貴重書

et $A^3 \sqcap \begin{array}{l}+b^3\\ -3bac\end{array} \begin{array}{l}-ac\sqrt{-ac}\\ +3b^2\ldots\end{array} \sqcap \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}$ et $B^3 \sqcap \begin{array}{l}+b^3\\ -3bac\end{array} \begin{array}{l}+ac\sqrt{-ac}\\ -3b^2\ldots\end{array} \sqcap \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}$

Habemus ergo $b^3-3bac \sqcap \frac{r}{2}$. Aliunde autem scimus, radicem ipsius $\frac{q^3}{27}$ differentiae quadratorum partium binomii vel residui dati $\frac{r}{2}$ et $\mp\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}$ aequari ipsi b^2+ac differentiae quadratorum partium binomii vel residui quaesiti $b\mp\sqrt{-ac}$ seu radicis binomii vel residui dati $\frac{r}{2}\mp\sqrt{-ac}$. Quod theorema demonstratum extat apud Schotenium in appendice Commentariorum, tametsi originem inventionis, quae ad altiores quoque gradus porrigitur, non attigerit, quam alias forte explicare poterimus. Habemus ergo aequationes duas $b^3-3bac \sqcap \frac{r}{2}$, et alteram $\frac{q}{3} \sqcap b^2+ac$, ex quarum posteriore erit $ac \sqcap \frac{q}{3}-b^2$, quem valorem inserendo in priore habebimus $b^3+3b^3-qb \sqcap \frac{r}{2}$ vel $8b^3-2qb-r \sqcap 0$. Quae aequatio cum per omnia coincidat datae, excepto quod pro x habetur $2b$, et pro x^3 habetur $8b^3$, ideo necesse est $2b$ esse x, adeoque b esse $\frac{x}{2}$. Posueramus autem supra $b \sqcap \frac{x}{2}\mp d$, erit ergo $\mp d \sqcap 0$. d autem significabat excessum aliquem aut defectum; is ergo erit nullus, adeoque exacte A sive $\sqrt[3]{\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}$ erit $\sqcap \frac{x}{2}+\sqrt{-ac}$ et B sive $\sqrt[3]{\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}$ erit $\frac{x}{2}-\sqrt{-ac}$. Ergo denique $\sqrt[3]{\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}$ erit $\frac{x}{2}+\sqrt{-ac}+\frac{x}{2}-\sqrt{-ac}$, id est x, quod ostendendum sumseramus.

Cum ergo satis opinor evicerimus, repetitas toties radicum irrationalium formulas esse reales sine ullo aequationis cubicae

discrimine, superest, ut de earum usu nonnulla dicamus. Ac primum haec est sententia mea, generatim in eo consistere perfectionem Algebrae, ut radices irrationales aequationum cujuscunque gradus inveniantur. Nam resolutio aequationis est, invenire valorem incognitae quantitatis, sive aequationem ex affecta et elata reddere puram et simplicem, quod generaliter in quolibet gradu fieri non potest nisi per irrationales illius gradus, accedentibus subinde et irrationalibus graduum inferiorum. Inventa formula generali radicum irrationalium alicujus gradus, habetur quidquid in eo gradu optari potest, limites ac determinationes, possibilitates atque impossibilitates, numerus radicum, expressio earum simplicissima, ac depressiones atque extractiones, quibus problema ad simplicissimos terminos reduci possit. Denique si de constructionibus quaeratur, habebitur revocatio omnium problematum ab aequationibus pendentium ad duo tantum, sectionem scilicet rationis aut anguli.

Eadem et priorum Algebristarum sententia fuit. Sed video, summum virum Renatum Cartesium aliam institisse viam atque ab ipso pariter ac doctissimis ejus commentatoribus radicum irrationalium usum atque inventionem plerumque elevari. Sed ita sumus homines, ut nostra tantum admiremur. Cartesius enim cum resolutionem aequationum per irrationales sive veram atque analyticam radicum inventionem promovere posse desperaret, rem ad geometricam constructionem traduxit per varia curvarum genera, praeclaram certe et summo ejus ingenio dignam, sed qua ut supra quoque dixi non mens illustratur, sed manus dirigitur. Si quis enim lineam quaesitam mihi exhibeat materialem instrumento aliquo, ut circuli aut parabolae sectionibus determinatam, praxin absolvit, animo non satisfacit, qui tum demum conquiescit, cum quaesitae quantitatis valorem simplicissima ad datas relatione expressum habet, qua intima ejus natura detegitur et omnes problematis recessus patefiunt. Videbat scilicet Cartesius, semper esse in potestate curvas invenire construentes (tametsi ut alibi dixi instrumentum aliquod simplex ac generale mentem non sustulerit), sed non esse hactenus in potestate invenire valores; certis enim ad valores irrationales inveniendos artibus est opus ac suppositionibus mira quadam ratione excogitatis, in quas non incidat animus, nisi aut immenso labore omnia pertentet aut singulari quodam artificio regatur, quod non ab Algebra, sed a superiore quadam scientia proficiscitur. Fateor cubicarum atque quadrato-quadraticarum radices facilius fuisse repertas, illas a Scipione Ferreo, has a Ludovico Ferrariensi, quoniam ob calculorum simplicitatem paucasque admodum combinationes variis modis ad idem perveniri solet. Ego certe decem minimum modis inter se diversis ad Scipionis Ferrei, tribus aut quatuor rationibus in Ludovici Ferrariensis regulas perveni, idque aliquando cum alia quaererem. At qui regulas quinti sextique gradus universales invenerit, eum certe laudabo, totum enim fere ingenio atque industriae, vix quicquam fortunae debebit. Hoc ergo agere debent, quicunque Algebram a se promotam gloriantur.

Cartesii methodus analytica hoc tantum ac ne vix quidem praestat, ut sciamus an aequatio aliqua rationalis dividi possit per aliam rationalem. Et ad id ipsum investigandum opus est calculis immensis, nam ut Huddenius ostendit, ut sciamus exempli causa, an aequatio aliqua sexti gradus per aequationem cubicam secundi termini rationalis dividi possit, opus est aequatione gradus decimi quinti, cujus divisores sed simplices tantum ac rationales quaerendi sunt. Fateor, Huddenium summo ingenio ac miris artibus immensoque labore tabulam inde eruisse, cujus ope omnia pertentando sciri possit, an aequatio aliqua rationalis quinti sextique gradus sit divisibilis; sed quis tanti putabit ullam aequationem, ut per tot examina incredibili labore ducat, et quid futurum putamus in altioribus, ubi tabula ipsa ad hunc constructa modum immensae magnitudinis futura esset, praeterquam quod ita aequationes illae, in quibus irrationales supersunt, non possunt examinari. Neque enim sine exaltatione aequationum semper tolli possunt irrationales: exaltationes autem illae plerumque ducunt ad gradus, de quibus regulas nondum habemus. At formula irrationalium radicum suo gradui generaliter accommodatarum, ingentis tabulae instar una habet, nec aequationes illas moratur, in quibus sunt irrationales, et hoc nobis praestat, ut depressiones omnes certa securaque ratione sine tot tentaminibus inveniantur per extractiones radicum quando fieri possunt. Divisorum enim inquisitio res est varia et multis tentaminibus obnoxia, praesertim cum de divisoribus irrationalibus agitur; at radicum inventio certa est semper ac determinata, sive literales sive numerales sint aequationes.

Sed usum radicum irrationalium uno atque altero tantum exemplo illustrare utile erit. Cartesius asserit, si aequatio cubica proposita rationalis dividi nequeat per incognitam plus minusve

aliquo divisore rationali termini ultimi (nam irrationales infiniti sunt nec tentari possunt), tunc pro certo haberi debere, problema esse solidum, adeoque omnem aequationem cubicam rationalem deprimibilem habere radicem rationalem. Quae assertio merebatur demonstrationem; quidni enim possit aequatio esse deprimibilis, et habere radices planas quidem, sed irrationales, nempe quadraticas? At hujus Theorematis veritas ex irrationalium Cardanicarum contemplatione manifestum est, ac nescio, an Cartesius aliunde emerit. Nimirum sit aequatio $x^3.-qx-r \sqcap 0$, cujus radix $x \sqcap \sqrt{(3)\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}} + \sqrt{(3)\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}$. Patet, si radicem habeat, partem unam A habituram et alteram B; item si radix ab A sit binonium ut $b+\sqrt{\mp ac}$, tunc radicem ex B fore residuum respondens $b-\sqrt{\mp ac}$. His adjicio, si radix cubica erui possit ex binomio A vel residuo B, tunc eam semper habere partem unam b rationalem, nec posse componi ex duabus irrationalibus, quod ita probo. Omne binomium vel residuum, cujusque partium quadratorum differentia habet radicem cubicam rationalem, ejus binomii radix est ex parte rationalis; patet ex dictis a Schotenio in appendice Commentariorum, ubi de methodo extrahendi ex residuis et binomiis, et potest si opus accuratius demonstrari. Jam binomium vel residuum Cardanicum semper tale est; ejus enim partes sunt $\frac{r}{2}$ et $\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}$, quadrata partium sunt $\frac{r^2}{2}$ et $\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}$, quorum differentia $\frac{r^2}{4}, -\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}$, id est $\frac{q^3}{27}$, cujus radix cubica est rationalis, nempe $\frac{q}{3}$. Cum ergo b sit rationalis quantitas et x quandocunque, ex A et B radix cubica extrahi potest. Sit $b+\sqrt{\mp ac}+b-\sqrt{\mp ac}$ sive $x \sqcap 2b$, patet x fore semper rationalem, quandocunque aequatio cubica deprimi potest.

Deberet jam explicari Methodus extrahendi radices cubicas ex his binomiis vel residuis etiam tum cum imaginariae ingrediuntur. Raphael Bombellus id praestat tentando, intra certos tamen limites, quoniam scilicet methodus illa ingeniosissima, quae a Schotenio sub finem Commentariorum adjecta est, nondum habetur. Quoniam autem requirit methodus haec, ut binomii ejusmodi vel residui valor in numeris inveniatur vero propinquus, ut postea exacte reperiri possit; ideo fit ut imaginariis intervenientibus directe adhiberi nequeat; quis enim exempli causa in numeris rationalibus vero propinquis exhibeat valorem quantitatis hujusmodi $\sqrt[3]{1+\sqrt{-1}}$? Cui malo remedium inveni ac methodum detexi, per quam sine tentamentis, ex talibus binomiis etiam non obstante imaginaria radices extrahi possint, non cubicae tantum sed et surdesolidae, et aliae altiores quaecunque.

Nititur illa inventio cuidam singulari, quod aliquando explicabo. Nunc regulas quasdam adjiciam ex irrationalibus contemplatione ductas, quanquam in illis nulla fiet irrationalium mentio, per quas radix rationalis ex ipsis tentando facile extrahitur.*)

XV.

NOVA ALGEBRAE PROMOTIO.

Hactenus Algebra admodum imperfecta mansit, etsi qui eam non satis callent, ad summum fastigium provectam arbitrentur: quemadmodum fere fit, ut tanto quisque plus suae scientiae tribuat, quanto scientiae minus habet. Nimirum nemo hactenus aliquid generale attulit circa resolutionem Aequationum quae assurgunt ultra quartum gradum, quae tamen non usque adeo raro occurrunt, in problematibus etiam quae adeo difficilia non videntur. Exempli causa triangulum partiri in quatuor partes aequales ope duarum rectarum inter se perpendicularium problema est, quod ascendit ad aequationem octavi gradus. Taliaque occurrunt aliquando in Analysi versantibus.

Resolutionem autem Aequationis Algebraicam vel in Numeris indeterminatis tunc haberi putandum est, cum habetur Valor seu Expressio Analytica radicis, per quam nimirum et exacte et finite et in generalitate debita valores radicum exhibentur. Habemus quidem casus speciales, in quibus aequationes altiores deprimi

*) Die Abhandlung bricht hier ab.

aut etiam sine depressione ab affectis ad puras radices sui gradus transferri possunt, sed in generalibus terminis, ita ut coefficientes terminorum secundi, tertii, quarti etc. velut p, q, r etc. nullam habeant relationem inter se praescriptam, rem nondum quisquam praestitit, nisi quam aequatio altior revera cadit in inferiorem, potentia ejus incognitae loco assumta, velut in aequationibus gradus binarii, ubi soli extant termini gradus binarii, et in aequationibus gradus ternarii, in quibus soli extant termini gradus ternarii, et ita porro.

Habemus valores generales Radicum in aequationibus altioribus latentium per appropinquationes, sed qui non sunt exacti; habemus et exactos, sed non nisi infinitaliter exprimendos, quales sunt valores quos praebent series infinitae, qui valores mente quidem intelligi, sed numeris definitis exhiberi non possunt. Habemus denique Radices exacte et finite exhibitas, at modo organico, non per expressiones, cum scilicet locis geometricis seu lineis curvis continuis, id est per motum descriptis earumque intersectionibus vel etiam aliquo organo conveniente incognitae lineae radicibus aequationis inservientes exhibentur, sed hic modus exhibendi organicus revera non est analyticus et dat quidem quantitatem, sed non ejus valorem.

Exemplo discrimina haec illustrabo. In quadrato ABCD (fig. 29) habeo lineam Diagonalem organice, possum enim eam reapse exhibere ducta recta AC quae est diagonalis, sed non ideo habeo ejus valorem, nisi sciam ejus relationem analyticam ad quadrati latus AB. Ea autem nobis nota est, nam si super AC describatur quadratum ACEF et producamus AD in E et CD in F, patet ACEF continere quater triangulum ADC, sed ABCD continet idem triangulum bis, ergo ACEF quadratum a diagonali est duplum ipsius ABCD quadrati a latere. Itaque si AB vocetur a, et AC vocetur x, fiet $xx=2aa$ seu $x=a\sqrt{2}$ seu x est ad a ut $\sqrt{2}$ est ad 1, qui est valor seu expressio Analytica exacta finita ipsius diagonalis. Atque hoc est quod vulgo dici solet, diagonalem esse incommensurabiliter lateri, nam ejus valor non potest exacte et finite exprimi, nisi per numerum surdum $\sqrt{2}$. Et quoties valores sunt incommensurabiles vel simul comprehendunt tam commensurabiles quam incommensurabiles, in casu generalitatis desideratur hujusmodi aliqua expressio per numeros surdos.

Habeo quidem expressionem valoris ipsius $\sqrt{2}$ rationalem et exactum, sed per seriem infinitam hoc modo, ut dicam esse

$$\sqrt{\ }2=\frac{23}{16}-\frac{5}{2^{6};1.2}+\frac{7}{2^{7};1.2}-\frac{7.9}{2^{9};1.2.3}+\frac{9.11}{2^{\ 0};1.2.3}-\frac{9.11.13}{2^{12};1.2.3.4}$$
$$+\frac{11.13.15}{2^{13};1.2.3.4}-\frac{11.13.15.17}{2^{15};1.2.3.4.5}+\frac{13.15.17.19}{2^{16};1.2.3.4.5}$$
$$-\frac{13.15.17.19.21}{2^{18};1.2.3.4.5.6}+\frac{15.17.19.21.23}{2^{19};1.2.3.4.5.6}\ \text{etc.}$$

ubi quanto magis continuatur series, tanto minus erratur, cum error semper sit minor eo termino qui terminum per quem finivimus sequitur. Tota autem series rationalis infinita exacte aequalis est valori irrationali quaesito $\sqrt{2}$. Sed patet subsidiarias esse tales expressiones, utiles quidem in praxi pariter et theoria, non tamen continere quod desideramus.

Habemus etiam Expressiones varias appropinquativas, quales tum ex praecedenti serie hauriri possunt, tum etiam per modum receptum extrahendi radicem ex numero, postquam multae ciphrae nullitatis indices ei sunt adjectae, veluti cum appropinquandum est ipsi $\sqrt{2}$, extrahendo radicem quadraticam decimaliter ex 2.000000000, ubi fit $\sqrt{2}=1.414213$. Ubi si dicamus $\sqrt{2}$ esse $\frac{14}{10}$, ideo ob sequentem numerum 1 error erit minor quam $\frac{1+1=2}{100}$ seu $\frac{1}{50}$; si dicamus $\sqrt{2}$ esse $\frac{141}{100}$, error erit minor quam $\frac{4+1=5}{1000}$ seu $\frac{1}{200}$; si dicamus $\sqrt{2}$ esse $\frac{1414}{1000}$, error erit minor quam $\frac{3}{10000}$, et ita porro. Quodsi ante continuationem operationis daretur continuatio in infinitum notarum decimalium, haec appropinquatio transiret in casum praecedentis paragraphi seu in valorem exactum per seriem infinitam, et quidem in meris integris, quod hactenus pro irrationalibus praestitum non est. Franciscus Vieta primus hoc extractionis genus a radicibus puris promovit ad radices affectas. Radicem puram vocamus, cum incognita vel ejus potentia aequatur quantitati rationali, ex. gr. $xx=2$, vel $x^3=3$, vel $x^4=3$, ita enim radix pura est $x=\sqrt{2}$, vel $=\sqrt[3]{3}$, vel $=\sqrt[4]{3}$. Sed radix erit affecta, si sit $xx=ax+bb$, cum aequatio est plus quam bitermina, et plures dignitates ejusdem incognitae ad eam formandam concurrunt. Eleganter ergo ostendit Vieta in libro De Numerosa Aequationum resolutione, etiam radices affectas simili quadam ratione extrahi posse, eaque methodo prodire ipsas in Numeris Ra-

dices aequationum, quoties eae Radices sunt rationales; si minus, prodire decimaliter valores quantumlibet appropinquantes.

Post Vietam Thomas Harriotus Anglus non tantum resolutionem Vietae numerosam excoluit, sed etiam notionem a Vieta tantum subindicatam utiliter prosecutus est, quod scilicet aequatio posita nihilo aequalis prodeat ex aequationibus radicalibus etiam nihilo aequalibus in se invicem ductis; qualis est $x-2=0$, posito radicem unam aequationis seu valorem ipsius x esse; et quod summa radicum aequetur termino secundo aequationis, summa binionum (seu rectangulorum) ex radicibus termino tertio, summa ternionum (seu rectangulorum solidorum) ex radicibus termino quarto, et ita porro. Illud etiam sane pulcherrimum observavit primus, quod tot sint mutationes signorum in aequatione nihilo aequali ordinatim scripta, quot radices affirmativae, et tot consecutiones signorum, quot radices negativae.

Cartesium inventis Harrioti usum dubitari vix potest usque adeo ut dimidia fere pars libri tertii Geometriae Cartesianae ex Harrioto transcripta videatur, ne illo quidem palmario de mutationibus et consecutionibus signorum excepto, quod non facile alicui in mentem venire poterat, qui non diu in hujus calculi experimentis erat versatus. Harriotus enim hanc regulam inductione, non ratione animadvertit, et hactenus neque Cartesius neque Cartesianorum quisquam ejus rationem reddere potuit. Hoc tamen Cartesius praeclare addidit Harrioto, quod consideravit concipi posse radices imaginarias seu impossibiles, quarum ope universalia redduntur, quae Harriotus limitate ad possibiles dixerat.

Caeterum Cartesius cum numerosam Aequationum Resolutionem animadverteret a Vieta occupatam et viam pedum nullam videret ad id quod maxime desiderabile non poterat ignorare, id est ad valores Radicum analyticos generales exactos per radices irrationales gradui aequationis convenientes; transtulit sese ab Analysi ad Geometriam, a valoribus ad constructiones, a ratiocinatione mentem illustrante ad effectionem manus atque organa gubernantem, et loca a Veteribus coepta prosecutus, ostendit quomodo per intersectiones linearum motu continuo per organa descriptilium radices quaesitae exhiberi queant. In quo sane ingens operae pretium fecisse Cartesium negari non debet, etsi postea Fermatius nonnulla ejus praecepta emendarit, Slusius etiam totum hoc ne-

gotium tractabilius reddiderit, loco ultimae aequationis unius in-
cognitae adhibendo binas duarum incognitarum.

Porro Cartesius, vir erat haud dubie praeclarissimus, cui
mirifice obstricta est haec scientia, in eo tamen nocuit progressui,
quod hoc egit omni studio et arte, ut crederetur praestitisse aut
certe viam ostendisse ad praestandum, quicquid poterat in ea desi-
derari. Qua ratione factum est, ut plerique ejus discipuli vix ani-
mum altius attollerent aut quicquam adderent inventis magistri.
Nam si Slusium et Huddenium excipiamus, nihil magni momenti
ad Algebram adjecere Cartesiani. Cartesius igitur, cum videret
difficillimam rationem esse inveniendi valores radicum affectarum
irrationales generales, hanc inquisitionem contemsisse visus est et
ut nec orginem indicare dignatus regulae pro Radicibus aequatio-
num cubicarum a Scipione Ferreo et Nicolao Tartalea inventae, ita
etiam locutus est tanquam nihil interesset inter tales expressiones,
quae sunt per latera cuborum datorum, et eas quibus indicaretur
lineas quasdam rectas exhiberi trisectione Anguli, cum tamen
manifestum sit priorem expressionem ad calculum inservire, poste-
riorem minime.

Sciendum ergo est, quod primarium Analyseos Algebraicae
officium attinet, exprimere radices aequationum per valores; quic-
quid in eo genere hactenus praestitum est, ultra aequationes qua-
draticas (quas jam Graeci et Arabes resolvere norant) Italis deberi.
Primus ergo Scipio Ferreus qui Bononiae paulo post initia seculi
a Christo nato decimi sexti Mathesin docuit, elegantissimo invento
deprehendit valorem Radicum Aequationis cubicae generalem, quod
idem postea invenit Nic. Tartalea, cum Scipionis regula ab ejus
discipulis tegeretur, ut Cardanus narrat, qui artem a Tartalea ac-
ceptam primus publicavit. Etsi autem vulgo putetur et ab ipsis
etiam inventoribus creditum sit, excludi a regula eas cubicas ae-
quationes, in quibus sunt tres radices possibiles: a me tamen du-
dum animadversum est, non obstante imaginariarum quantitatum
interventu regulam valere; manet enim expressionis veritas, etsi
non sit apta ad constructionem.

Reductio deinde aequationis quadroquadraticae ad cubicam
debetur Ludovico Ferrariensi, juveni admodum ingenioso, qui Car-
dani discipulus fuit, et praematura morte spes majores de se con-
ceptas destituit, ut ipse Cardanus nobis refert. Vieta et Cartesius
inventum Ludovici tantum repetiere, etsi uterque inventorem verum

dissimularit; Cartesius etiam perinde locutus sit, ac si rem ipse proprio marte invenisset, Methodo inventoris nonnihil mutata.

Ab eo tempore nihil mentione valde dignum in hac Analysi praestitum est a quoquam, quantum constat; etsi nonnulli .....*)

Constat Tabulas Numerorum in Mathematicis haberi multas et perutiles, quibus fit ut calculus semel ab uno peractus imposterum serviat omnibus. Ita extant Tabulae multiplicationum, Pythagorico quem vocant Abaco continuato; Tabulae numerorum ex primitivis derivatorum per multiplicationes; Tabulae numerorum Quadratorum, Cuborum, Triangularium aut aliter figuratorum vel denominatorum; sed celebratissimae omnium Tabulae Sinuum, Tangentium et Secantium ac Logarithmorum vel absolutorum vel ad Tabulas Sinuum ac Tangentium relatorum, ut alias taceam vel conditas vel magno cum fructu adhuc condendas in pura vel in mista Mathesi.

Harum exemplo saepe consideravi, rem magni usus fore Analyticam in Mathesi artem Calculo quem Speciosum vocant vel literalem exercentibus, si Canones et Canonum Tabulae conderentur pro illis calculi operationibus quae saepe occurrunt, ut in oblato casu statim ad Canonem recurri possit nec actum millies agere sit opus, praesertim cum illi ipsi Canones Canonumque Tabulae simul Theoremata pulchra, imo series quasdam Theorematum praebeant, in infinitum constanti lege progredientes.

Reperietur autem hoc attentaturis, nihil aliud esse Calculum circa magnitudines Analyticum, quam exercitium *artis Combinatoriae* sive Speciosae generalioris, *formas* seu quantitates (quatenus scilicet distincte concipiuntur) et *relationes* harumque *similitudines* tractantis per notas, quam Algebra literalis a Vieta introducta applicat ad habitudines quantitatum atque adeo Arti Combinatoriae subordinata est. *Speciosa* autem *generalis* ipsa est *Ars characteristica*, in unam cum Combinatoria disciplinam confusa, per quam rerum relationes apte characteribus repraesentantur. Et pro certo habendum est, quanto magis effe-

*) Schluss fehlt.

cerimus ut characteres exprimant omnes relationes quae sunt in rebus, eo magis nos in iis reperturos auxilium ad ratiocinandum, ut ita quemadmodum de scriptura eleganter dixit poëta Gallus, colorem et corpus cogitationibus rationibusque inducamus, non tantum in memoriae usum ad retinendum cogitata, quod scriptura praestat, sed etiam ad vim mentis augendam, ut incorporalia velut manu tangat. Sed nobis nunc in rem praesentem veniendum est post praefationem (ut opinor) non inutilem, quoniam, uti mox patebit, in notis Algebraicis defectus ingens superfuit hactenus, cujus tollendi rationem trademus.

Algebra ut nunc recepta est quantitates oblatas notis quibusdam designat, eamque in rem literis, tanquam maxime familiaribus utitur. Et sane quoties ipsarum quantitatum adhibitarum nullae considerantur relationes inter se invicem, quibus distinguantur, parum interest quas adhibeamus notas. Esto igitur ex quantitatibus simplicissimo modo, id est per additionem composita quantitas, exempli gratia

$$\begin{aligned} \text{sit } x &= a+b+c+d \text{ etc.} \\ \text{et sit alia } y &= k+l+m+n \text{ etc.} \\ \text{et rursus } z &= q+r+s+t \text{ etc.} \end{aligned}$$

ubi nullum est discrimen inter literas valoris ejusdem, distinguuntur tamen inter se literae divisorum valorum. Et erit xy summa omnium binionum possibilium ex literis valorum x et y simul formatorum, et xyz summa omnium ternionum ex literis valorum x et y et z simul, et ita porro. Si plures sint valores, ea scilicet tantum lege combinationis servata, ut ne in eodem membro plures ex eodem valore literae concurrant.

$$\begin{aligned} \text{Jta } xy = {} & ak + al + am + an \text{ etc.} \\ & bk + bl + bm + bn \text{ etc.} \\ & ck + cl + cm + cn \text{ etc.} \\ & dk + dl + dm + dn \text{ etc.} \\ & \text{etc. etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

ubi patet seriem horizontalem multiplicari per eandem literam ex valore x, et verticalem multiplicari per eandem ex valore y; sed in horizontali id quod multiplicetur esse valorem y, et in verticali valorem x. Pro xyz omittamus brevitatis causa literas d, n, t, ut sit $x=a+b+c$, $y=k+l+m$, $z=q+r+s$, et fiet

$$\begin{aligned} xyz = {} & akq + akr + aks \\ & alq + alr + als \\ & amq + amr + ams \\ & anq + anr + ans \\[4pt] & bkq + bkr + bks \\ & blq + blr + bls \\ & bmq + bmr + bms \\[4pt] & ckq + ckr + cks \\ & clq + clr + cls \\ & cmq + cmr + cms, \end{aligned}$$

quod quidem melius repraesentaretur rectangulo solido ut praecedens xy rectangulo plano; sed in plano sufficit haec trirectanguli expositio, praesertim cum $xyz\omega$ tanquam quadro-rectangulum, si ita loqui licet, aut altiora ne in solido quidem exhiberi queant. Patet autem simul et ordo in dispositionibus literarum, quem persequi nihil attinet. Satis est notari: prolixae repraesentationis actualis compendium fieri enuntiatione superiore per biniones, terniones etc. dicendo productum ex valoribus quotcunque esse summam combinationum possibilium, quas una tantum ex quovis valore quantitas ingrediatur. Comprehenditur autem sub additione subtractio, si litera ponatur esse quantitas negativa, ut si $c = -f$, idem erit $a+b-f$ quod $a+b+c$.

Jam consideremus non tantum adhiberi posse in valoribus formulas illas simplices, sed etiam magis compositas, ubi literae assurgunt ad potentias, vel ducuntur in se invicem. Maxime autem insistemus casui simpliciori et magis usitato, ubi non nisi unius literae tanquam capitalis potentias adhiberi opus est, sed variis coefficientibus affectae, ad quas omnia ordinentur. Ut si x esset $7+2\nu+3\nu\nu+6\nu^3$, ubi ut res generaliter tractetur, cum numeri possint esse quicunque, poterimus facere $y=a+b\nu+c\nu^2+d\nu^3$; sed praestabit (ob mox dicenda) adhibere numeros supposititios sive fictitios qui significent idem quod a, b, c etc. et facere

$$\begin{aligned} x &= 10+11\nu+12\nu^2+13\nu^3+14\nu^4 \text{ etc.} \\ y &= 20+21\nu+22\nu^2+23\nu^3+24\nu^4 \text{ etc.} \\ z &= 30+31\nu+32\nu^2+33\nu^3+34\nu^4 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Atque ita jam exprimimus notis Algebraicis hujusmodi non tantum coefficientes quantitates, sed etiam omnes eorum relationes inter se ex datis nascentes, adhibendo pro literis numeros suppositios, quorum notae dextrae designabunt quarum potentiarum ipsi sint coefficientes, et sinistrae ostendent quarum ipsi literarum valores ingrediantur. Sic 32 ob 2 afficit ν^2, et ob 3 reperitur in valore tertiae nempe literae z.

Continetur etiam in his Expressionibus potentia quaedam virtualis, cujus subintellectione intelligi potest servari legem homogeneorum. Exempli causa si fingamus 1, 2, 3 in notis dextris designare potentiam, sed exponentis negativi, ita ut 10, 11, 12, 13 idem significent quod a^{-0}, b^{-1}, c^{-2}, d^{-3}, et ita porro, vel quod idem est $\frac{1}{a^0}$, $\frac{1}{b^1}$, $\frac{1}{c^2}$, $\frac{1}{d^3}$; hoc pacto omnes termini erunt ejusdem gradus, nempe nullius perinde ac si x vel y esset non linea aut alia res, sed numerus, qui etiam intelligitur gradus nullius; ita $10+11\nu+12\nu^2+13\nu^3$ etc. darent $1+\frac{1}{b}\nu+\frac{1}{c^2}\nu^2+\frac{1}{d^3}\nu^3$ etc. qui omnes termini sunt homogenei primo, nempe unitati vel $\nu^0 : b^0$ seu $\frac{1}{b^0}\nu^0$.

Dici autem vix potest, quantum ista usum habeant etiam ad evitandos Calculi errores, ita ut ipse calculus quodammodo comprobationem suam ferat secum, quemadmodum et alias legis homogeneorum observatio multos calculi errores excludit. Hic vero cum non pauca alia indicentur, et serie quadam certa progrediamur, multo adhuc tutius agimus. Et quod potissimum est, continue theoremata condimus inter operandum, multo magis et extantius quam in calculo literali recepto, quoniam semper videmus quorsum pertineant datae quantitates, aut qua lege inter se combinentur, quod in calculo communi literali non apparet.

Equidem possemus simile aliquod comminisci per literas pro Numeris sive potentias ipsis tribuendo, ut paulo ante dictum est (sed quod tamen ut mox patebit, cum numeri supposititii plurium sunt quam duarum notarum, non sufficit) sive potius faciendo quod Graeci aut alii populi solent, nempe literis designando numeros, ita pro 32 scribetur latine cb vel graece $\gamma\beta$. Sed numeris nostris magis sumus assueti et praeterea cautione opus esset ne, ut

alias in literis, habeatur cb pro ducto ex c in b, sed ut tanquam una aliqua litera consideretur. Itaque fortasse poterimus numeris esse contenti, ita tamen, ut sua hic libertas cuivis relinquatur.

Ex posito jam valore ipsarum x et y fiet

$$\begin{array}{lllll} xy = 10.20 & + 10.21\nu & + 10.22\nu^2 & + 10.23\nu^3 & + 10.24\nu^4 \\ & 11.20 & 11.21 & 11.22 & 11.23 \\ & & 12.20 & 12.21 & 12.22 \\ & & & 13.20 & 13.21 \\ & & & & 14.20 \end{array}$$

unde eodem modo prodiret xz mutando tantum notas sinistras 1, 2 in 1, 3, seu retento in iis 1, mutando 2 in 3. Et yz fieret mutando notas sinistras 1, 2 in 2, 3, nempe 2 in 1 et 2 in 3 vel quod eodem redit hoc loco, mutando 1 in 3, retento 2.

Sed nec minus facile prodit productum ex tribus seu erit

$$\begin{array}{lllll} xyz = 10.20.30 & + 11.20.30\nu & + 12.20.30\nu^2 & + 13.20.30\nu^3 & + \text{ etc.} \\ & 10.21.30 & 10.22.30 & 10.23.30 & \\ & 10.20.31 & 10.20.32 & 10.20.33 & \\ & & 11.21.30 & 12.21.30 & \\ & & 11.20.31 & 12.20.31 & \\ & & 10.21.31 & 11.22.30 & \\ & & & 11.20.32 & \\ & & & 10.22.31 & \\ & & & 10.21.32 & \\ & & & 11.21.31 & \end{array}$$

ubi generaliter dici potest, productum ex *formulis quotcunque generalibus per unam literam* ν *rationaliter integre expressis* esse formulam ex ν rationalem integram, in qua termini cujusque coefficiens sit summa combinationum possibilium facta ex coefficientibus initio datis formularum producentium omnium, ea lege combinationis servata, ut in quovis membro idem sit gradus potentiae formalis qui totius est producti, et idem gradus potentiae virtualis, qui est gradus potentiae ipsius ν, ad quam pertinet membrum. Unde tot sunt in membro numeri supposititii invicem ducti, quot invicem ductae sunt formulae, ex quavis nempe formula numerus unus, et numerorum supposititiorum notae ultimae facient summam aequalem exponenti potentiae ipsius ν. Sic in coefficiente ipsius ν^2 quodlibet membrum verb. grat. 12.20.30 vel

11.21.30 habet numeros tres et notas quidem priores 1, 2, 3, quae indicant ex qua formula producente venerint, sed notas posteriores (gradum virtualem designantes) ita comparatas ut simul faciant 2; nam 2+0+0 est 2, et 1+1+0 est 2.

Hinc etiam licet contractius scribere haec producta, nempe compendiosiore expressione combinationum, dum pro omnibus similibus inter se scribitur una cum vocula etc. vel cum suppositis punctis ut.. Ita pro 10.22 + 12.20 scribetur 10.22, pro 11.21.30 + 11.20.31 + 10.21.31 scribetur 11.21.30, et fiet

$$
\begin{array}{llllll}
xy = 10.20 & +10.21\nu & +10.22\nu^2 & +13.20\nu^3 & +14.20\nu^4 & +15.20\nu^5 \text{ etc.} \\
 & & +11.21 & 12.21 & 13.21 & 14.21 \\
 & & & & 12.22 & 13.22
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
xyz = 10.20.30 & +11.20.30\nu & +12.20.30\nu^2 & +13.20.30\nu^3 & +14.20.30\nu^4 & +15.20.30\nu^5 \\
 & & 11.21.30 & 12.21.30 & 13.21.30 & 14.21.30 \\
 & & & 11.21.31 & 12.22.30 & 13.22.30 \\
 & & & & 12.21.31 & 13.21.31 \\
 & & & & & 12.22.31
\end{array}
$$

Sed ex hac contracta Formarum scribendi ratione, dum pro tota forma ex membris omnibus similibus formata scribitur membrum unum, aperit se majus aliquid ac memorabilius: nempe modus canone generali seu una formula exprimendi productum ex formulis rationalibus integris quotcunque unam literam capitalem (seu ad quam ordinantur) ut hoc loco ν, potentiasve ejus continentibus. Nam posito $x = 10 + 11\nu + 12\nu^2$ etc. et $y = 20 + 21\nu + 22\nu^2 +$ etc. et $z = 30 + 31\nu + 32\nu^2 +$ etc. et $\omega = 40 + 41\nu + 42\nu^2 +$ etc. et ita porro, fiet omissis duobus punctis supponendis, cum semper jam subscripta intelligantur,

$$
\begin{array}{lll}
\multicolumn{3}{c}{xyz\omega \text{ etc.} = 10.20.30.40 \text{ etc.} + 11.20.30.40 \text{ etc. } \nu} \\
+12.20.30.40. \text{ etc. } \nu^2 & +13.20.30.40.50. \text{ etc. } \nu^3 & +14.20\ 30.40.50.60. \text{ etc. } \nu^4 \\
11.21.30\ 40. \text{ etc...} & 12.21.30.40.50 \text{ etc...} & 13.21.30.40.50.60. \text{ etc.} \\
 & 11.21.31.40.50 \text{ etc...} & 12.22.30.40.50.60. \text{ etc.} \\
 & & 12.21.31.40.50.60. \text{ etc.} \\
 & & 11.21.31.41.50.60. \text{ etc.}
\end{array}
$$

ubi variae sunt ejusdem formae significationes; exempli causa 12.21.30 etc. significat vel 12.21 id est 12.21 + 12.22, si duae tantum sint producentes x et y adeoque 30 negligatur aut unitati aequetur; vel significat 12.21.30 (si sint tres, x, y, z) id est

12.21.30 + 11.22.30 + 12.20.30 + 11.20.32 + 10.22.31 + 10.21.32; vel significat 12.21.30.40 (si sint quatuor x, y, z, ω), quod distincte scriptum daret membra 12, tot scilicet quot sunt rerum quatuor biniones duplicatae; vel significat 12.21.30.40.50, quod distincte scriptum daret membra 20; atque ita porro. Quae autem abest multiplicans formula, ut si absit valor ipsius ω, ejus coefficientes, ut 40, 41 etc. possunt pro unitatibus haberi in canone generali, et multo magis coefficientes sequentium, ut 50, 51 etc.

Id autem commode contingit, quod numerus formarum finitus est in quolibet gradu, quantuscunque sit numerus producentium formularum, adeoque et in quolibet potentiae cujuslibet coefficiente. Ex. gr. in gradu quarto non sunt formae nisi hae a^4, a^3b, a^2b^2, a^2bc, $abcd$, quibus respondent: 14.20.30.40, et 13.21.30.40, et 12.22.30.40, et 12.21.31.40, et 11.21.31.41, nam 50 et 60 accedentia nil mutant in numero formarum combinationis, etsi in numero membrorum ejusdem combinationis multum mutent. Tot scilicet sunt formae in gradu quot sunt exponentis divulsiones. Nam numerus $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$; divulsionibus autem computatur ipse integer numerus, quasi essent univulsio una, bivulsiones duae, trivulsio una, quadrivulsio una. Etsi autem pluribus formulis invicem ductis plures conjungantur numeri suppositi quam sunt unitates in exponente gradus, veluti 4, pro coefficiente ipsius ν^4; tamen necesse est ut reliqui numeri concurrentes praeter quatuor semper habeant notam ultimam 0, quia notae ultimae simul additae non debent facere nisi 4.

Possemus jam progredi ad multiplicationes formularum plures literas capitales habentium, ut si sint duae literae tanquam capitales m et n, et sit

$$
\begin{array}{lllll}
\nu = 100 & +100m & +111mn & +121m^2n & +122m^2n^2 \\
 & 101n & 120m^2 & 112mn^2 & 131m^3n \\
 & & 102n^2 & 130m^3 & 113mn^3 \\
 & & & 103n^3 & 140m^4 \\
 & & & & 104n^4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
\text{et } x = 200 & +210m & +211mn & +221m^2n & +222m^2n^2 \text{ etc.} \\
 & 201n & 220m^2 & 212mn^2 & 231m^3n \\
 & & 202n^2 & 230m^3 & 213mn^3 \\
 & & & 203n^3 & 240m^4 \\
 & & & & 204n^4
\end{array}
$$

ubi numeri suppositii sunt trinotales pro literis capitalibus duabus m et n et quadrinotales pro capitalibus tribus etc., initiali scilicet nota tantum designante ex quo numerus valore sit sumtus ipsius ν an ipsius x etc., reliquis notis designantibus potentiam literae capitalis, ita ut prima post initialem notam sedes referatur ad m, secunda ad n, etc. Ita 230 praefigitur ipsi m^3, et 2 significat id fieri in valore secundo seu ipsius x, 3 proxime sequens notat m assurgere ad cubum, 0 notat n abesse; sed 212 notat m^1n^2 seu mn^2 eodem valore secundo. Sed ut talia invicem multiplicentur, praesertim si res sit reddenda generalis pro literis quotcunque capitalibus valores ingredientibus, constituendi sunt prius ductus formarum in se invicem, de quibus infra.

Nunc satis in multiplicatione diversarum formularum in se invicem versati. Demus et canonem pro d i v i s i o n e, praesertim cum illic contenti esse possimus dividere formulam aliquam generalem rationalem integram secundum aliquam literam capitalem per aliam formulam rationalem integram secundum eandem capitalem, sive succedat exacte, sive secus; quo casu per canonem etiam residuum exhibetur, vel si malimus series infinita. Unde patet, quantus sit usus Canonum generalium, ut sponte praebeant rem antea abstratissimam et nostra demum aetate productam.

Sit formula $10x^8+11x^7+12x^6+13x^5+14x^4+15x^3+16x^2+17x+18$ dividenda per formulam $-20x^5+21x^4+22x^3+23x^2+24x+25$, ubi loco 20 assumo —20, cujus ratio mox ex calculo patebit, ut scilicet evitemus signum — inter calculandum. Ponamus jam quantitatem ex divisione provenientem quaesitam esse

$$30x^3+31x^2+32x+33+\frac{34x^4+35x^3+36x^2+37x+38}{-20x^5+21x^4+22x^3+23x^2+24x+25}$$

compositam ex quotiente integro et residuo fracto. Hanc multiplicemus per divisorem $-20x^5+21x^4+$ etc., proveniet formula coincidentianda cum dividendo initio posito, quod ut fiat commodius tam quoad signa, quam quoad legem homogeneorum, et notas numerales 5, ponamus dividendum datum seu initio positum, itemque numeratorem quotientis multiplicatum esse per —00, supponendo tamen —00=1 seu 00=—1, ita enim nihil hac multiplicatione mutatur. Multiplicatio ita stabit:

$$\begin{array}{ccccccccc}
-20.30x^8 & -20.31x^7 & -20.32x^6 & -20.33x^5 & -00.34x^4 & -00.35x^3 & -00.36x^2 & -00.37x & -00.38 \\
 & +21.30 & +21.31 & +21.32 & +21.33 & & & & \\
 & & 22.30 & 21.31 & 22.32 & +22.33 & & & \\
 & & & 23.30 & 23.31 & 23.32 & +23.33 & & \\
 & & & & 24.30 & 24.31 & 24.32 & +24.33 & \\
 & & & & & 25.30 & 25.31 & 25.32 & +25.33
\end{array}$$

quae formula coincidere debet dividendo initio dato per —00 multiplicato

$$-00.10x^8-00.11x^7-00.12x^6-00.13x^5-00.14x^4-00.15x^3-00.16x^2-00.17x-00.18$$

Jam ut c o i n c i d e n t i a t i o reapse praestetur, aequandus est terminus termino ejusdem gradus seu fiet $-20.30=-00.10$ et $-20.31+21.30=-00.11$, et ita porro, quas voco aequationes coincidentiatorias. Unde jam reperiemus valores quaesitorum coefficientium tam Quotientis quam Residui. Nempe fiet pro Quotiente

30	31	32	33
aequ.	aequ.	aequ.	aequ.
$00.10:20$	$\left.\begin{array}{r}+00.11\\21.30\end{array}\right\}:20$	$\left.\begin{array}{r}+00.12\\21.31\\22.30\end{array}\right\}:20$	$\left.\begin{array}{r}+00.13\\21.32\\22.31\\23.30\end{array}\right\}:20$

et fiet pro Residuo

$$\begin{array}{ccccc}
34 & 35 & 36 & 37 & 38\\
\text{aequ.} & \text{aequ.} & \text{aequ.} & \text{aequ.} & \text{aequ.}\\
\left.\begin{matrix}+00.14\\ 21.33\\ 22.32\\ 23.31\\ 24.30\end{matrix}\right\}:00 &
\left.\begin{matrix}+00.15\\ 22.33\\ 23.32\\ 24.31\\ 25.30\end{matrix}\right\}:00 &
\left.\begin{matrix}+00.16\\ 23.33\\ 24.32\\ 25.31\end{matrix}\right\}:00 &
\left.\begin{matrix}+00.17\\ 24.33\\ 25.32\end{matrix}\right\}:00 &
\left.\begin{matrix}+00.18\\ 25.33\end{matrix}\right\}:00
\end{array}$$

ponendo semper $00 = -1$.

Lex progressus, quotcunque sit graduum dividendus aut divisor, satis patet ex aspectu. Nempe omnis valor coefficientis in Quotiente habet denominatorem 20, in Residuo denominatorem 00; deinde sine discrimine Quotientis aut Residui

Numerator valoris pro	30	31	32	33	34	35	etc.
habet membrum	00.10	00.11	00.12	00.13	00.14	00.15	etc.

Et de caetero membra sunt omnes biniones possibiles formatae ex coefficiente aliquo divisoris initio dato cum coefficiente aliquo provenientis jam invento, sic ut semper gradus virtualis (seu summa notarum posteriorum) aequetur gradui virtuali (seu notae posteriori) coefficientis jam inventi. Ita numerator in valore ipsius 33 praeter 00.13 habet $21.32+22.31+23.30$ ubi $1+2$, et $2+1$, et $3+0$ semper facit 3; et in aequatione $33=00.13+21.32+22.31+23.30, :20$ seu $20.33=00.13+21.32+22.31+23.30$ servatur l e x h o m o g e n e o r u m tum f o r m a l i s, quodlibet enim membrum est velut rectangulum ex duabus quantitatibus, tum v i r t u a l i s, quo semper ascenditur ad gradum 3.

Obiter hic addo, hanc designationem $00.10:20$ mihi significare divisionem ipsius 00.10 per 20, seu $ab:c$ idem mihi esse quod $\frac{ab}{c}$, idque commoditatis causa praesertim ad impressionem adhibere soleo, cum ita typorum positus non turbetur nec spatium perdatur. Rationem quoque a ad b ut c ad d sic exprimo $a:b=c:d$, ut ita non opus sit peculiaribus notis pro analogia exprimenda, sed sufficiant notae divisionis et aequalitatis. Unde etiam ex tali scribendi modo omnes rationum regulae statim demonstrantur. Sed ut communiter scribi solet $a.b::c.d$, non tantum novus character $::$ sine ratione introducitur, ex quo nihil duci potest nisi ad meum illum redeas, sed etiam in ambiguitatem incurritur, nam si adhibeantur numeri, ut 20.33 quales hic, simplex interpositio puncti

potius multiplicationem significat, itaque $20.30=00.10$ apud me non est rationem 20 ad 30 eandem esse vel aequalem rationi 00 ad 10, sed potius factum ex 20 in 30 aequari facto ex 00 in 10. Quodsi peculiare quoddam signum multiplicationis, quale quibusdam est $\times$, hic adhibere vellem, occurreret nimis crebro, ut taceam affinitatem cum litera x. Commate autem aut parenthesi interdum evitare malo lineam superducendam aut subducendam, verb. gr. $00.11+21.30, :20$ vel $(00.11+21.30) :20$ mihi idem est quod alias $\frac{00.11+21.30}{20}$ vel $\overline{00.11+21.30}:20$. Sed haec attuli, non ut aliis formam calculandi praescriberem, sed ut mei usus rationem redderem. Interea ipse saepe et linea superducta pro vinculo, et subducta subscriptoque nominatore pro divisione vel fractione utor, prout commoditas suadet.

Quodsi quis non tantum Canonem in exemplo repraesentari, sed etiam universaliter oculis subjici velit, huic ita satisfiet:

Sit Dividendus	$+10x^{e}+11x^{e-1}+12x^{e-2}$ etc.
Divisor	$-20x^{n}+21x^{n-1}+22x^{n-2}$ etc.
Provenientis	
Quotiens	$+30x^{e-n}+31x^{e-n-1}+32x^{e-n-2}$ etc.
Residuus	

$$\frac{3(e)+3(e-1)x+3(e-2)x^{2} \text{ etc. usque ad } 3(e-n+1)x^{n-1} \text{ inclusive}}{-20x^{n}+21x^{n-1}+22x^{n-2} \text{ etc.}}$$

ubi (e) vel $(e-1)$ etc. significat notam ultimam coefficientis, ut si e sit 8, uti in exemplo paule ante posito, 3(e) fiat 38, et $3(e-1)$ fiat 37, et ita porro. Idem erit mox in 1(e) id est 18, vel $1(e-1)$ id est 17. Et cum n in eodem exemplo fuerit 5, utique 2(n) erit 25 et $3(e-n)$ erit 33. His positis prodibit coefficientium quidem in quotiente valor qui paulo ante, quoniam e indefinita eum non ingreditur; sed in residuo coefficientium valor ita proveniet: $3(e) = 00.1(e) + 2(n).3(e-n), :00$ et $3(e-1) = 00.1(e-1) + 2(n-1).3(e-n) + 2(n).3(e-n-1), :00$ et $3(e-2) = 00.1(e-2) + 2(n-2).3(e-n) + 2(n-1).3(e-n-1) + 2(n).3(e-n-2), :00$, et ita porro pergendo usque ad $3(e-n+1)$ inclusive.

Ex eo autem quod pro coefficientibus quaesiti quotientis idem se dat valor, quicunque sit gradus dividendi aut divisoris, illud egregium consequimur, ut eadem opera possimus vel finitum exhibere quotientem cum suo residuo, vel neglecto residuo et continuata divisione in infinitum quotientem invenire in formula quidem

貴重書

rationali integra, sed in infinitum procurrente, id est per seriem infinitam, prorsus ut in communi calculo decimali, sed majore longe fructu pro analytico, quod serierum hic datur progressus facilis, qui non aeque in fractionibus decimalibus in promtu est; unde hic non tam appropinquationes quam veri valores, licet serie infinita expressi exhibentur.

Sed ut hoc melius obtineamus, inverso ordine incipiamus ab inferioribus terminis et ponamus Dividendum esse $10+11x+12x^2+13x^3+14x^4$ etc. et Divisorem esse $-20+21x+22x^2+$ etc., provenientem autem quotientem (neglecto vel dissimulato Residuo) esse $30+31x+32x^2+$ etc. Ducendo eum in divisorem fit

$$\begin{array}{llll} -20.30 & -20.31x & -20.32x^2 & -20.33x^3 \text{ etc.} \\ & +21.30 & +21.31 & +21.32 \\ & & +22.30 & +22.31 \\ & & & +23.30 \end{array}$$

quae formula coincidentianda est cum sequenti, posito 00 significare -1

$$-00.10-00.11x-00.12x^2-00.13x^3 \text{ etc.}$$

et patet eosdem qui prius pro 30, 31, 32, 33 etc. prodire valores. Hinc si poneremus 11, 12, 13, 14 etc., item 22, 23 etc. aequari nihilo, seu terminos quorum sunt coefficientes abesse, redibitur ad exemplum jam cognitum, seu 10 debet dividi per $-20+21x$, et 30 erit $00.10:20$, et $31=21.30:20$ seu $00.10.21:20^2$, et $32=21.31:20$ seu $00.10.21^2:20^3$, et $33=21.32:20$ seu $00.10.21^3:20^4$. Hinc si sit $20=-a$ et $21=1$ et $10=1$, perinde est ac si 1 dividi debeat per $a+x$, et pro 00 ponendo -1 fiet $30=+1:a$ et $31=-1:a^2$ et $32=+1:a^3$ et $34=-1:a^4$ et ita porro, seu $\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}x+\frac{1}{a^3}x^2-\frac{1}{a}x^3$ etc., quod aliunde quidem constabat dudum, sed adductum tamen est, ut Methodi successus appareret. Quam vero alia innumera, et quam facile ita obtineantur, patet. Illudque palmarium est, hinc consequi ut eadem ratione vel verum provenientem integrum, quoties datur, aut quotientem finitum cum residuo, si placet, vel sine residuo per seriem infinitam, si malimus, eruamus.

Si quis tamen postremo velit, valores quaesitorum 31, 32, 33 etc. non exprimi per valores quaesitorum praecedentium jam inventos (nempe 31 per 30, et 32 per 30, 31, et 33 per 30, 31, 32 etc.) sed per initio datos solos, nempe per 10, 11, 12, 13 etc. et

20, 21, 22, 23 etc. (cujus indagatio est multo implicatior, res tamen ipsa maxime absoluta), id quoque per combinandi artem consequemur hoc modo. Sit

Dividendus	$+10+11x+12x^2+13x^3+14x^4$ etc.
Divisor	$-20+21x+22x^2+23x^3+24x^4$ etc.
Proveniens Quotiens	$+30+31x+32x^2+33x^3+34x^4$ etc.

erit

$$-30=10:20 \qquad -31=10.21+11.20,:20^2$$

$$\left.\begin{array}{lll} -32=10.20.22 & +11.20.21 & +12.20^2 \\ \quad 10\ \ 21^2 & & \end{array}\right\}:20^3$$

$$\left.\begin{array}{ll} -33=10.20^2.23 & +11.20^2.22+12.20^2.21+13.20^3 \\ \quad (2)\ 10.20.21.22 & 11.20.21^2 \\ \quad 10\ \ 21^3 & \end{array}\right\}:20^4$$

$$\left.\begin{array}{llll} -34=10.20^3.24 & +11.20^3.23 & +12.20^3.22+13.20^3.21+14.20^4 \\ \quad (2)\ 10.20^2.21.23 & (2)\ 11.20^2\ 21.22 & 12.20^2.21 \\ \quad 10.20^2.22^2 & 11.\ \ 21^3 & \\ \quad (3)\ 10.20.21^2.22 & & \end{array}\right\}:20^5$$

et ita porro, ea servata lege combinationis, ut in unum addantur omnia membra possibilia, quorum gradus formalis seu numerus coefficientium ab initio datorum pro membro constituendo invicem ducendorum unitate vincat gradum virtualem coefficientis quaesiti cujus valorem constituunt, et quorum gradus virtualis (summa notarum ultimarum indicatus) gradui virtuali dicti coefficientis quaesiti aequetur, sed ita ut una sola quantitas ex invicem ducendis in membro sit coefficiens dividendi, reliquae vero sint coefficientes divisoris. Sic membrum quodlibet in valore ipsius 33 constat ex quantitatibus $3+1$ invicem ductis, ex quibus una est ex dividendo, tres ex dividente, et summa notarum ultimarum ex omnibus est 3, verbi gratia 12.20 20.21 habet 12 ex dividendo, 20. 20. 21 ex divisore, et $2+0+0+1$ est 3. Notatu etiam dignum est, in uniuscujusque quaesiti, exempli gratia in ipsius 32 valore numeratorem constare ex duabus partibus, una nova, quae continet primum coefficientem dividendi (nempe $10.20.22+10.21.21$), altera formata ex numeratore qui est in valore quaesiti proxime praecedentis (veluti 31), tantum pro 10, 11, 12, 13 etc. respective ponendo 11, 12, 13, 14 etc. (ita ex ipsius numeratore in valore ipsius 31, qui est $10.21+11.20$, fit $11.21+12.20$).

Quodsi in divisore dato sit $20=0$ (vel aeque 20 et 21 sit

貴重書

$=0$, vel aeque 20 et 21 et 22, et ita porro), tantum concipiendum est ac si fuisset divisor $-21+22x^2+23x^3$ etc. (vel $-22x^2+23x^3+24x^4$ etc. vel $-23x^3+24x^4+25x^5$ etc. et ita porro). Deinde proveniens idem erit qui supra, tantum pro 20, 21, 22, 23, 24 etc. respective ponendo 21, 22, 23, 24, 25 etc. (vel 22, 23, 24, 25, 26, vel 23, 24, 25, 26, 27, et ita porro) et totum deinde dividendo per x (vel per x^2, vel per x^3, et ita porro). Idque locum habet, sive valoribus ipsorum 31, 32, 33, 34 etc. utamur contractis prius positis, ubi 31 reperitur ex jam reperto 30, et 32 ex jam repertis 31 et 30, et 33 ex jam repertis 32, 31, 30, et ita porro, sive valoribus eorum utamur explicatis seu per solas initio datas quantitates 10, 11, 12 et 20, 21, 22 etc.

Ut coefficientium etiam Residui valores explicati inveniantur, commodum erit redire ad exemplum superius. Sit

$$\begin{array}{ll}
\text{Dividendus} & +10x^8+11x^7+12x^6+13x^5+14x^4+15x^3+16x^2+17x+18 \\
\text{Divisor} & -20x^5+21x^4+22x^3+23x^2+24x+25 \\
\text{Quotiens} & +30x^3+31x^2+32x+33 \\
\text{Residuus} & \dfrac{+34x^4+35x^3+36x^2+37x+38}{-20x^5+22x^4+22x^3+23x^2+24x+25}
\end{array}$$

et fient valores coefficientium Quotientis, nempe 30, 31, 32, 33 etc. eodem modo expressi ut ante, nempe -30 erit $10:20$, et -31 erit $10.21+11.20,:20^2$, et ita porro, ut proxime in alia licet hypothesi, cum iidem coefficientes infimis qui nunc summis potestatibus ascripti essent. Valores autem coefficientium in Residuo et ipsi fient iidem, perinde ac si coefficientes in Residuo essent continuati coefficientes in Quotiente, hoc uno tantum excepto, quod ubique pro 20 quod poneretur in Quotiente, ponitur in Residuo 00, id est -1. Itaque in praesenti exemplo valores sic stabunt:

$$-30=10:20 \qquad -31=10.21+11.20,:20^2$$

$$-32=\left.\begin{array}{l} 10.20.22+11.20.21+12.20^2 \\ 10.21^2 \end{array}\right\}:20^3$$

$$-33=\left.\begin{array}{l} 10.20^2.23+11.20^2.22+12.20^2.21+13.20^3 \\ (2)\,10.20.21.22 \quad 11.20.21^2 \\ 10.21^3 \end{array}\right\}:20^4$$

$$-34=\left.\begin{array}{l} 10.00^3.24+11.00^3.23+12.00^3.22+13.00^3.21+14.00^4 \\ (2)\,10.00^2.21.23 \quad (2)\,11.00^2.21.22 \quad 12.00^2.21^2 \\ 10.00^2.22^2 \\ (3)\,10.00.21^2.22 \end{array}\right\}:20^5$$

vel pro 00 ponendo -1

$$\begin{array}{llll}
+34=- & 10.24 & -\ 11.23 & -12.22-13.21+14 \\
+(2) & 10.21.23 & +(2)\,11.21.22+12.21^2 & \\
 & 10.22^2 & & \\
-(3) & 10.21^2.22 & &
\end{array}$$

et ita porro eadem lege servata explicate habebuntur -35, -36, -37, -38 vel (loco 20 ponendo 00 sive -1) $+35$, -36, $+37$, -38. Tantum adhuc opus est, ut in valoribus istis explicatis ipsorum 30, 31, 32, 33, 34 etc. pro quotiente aut residuo, aut uno verbo pro proveniente divisionis adhibitorum occurrentes Numeri veri (quos unitate excepta ut melius a fictitiis seu supposititiis assumtis distingueremus, parenthesi inclusimus, ut (2), (3) etc.) determinentur. Id cum non paulo sit prioribus difficilius, ita consecuti tamen sumus: Membrum propositum sit $f^m g^n h^r k^s$, per f, g, h, k intelligendo aliquos ex coefficientibus divisoris, nempe ex 21, 22, 23, 24 etc. neglectis cofficientibus dividendi, nempe 10, 11, 12 etc. quae in membro occurrunt, neglectis etiam 20 vel 00. His positis exponantur fractiones sequentes, et ex iis numerus verus praefigendus membro, si solum adsit m, erit unitas; sin adsit m et n, erit fractio prima; m et n et r, factum ex prima et secunda; si adsit m, n, r, s, factum ex fractione prima, secunda et tertia, et ita porro

$$\frac{m+1,\ m+2 \text{ etc. usque ad } m+n}{1.2.3 \text{ etc. usque ad } n},$$

$$\frac{m+n+1,\ m+n+2 \text{ etc. usque ad } m+n+r}{1.2.3 \text{ etc. usque ad } r},$$

$$\frac{m+n+r+1,\ m+n+r+2, \text{ etc. usque ad } m+n+r+s}{1.2.3 \text{ etc. usque ad } s.}$$

In exemplum sit membrum 10.20.21.22, rejectis 10 et 20, restant 21.22, et m est 1, itemque n est 1; sed r, s etc. absunt; itaque sufficit prima fractio $\dfrac{m+1,\ m+2, \text{ etc. usque ad } m+n}{1.2.3 \text{ etc. usque ad } n}$, id est hoc loco $\dfrac{1+1}{1}=2$. Sic si membrum sit $10.20^2.21.23$ vel $10.00^2.21.23$, rejectis 10 et 20 vel 00, restat $21^1.23^1$, et m est 1 et n est 1, et prodit quod ante, nempe 2. Sin membrum sit $10.20.21^2.22$ vel $10.00.21^2.22$, tunc rejectis rejiciendis fit $21^2.22$, et m est 2, et n est 1, et ex prima fractione (qua sola opus) fit $\dfrac{2+1}{1}=3$.

Post multiplicationem et divisionem sequuntur Potentiae et Radices. Et quidem si potentias habeamus generaliter, eadem opera nanciscemur et radices; nam radix est velut potentia cujus exponens est numerus fractus. Ut autem multiplicationes coepimus a simplicibus polynomiis velut $a+b+c$ etc. et postea perreximus ad formulas velut $a+by+cy^2$ etc., ita nunc in potentiis quoque faciemus. Cum olim considerarem, binomii $a+b$ potestates jam haberi per numeros combinatorios, cogitavi quomodo res ad trinomia, quadrinomia etc., denique generaliter ad polynomia quaecunque produci posset. Ita quadratum ab $a+b$ est $a^2+2ab+b^2$, et cubus ab eodem est $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, et biquadratum est $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, et ita porro. Ita numeri prodeunt 1,1 et 1,2,1 et 1,3,3,1 et 1,4,6,4,1 etc., qui sunt numeri combinatorii Exponentis, ut constat, nam 1 est quatuor rerum nullio, 4 sunt quatuor rerum 1niones, 6 sunt quatuor rerum 2niones, 4 sunt quatuor rerum 3niones, 1 est quatuor rerum 4nio, et coincidunt cum illis numeris qui dici solent figurati. Sed incipiendum est ab Unitatibus et Naturalibus, inde pergendum ad Triangulares, Pyramidales, Bitriangulares, Pyramido-triangulares, Bipyramidales etc. Tabula rem subjicit:

	0. Unitates	1. Naturales	2. Triangulares	3. Pyramidales	4. Bitriangulares	5. Triangulo-pyramidales	6. Bipyramidales	
Nullius	1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	etc.
Unius	1 .	2 .	3 .	4 .	5 .	6 .	7 .	etc.
Duarum	1 .	3 .	6 .	10 .	15 .	21 .	28 .	etc.
Trium	1 .	4 .	10 .	20 .	35 .	56 .	84 .	etc.
Quatuor	1 .	5 .	15 .	35 .	70 .	126 .	210 .	etc.
Quinque	1 .	6 .	21 .	56 .	126 .	252 .	462 .	etc.
Sex	1 .	7 .	28 .	84 .	210 .	462 .	924 .	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	
Rerum	Nulliones	Uniones	Biniones	Terniones	Quaterniones	Quiniones	Seniones	

Modus autem construendi hos numeros duplex est, unus per continuam additionem: nam ex unitatibus inde ab initio sumtis conflantur naturales, ex naturalibus triangulares, ex triangularibus pyramidales, et ita porro; alter per continuam multiplicationem, et hic cum sit a Tabula independens, a Fermatio, Pascalio et aliis jam traditus ita habet, sed quem ad unam expressionem pro omnibus ita redegi: Sit Exponens combinationis e. ita ut pro nullionibus, 1nionibus, 2nionibus, ternionibus etc. e sit respective 0, 1, 2, 3 etc., dico combinationem secundum e seu enionem fore

$$\frac{e, e-1, e-2, e-3, e-4, \text{ etc. usque ad } e-(e-1) \text{ seu usque ad } 1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, \text{ etc. usque ad } e}$$

hinc per singulas eundo

$$1\text{nio} = \frac{e}{1} \qquad 2\text{nio} = \frac{e, e-1}{1.2} \qquad 3\text{nio} = \frac{e, e-1, e-2}{1.2.3} \text{ etc.}$$

Est igitur combinatio (enio) productus numerorum inde ab e exponente combinationis descendendo, divisus per productum totidem numerorum inde ab unitate ascendendo, ita ut ascensus finiatur in e, descensus in 1, alter in principio alterius.

In his autem numeris, ut obiter dicam, ad instar Trianguli Arithmetici quod dedit Blasius Pascalius, vir ingeniosissimus, observavi Triangulum Harmonicum. Nempe ut in Triangulo Pascaliano basin dant Arithmetici, ita in meo basin dant Harmonici.

Triangulum Arithmeticum.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Triangulum Harmonicum.

$$\frac{1}{1}$$
$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{1}$$
$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1}$$
$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{1}$$
$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{1}$$
$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{1}$$
$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{1}$$

Nempe ut basis in Triangulo Arithmetico sunt naturales seu numeri progressionis Arithmeticae 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc., ita basis in Triangulo Harmonico sunt reciproci naturalium, qui sunt progressionis Harmonicae, scilicet $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ etc. Hi enim sunt reciproce ut naturales, verb. gr. $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{5}$ ut 5 ad 2. Et ita generaliter numeri trianguli Harmonici sunt reciproci numerorum trianguli Arithmetici. Dico, ut summam naturalium dant triangulares, et summam triangularium dant pyramidales, et ita porro, ita contra reciprocos naturalium seu harmonicos dare summam reciprocorum triangularium, et reciprocos triangularium dare summam reciprocorum pyramidalium, et ita porro:

1	1	1	1	1
2	3	4	5	6
3	6	10	15	21
4	10	20	35	56
5	15	35	70	126
6	21	56	126	252
Numeri	Summae	Summae Summarum	Summae Tertiae	Summae quartae
	Numeri	Summae	Summae Summarum	Summae tertiae
		Numeri	Summae	Summae Summarum
			Numeri	Summae

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{56}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{1}{126}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{126}$	$\frac{1}{252}$
Summae quartae divis. per $\frac{5}{1}$	Summae tertiae divis. per $\frac{5}{2}$	Summae Summarum divis. per $\frac{5}{3}$	Summae divis. per $\frac{5}{4}$	Numeri
Summae tertiae divis. per $\frac{4}{1}$	Summae Summarum divis. per $\frac{4}{2}$	Summae divis. per $\frac{4}{3}$	Numeri	
Summae Summarum divis. per $\frac{3}{1}$	Summae divis. per $\frac{3}{2}$	Numeri		
Summae divis. per $\frac{2}{1}$	Numeri			

Summae autem, ut constat, exhibentur pro Numeris quidem trianguli Arithmetici hoc modo: Quaeritur summa numerorum in columna quadam inde ab initio usque ad terminum datum ultimum inclusive, numerus columnae proxime sequentis, termino dato respondens, erit summa quaesita. Ita omnes naturales ab initio ad 6 sunt 21, omnes triangulares ab initio ad 21 sunt 56, et omnes pyramidales ab 1 ad 56 sunt 126. Et ita porro. Sin summam columnae ab aliquo termino usque ad alium velis, ut in columna triangularium a 6 ad 21, sumenda est differentia inter terminum columnae sequentis ultimo summandorum respondentem et terminum ejusdem columnae sequentis primum summandorum antecedentem seu $56-4=6+10+15+21$.

At pro numeris trianguli Harmonici summandis contrariae insistendum est viae. Nam Summae columnae sequentis continentur in antecedente, et praeterea summantur in antecedente termini omnes columnae, non ab initio sumti, sed sumti a fine, id est infiniti. Illud tamen interest quod columna continet summas sequentis non simplicite, sed constanti numero multiplicatas. Nempe

columna reciprocorum a	continet summas	reciprocorum a	divisas per
naturalibus		triangularibus	$\frac{2}{1}$
triangularibus		pyramidalibus	$\frac{3}{2}$
pyramidalibus		bitriangularibus	$\frac{4}{3}$

Itaque si velis summam columnae in triangulo harmonico decrescentis in infinitum seu usque ad 0 inde ab aliquo termino, sume terminum columnae praecedentis respondentem primo termino summandorum, eumque

si sit in columna	1	2	3	4	etc.
multiplica per	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	etc.

et habebis quaesitum. Sic si velis summare columnam secundam ab 1 in infinitum, erit terminus primus 1, cui in columna praecedente respondet 1, qui multiplicatus per $\frac{2}{1}$ dat $\frac{2}{1}$ summam quaesitam. Itaque

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} \text{ etc. infinitum} = \frac{1}{0} \text{ infinito}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15} \text{ etc.} = \frac{1}{1}\cdot\frac{2}{1} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15} \text{ etc.} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15} \text{ etc.} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}$$

etc.