula, Pyramides, aliasque id genus formulas
licebit excitare, et legem earum derivare ex regula generali. Li-
cebit et nostram exponere Tabulam Formularum,*) et varia inde

*) Ueber ormularum hat Leibniz geschrieben: Formarum.

resultantia Theoremata perelegantia, quorum ex potissimis est re-
gula mea generalis pro Excitatione Potestatum ex Polynomiis, et
regulae prodeuntes, si adhibeas a, aa, a^3, a^4 etc. item ab, abc, $abcd$ etc.
vel literas pro ipsis assumtas. Sed specialiter utiles sunt Tabulae,
ubi eadem servatur litera ut x ejusque potentiae in terminis om-
nibus occurrunt, ceterae vero sunt hujus coefficientes. Aptissima
enim et compendiosissima ratio numeros exprimendi fit per Ter-
minos ejusdem radicis in progressione Geometrica sumtos eorum-
que coefficientes. Hic ergo speciatim multiplicationes, ut et alias
operationes peragere convenit; et operationes communis Arithme-
ticae sunt tantum casus speciales unius methodi generalis. Et quidem
plures formulas ad eandem literam ordinatas simplicium coefficien-
tium invicem multiplicando Tabulam perutilem dabit. De divisione
aliisque operationibusque mox dicam.

Ceterum ut hae operationes procedant melius, Tabulaeque
sint magis ordinatae et ad progressionum Leges detegendas aptae,
consideravi Vulgarem Speciosam hoc defectu laborare, quod literas
assumit indistinctim iisque utitur, et proventus calculi considerat,
ipsarum autem literarum originarias quasdam in calculo suppositas
relationes non exprimit, sed tantum subintelligendas relinquit.
Unde fit, ut quia characteres datorum non exprimunt omnes da-
torum inter se relationes, etiam in proventu calculi ex datis ducti
pulcherrimae in rei natura persaepe latentes harmoniae non facile
animadvertantur. Exemplum esto: Sint duae aequationes in se in-
vicem ducendae $x^3+ax^2+bx+c=0$ et $x^2+dx+e=0$, prodit

$$\begin{array}{l} x^5+ax^4+bx^3+cxx+dex+ec=0, \\ \quad +dx^4+adx^3+dbxx+ebx \\ \qquad\quad +ex^3+eaxx \end{array}$$

ubi parum ordinis atque harmoniae apparet, et si qua apparet,
nascitur ex nostro monito imperfecte observato, dum literae al-
phabeticae eo ordine collocantur in formula, quo noscuntur dispo-
sitae in Alphabeto. Sed ut perfectus sit ordo, nihilque artificii
characteristici omittatur, quod nos in consideratione producti juvare
possit, loco unius formulae ponamus $10x^3+11x^2+12x+13x=0$,
et loco alterius $20x^2+21x+22=0$, adhibendo pro literis numeros
fictitios ad quantitates coefficientes designandas. Ita enim ex solo
charactere coefficientis inspecto agnoscere possumus, quicquid de
coefficiente quaeri potest, nempe tum ad quam formulam pertineat,

tum cujusnam ipsius x potentiae sit coefficiens. Habet enim character hic seu numerus duas notas, dextram et sinistram. Sinistra indicabit formulam, dextra potentiam ad quam refertur. Sic 21 est coefficiens ipsius x seu x^1 ob notam sinistram 1, et quidem in formula secunda ob notam dextram 2. Hoc modo etiam conservatur lex Homogeneorum, in quavis formula coefficienti eam ascribendo dimensionem, quam nota ejus dextra indicat. Ita quivis terminus formulae prioris erit tertiae, quilibet posterioris secundae dimensionis. Jam productum intueamur

$$\left.\begin{array}{llll} 10.20x^5 + 11.20x^4 & + 12.20x^3 & + 13.20x^2 & \\ \quad + 10.21 & + 11.21 & + 12.21 & + 13.21x \\ & + 10.22 & + 11.22 & + 12.22 + 13.22 \end{array}\right\} = 0$$

In eo omnia sunt mire ordinata et harmonica, ita ut extemporanea scriptione exhiberi possint sine calculo et meditatione. Lineae horizontales multiplicantur per eundem numerum formulae unius, prima per 20, secunda per 21, tertia per 22. Lineae transversales (ut 10.20, 10.21, 10.22) multiplicantur per eundem formulae alterius, prima per 10, secunda per 11, tertia per 12. In ejusdem columnae quolibet membro idem est aggregatum notarum dextrarum, quod exponenti potentiae x in eadem columna supplementorum est ad exponentem potentiae supremae, scilicet hic quinarium. Quin amplius tot sunt ejusdem columnae seu termini membra, quot sunt modi id aggregatum conficiendi. Quodvis autem membrum est combinatio numeri ex una et numeri ex alia formula. Denique si numeri supponant pro quantitatibus ejus dimensionis, cujus exponens est nota ipsorum dextra, etiam in producto lex homogeneorum observatur. Ut alia taceam, quae aspectus submoveneorum observatur. Ut alia taceam, quae aspectus subministrat. Si productum ex pluribus consideremus, multo adhuc manifestior est usus. Unum illud Theorema, quo Vieta suum opus clausit, Cartesius cepit, ex ordinata illa multiplicatione statim resultans; quanti sit usus ad constitutionem aequationum indagandam, jam ab aliis est explicatum. Nempe si in se invicem ducas $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$ etc., fiet

$$\begin{array}{lllll} x^n + 1x^{n-1} & + 1.2x^{n-2} & + 1.2.3x^{n-3} & + 1.2.3.4x^{n-4} & \text{etc.} \\ \quad 2 & \quad 1.3 & \quad 1.2.4 & \quad \text{etc.} & \\ \quad 3 & \quad 1.4 & \quad 2.3.4 & & \\ \quad 4 & \quad 2.3 & \quad \text{etc.} & & \\ \quad \text{etc.} & \quad 2.4 & & & \\ & \quad 3.4 & & & \\ & \quad \text{etc.} & & & \end{array}$$

ubi secundus terminus omnes uniones, tertius omnes biniones, quartus omnes terniones absolutorum in radicibus continet, et ita porro.

Sed pergendum est ab Multiplicationibus ad Divisiones, in quibus Resultantia magis sunt implicata. Peculiares schedas calculis in eam rem implevi. Nempe dividendos 20, $20x+21$, $20x^2+21x+22$, $20x^3+21x^2+22x+23$, $20x^4+21x^3+22x^2+23x+24$, et ita porro, dividendo per divisores nempe 10, $10x+11$, $10x^2+11x+12$, $10x^3+11x^2+12x+13$, et ita porro, reperientur regulae seu harmoniae tales: Numerator in omni quotiente divisionis componitur ex residuis anterioribus ejusdem divisionis, et ita quidem ut coefficiens primi termini quotientis fiat ex quotiente primi termini primi residui, coefficiens secundi termini quotientis ex coefficiente primi termini secundi residui, et ita porro, tantum multiplicando coefficientem per potentiam ipsius 10 sublatam ad eum gradum, qui aequetur gradui potentiae cujus in quotiente debet esse efficiens. Ita si dividas $20x^5+21x^4+22x^3+23x^2+24x+25$ per $10x^2+11x+12$, erit quotiens

$$\begin{array}{rrrr} 10^3.20x^3 & + 10^3.21x^2 & + 10^3.22x & + 10^3.23 \\ & & & -10^2.11.22 \\ & -10^2.11.20 & -10^2.11.21 & -10^2.12.21 \\ & & -10^2.12.20 & +10.11^2.21 \\ & & +10.11^2.20 & +(2)10.11.12.20 \\ & & & -11^3.20 \end{array}$$

divis. per 10^4, cujus numeratoris coefficientes fiunt sic: nempe coefficiens ipsius x^3 ex 20 mult. per 10^3, et coefficiens ipsius x^2 ex $10.21-11.20$ multipl. per 10^2, et ita porro. Est autem 20 residui initium in divis. $20x+21$ per $10x^2+11x+12$, et $10.21-11.20$ est residui initium in divis. $20x^2+21x+22$ per idem $10x^2+11x+12$, et ita porro.

Stante expressione nostra, manenteque eodem divisore, Quotientes sequentes seu dividendorum altiorum quoad coefficientes scilicet ejusdem in ordine termini continent quotientes inferiorum, adeoque, manente eodem divisore, quocunque existente dividendo, idem est in omnibus quotientibus coefficiens termini primi, idem est in omnibus quotientibus coefficiens termini secundi, et ita porro. Sic in omnibus divisionibus factis per $10x^2+11x+12$ coefficiens termini primi in quotiente est $20:10$, et coefficiens termini secundi in quotiente est $10.21-11.20,:10^2$, coefficiensque termini tertii est $10^2.22-10.11.21-10.12.20+11^2.20,:10^3$, et ita porro.

Atque ita ejusdem divisoris Quotientes inferiores fiunt ex superioribus, quorum scilicet dividendi sunt altiores, eo ipso scilicet dum membra quotientis altioris continentia characteres dividendi altioris, in inferiore deficientes, in quotiente inferiore evanescunt. Hoc praevideri poterat, revera enim eodem modo dividitur, manente eodem divisore, quantumcunque descendat dividendus, nec discrimen est nisi in gradibus ipsius x, non vero in coefficientibus, ut sive $20x^3+21x^2+22x+23$ sive $20x^2+21x+22$ dividas per $10x+11$, nihil refert in quotientibus quoad coefficientes.

Similis est nexus inter Residua, anteriora et posteriora, non tamen ejusdem divisoris, nec ejusdem dividendi, sed earum divisionum, quarum Residua sunt similia, seu in quibus eadem est differentia inter Exponentes potentiae ipsius x in termino primo divisoris et dividendi. Ita si dividas $20x^4+21x^3+22x^2+23x+24$ per $10x^2+11x+12$, vel si dividas $20x^5+21x^4+22x^3+23x^2+24x+25$ per $10x^3+11x^2+12x+13$, residui terminus primus primo, secundus secundo coincidet, sed tertius terminus qui est in posteriore divisione, non habet locum sed evanescit in priore, quia ubique ingrediuntur characteres 25 vel 13, qui in priore divisione absunt. Et generaliter, cum eadem est differentia exponentum terminorum maximorum ipsius x, divisiones inferiores continentur in superioribus tanquam casus speciales quoad quotientes pariter et residuos. Idque praevideri poterat, nam

$$\frac{20x^4+21x^3+22x^2+23x+24}{10x^2+11x+12} \text{ nascitur ex } \frac{20x^5+21x^4+22x^3+23x^2+24x+25}{10x^3+11x^2+12x+13},$$

ponendo tam 25 quam 13 esse nihilo aequales.

In omni divisione Residuus est quaedam continuatio Quotientis suae divisionis. Nam si continuari posset divisio, terminus primus Residui daret novum quotientem, quod proinde fit in dividendo altiore.

Hinc eodem existente divisore, inter se consentiunt (in Numeratoribus scilicet et Coefficientibus) Terminus primus Residui in Divisione et Terminus ultimus Quotientis in Divisione proxime altiore.

Sic dividendo per $10x^2+11x+12$, terminus primus residui in divisione residui ubi dividendus est $20x^4+21x^3+22x^2+23x+24$ consentit cum termino ultimo residui in divisione, ubi dividendus

est $20x^5+21x^4+22x^3+23x^2+24x+25$, utrobique scilicet prodit $10^3.23-10^2.11.22-10^2.12.21+10.11^2.21+(2)10.11.12.20-11^3.20$. Atque hic consensus est omnimodus, non ut paulo ante, quasi unum in altero per modum casus generalis in regula speciali contineretur.

Residuus nascitur ex Quotiente suae divisionis. Idque fit hoc modo: Ultimus terminus quotientis multiplicetur per totum divisorem, penultimus seu secundus a fine per divisorem summo seu primo termino minutum, antepenultimus seu tertius a fine per divisorem duobus summis seu primo et secundo minutum, et ita porro. Generaliter: Terminus quivis quotientis multiplicatur respective per divisorem tot terminis ab initio minutum, quot ipse terminus quotientis abest ab ultimo; aggregatum horum productorum subtrahitur a totidem novissimis terminis dividendi, quot sunt ipsa producta; atque ita prodit Residuus.

Tota dividendi ratio reducitur ad sublationem incognitarum simplicium, tanquam casus specialis ad generalem. Exhibeamus rem in exemplo.

Sit Divisor $10x^2+11x+12$,
Dividendus $20x^4+21x^3+22x^2+23x+24$,
erit Operatio contracta $30x^4+31x^3+32x^2+33x+34$,
Quotiens purus $30x^2+31x+32,:10$,
Fractio adhaerens cujus
numerator est Residuus $33x+34$,
Nominatur est Divisor $10x^2+11x+12$

Lex Operationis

$10.20=10.30$
$10.21=10.31+11.30$
$10.22=10.32+11.31+12.30$
etc etc. etc.

Unde tollendo ordine incognitas 30, 31 etc. habetur cujusque ex his incognitis valor, et ex his Quotiens pariter ac Residuus.

Superest ut demonstremus valorem Quotientis ac Residui, itemque aequationes in Lege Operationis contentas. Itaque tota exempli Operatio explicita exhibeatur, ordinatione tali quae commodissima visa est:

Ordinatio Divisionis Characteristicae.

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0		
Operatio contracta	30	+31 .	+32 . .	+33 . . .	+34		
Dividendus	20	+21 .	+22 . .	+23 . . .	+24 . . .	.	$+20\frac{x^2}{10}$
Operatio		$\frac{-11.20}{10}$	−12.20.	. . . . .	. . . . . .	.	.
			−10.11.21	−10.12.23 .	. . . . .	.	+10.21 $\frac{x^1}{10^2}$
			+11.11.20	+11.12.20 .	. . . . .	.	−11.20
			10^2	−10.10.11.22	−10.10.12.22	.	+10.10.22 $\frac{x^0}{10^3}$
				+10.11.12.20	+10.12.12.20	.	−10.12.20
				+10.11.11.21	+10.11.12.21	.	−10.11.21
				−11.11.11.20	−11.11.12.20	.	+11.11.20
				10^3 Resi-	duus		Quotiens purus

Divisor $+10x^2$ $+11x$ $+12$

Hic $30=20$, $31=+21+\frac{-11.20}{10}$, $32=22+\frac{-12.20}{10}+\frac{-10.11.21+11.11.20}{10^2}$

$$33=23+\cdot+\frac{-10.12.21+11.12.20}{10^2}+\frac{-10.10.11.22+10.11.12.20+10.11.11.21-11.11.11.20}{10^3}$$

$$34=24+\cdot+\cdot+\frac{-10.10.12.22+10.12.12.20+10.11.12.21-11.11.12.20}{10^3}$$

Stellulae replendae forent (quae loca vacua designant) si divisor esset altior, et in eo esset etiam 13, si scilicet esset $10x^3+11x^2+12x+13$.

Jam valores ipsarum 30, 31, 32, 33, 34 consideremus:

$30=20$, $31=21-\frac{11.20}{10}$ seu $31=21-\frac{11.30}{10}$ seu $10.21=10.31+11.30$

$32=22-\frac{12.30}{10}-\frac{11.31}{10}$ seu $10.22=10.32+11.31+12.30$

$33=23-\cdot-\frac{12.31}{10}-\frac{11.32}{10}$ seu $10.23=10.33+11.32+12.31$.

Evanescit hic 13.30, quia 13 abest. Et ita porro. Habemus ergo aequationes in Lege Operationis contentas. Apparet etiam ex nuda inspectione, valores Quotientis et Residui esse quales assignavimus.

Quoniam ergo Aequationes in Lege Operationum contentae simplici admodum regularitate procedunt, et earum incognitae sunt simplicis gradus, hinc regula divisionum reducitur ad regulam jam a me inventam tollendi simplices incognitas, ejusque harmoniis suas proprias seu speciales addit. Sed placet adjicere modum inveniendi valores Terminorum Operationis 30, 31 etc. maxime proprium et analysi convenientem, qui consistit in comparatione successus cum quaesito. Nempe Quotientis partem puram $30x^2+31x+32$ multiplicabimus per divisorem $10x^2+11x+12$, producto addamus residuum $33x+34$, et proveniet formula coincidens cum dividendo $20x^4+21x^3+22x^2+23x+24$. Unde habebuntur aequationes comparatitiae, easdem quas ante $10.20=10.30$, et $10.21=10.31+11.30$, et $10.22=10.32+11.31+12.30$, et $10.23=10.33+11.32+12.31$, et $10.24=10.34+*+12.32$, ubi ex natura residui in ultima aequatione contingit hiatus per stellulam expressus, nempe abest 11.33. Cujus rei ratio est, quod Termini Operationis, qui residuum constituunt, hoc loco 33 et 34, non nisi per 10 multiplicantur, non vero per 11 et 12. Secus fuisset, si continuata fuisset divisio. In calculi executione fingere licebit, quasi etiam adesset 11.33, ascribendo ei notam seu includendo, ut regularitas melius servetur. Ex his etiam habebitur series infinita pro Quotiente inveniendo sine Residuo, continuata divisione. Item inquisitio maximi communis divisoris, si rursus divisorem dividas per residuum, ubi $10x^2+11x+12,:,33x+34=40x+41,:33,,+42:,33x+34$. Ubi si continuando nulla prodit communis mensura, sequitur sublatio literarum in aequationibus, et ultimus residuus, ut hoc loco 42, fit $=0$. Ita prodibunt omnes aequationes simplices necessariae ad sublationem literarum.
