simul esse quadratos impossibile est, alioqui quatuor y, $x-y$, x, $x+y$ simul essent quadrati. Ergo impossibile est xy et x^2-y^2 hoc loco esse aequales.

Propositio VIII. Area Trianguli Rectanguli primitivi in numeris integris quadratus esse non potest.

In Triangulo rectangulo primitivo, quale dixi, duo latera circa rectum nullam habent communem mensuram (quia per prop. 3. tunc etiam tertium haberet communem mensuram, atque ita non foret triangulum primitivum). Ergo etiam latus unum et alterius dimidium multo magis nullam communem mensuram habebunt (nam si dimidium latus A dividi potest per divisorem seu mensuram lateris B, multo magis ipsum latus A per eum dividi poterit). Jam ex latere uno circa rectum in alterius dimidium ducto fit area Trianguli, ergo area trianguli fit ex duobus numeris, nullam mensuram communem habentibus. Duo autem isti numeri non sunt aequales per prop. 7. nec ambo quadrati per prop. 6, ergo factus ex ipsis non est quadratus per prop. 4; sed factus ex ipsis est area trianguli, ergo ea non est quadratus. Q. E. D.

Propositio IX. Nullius omnino Trianguli rectanguli in numeris integris vel fractis area quadratus esse potest.

Non in integris primitivis per prop. 9; ergo nec in aliis integris vel fractis per prop. 2. Q. E. D.

Corollaria.

Primo. Cubus latere multatus non aequatur quadrato.

Nam x^3y-xy^3 seu area Trianguli Rectanguli in numeris non aequatur quadrato per prop. 9, sed si y aequalis unitati, erit area cubus latere multatus.

Secundo. Tres numeri continui in se invicem ducti non producunt quadratum.

Nam $x-1$, x, $x+1$ producunt x^3-x, qui per coroll. prim. non est quadratus.

Tertio. Differentia duorum quadrato-quadratorum non potest esse quadratus.

Alioqui enim aliquando x^2-y^2 et xy in se invicem possent facere quadratum, posito scilicet tam x quam y esse quadratos, tunc enim xy foret quadratus, ergo si x^2-y^2 etiam quadratus, productum quoque ex xy in x^2-y^2 foret quadratus, quod fieri non potest, quia hoc productum trianguli rectanguli area est. Jam si x et y sunt numeri quadrati, verbi gratia x aequ. ν^2 et y aequ. ω^2, fiet loco x^2-y^2 quantitas $\nu^4-\omega^4$, quae proinde quadrato aequari non potest.

Quarto. Differentia duarum fractionum sibi ipsis reciprocarum, seu differentia duorum numerorum qui in se invicem ducti faciunt unitatem, non est quadratus.

Nam x^3y-xy^3 aequ. $x^2y^2z^2$ est aequatio impossibilis, quia area trianguli aequaret quadrato. Ergo aequatio x^2-y^2 aequ. xyz^2 seu $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$ aequ. z^2 est etiam impossibilis*).

XII.

MEDITATIO JURIDICO-MATHEMATICA DE INTERUSURIO SIMPLICE.

Interusurium sive resegmentum anticipationis, vulgo Germ. Rabat, est differentia inter pecuniam in diem certum debitam et praesentem ejus valorem, seu quanto plus petat, qui plus tempore petit, vel quanto minus solvere aequum sit eum, qui post aliquot annos demum debiturus nunc solvit. Hujus quantitas, quae apud Jurisconsultos passim non satis, et apud aliquos non satis recte explicatur, accurato calculo definire potest, duabus suppositionibus ex jure assumtis. Nimirum

1. SUPPOSITIO PRIMA est, quod is, a quo pecunia ante tempus, quo deberi incipit, petitur, vicissim petere potest, ut sibi eo nomine, quovis anno

*) Am Rande des Manuscripts hat Leibniz bemerkt: x^3y-xy^3 aequ. y^2z^2 impossibilis, ergo x^3 aequ. xy^2+yz^2 impossibilis in numeris, ergo aequatio cubica x^3-y^2x aequ. yz^2 est indeprimibilis. Ecce usum harum numericarum contemplationum in reducendis aequationibus.

futuro medii temporis, praestetur legitima usura. Exempli causa: post decem annos proximos finitos mihi centum debebis (de quibus interim nullas debes usuras, alioqui sortem jam nunc deberes); ego, qui forte negotium aliquod utile, sed paratae pecuniae indigum gesturus sum, peto et a te obtineo, ut nunc solvas; tu vicissim petere potes, ut eo nomine tibi quovis anno totius decennii proximi finito solvam quinque: nec refert, utrum pecunia, quae ante tempus solvitur, sors sit an usura. Omnis enim usura soluta fit sors; imo cum usurarum petitio per se odiosa sit, magis odiosa erit usurarum petitio ante tempus, et qui nihil eo nomine praestare volet, incidet in quandam usurariam pravitatem: revera enim plus usurae nomine exiget, quam legibus permissum est, quia tempore quoque plus petitur. Itaque usurae exactae ob usuras ante tempus praestitas, quae sortis naturam induere, non nisi vocabulum commune habent cum usuris usurarum non solutarum, quae legibus prohibentur, et tantum abest negotium in vetitum Anatocismum incidere, ut secus fieri regulariter in leges peccatum videatur; regulariter, inquam, nam exceptiones ex natura negotii personarumque sumi possunt (de quibus alias), quae judicis arbitrio permittuntur. Nobis autem in calculo ineundo inspiciendum videtur, quod regulare exactumque est.

II. SUPPOSITIO SECUNDA est ex jure notissimo petita, quod compensatio est quaedam solutio, et qui a pecunia, quam accipit, summam certam sibi detrahi patitur, eam ipsam summam eo ipso tempore solvisse censetur.

III. His adjungo POSTULATUM, quod creditor ac debitor in diem futurum certum de pecuncia nondum caedua nunc statim inter se contrahere possint velintque, ita ut totum negotium simul ac semel inter ipsos (et quidem sine alterutrius laesione) finiatur. Itaque creditor, qui centum post decennium debita nunc anticipat, eoque nomine quovis anno decennii proxime futuri deberet quinque solvere, ut ea molestia se debitoremque liberet totumque negotium finiat, potest pati, ut sibi nunc statim de ipsis centum detrahatur aliquid usurarum futurarum nomine, et quidem non integra 50 seu decies quinque, nondum enim caedua sunt seu nondum dies eorum venit, sed paulo minus aliquid. Proinde minus quam centum accipiet, et quod detrahi sibi patitur, ipsissimum est interusurium nunc determinandum.

IV. Ex his jam ducetur CONCLUSIO PRIMA: Si usura legitima sit vicesima sortis, valor praesens unitatis post annum debitae erit: $\frac{1}{1} - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000} + \frac{1}{3200000}$ etc. in infinitum, sive generalius, loco 20 assumendo numerum quemcunque ν, qui quotam usurariam exprimat, $\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\nu^3} + \frac{1}{\nu^4} - \frac{1}{\nu^5}$ etc. Demonstratio simul et explicatio: Statim post annum finitum mihi debebis unitatem seu 1) (ex facto), unum verbi gratia aureum, aut unam decadem aureorum, vel unum centenarium etc. Hanc unitatem sive sortem, si mihi nunc solvas, ejus nomine tibi usuram post annum finitum debebo, nempe vicesimam unitatis seu $\frac{1}{20}$ (per suppositionem artic. 1); quoniam vero placuit, ut negotiam inter nos nunc statim finiatur (per postulatum artic. 3), ideo tu vicissim postulas, ut ego tibi hanc summam $\frac{1}{20}$ nunc solvam anticipando. Solutio autem haec fieri potest per compensationem, si tantundem mihi detrahi patiar de summa, quam a te accipere debeo (per supposit. artic. 2), accipio ergo 1 minus $\frac{1}{20}$ seu $1 - \frac{1}{20}$. Sed quia ita ut quoque summam $\frac{1}{20}$ post annum demum caeduam nunc accepisti, eo nomine et tu mihi post annum finitum debebis usuram (per artic. 1), nempe vicesimam de $\frac{1}{20}$, hoc est $\frac{1}{400}$ Et cum negotium statim inter nos sit finiendum (per artic. 3), ea mihi nunc statim dabis praeter summam praecedentem, quae erat $1 - \frac{1}{20}$; dabis ergo mihi nunc $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400}$. Verum ita mihi quoque istam summam $\frac{1}{400}$ post annum demum caeduam nunc statim anticipando dedisti, itaque eo nomine vicissim tibi post annum finitum debebo usuram (per artic. 1), nempe vicesimam de $\frac{1}{400}$, hoc est $\frac{1}{8000}$; et cum negotium statim inter nos sit finiendum (artic. 3), hanc usuram anticipando statim nunc tibi salvam, salva rursus anticipationis consideratione. Solvere autem potero per compensationem (artic. 2) seu statim $\frac{1}{8000}$ a te detrahi patiar de summa praecedente, quam mihi solvere debes, quae erat $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400}$, itaque solves mihi $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000}$. Et sic in infinitum calculum continuatum fingendo semperque anticipando (ut negotium statim finiatur) nulliusque anticipationis resegmentum negligendo (ut neuter laedatur), patet te mihi solvere nunc debere summam seriei infinitae praedictae, cujus termini sunt progressionis Geometricae subvigecuplae, semper enim sequens est vigesima pars proxime antecedentis. Signa autem $+$ et $-$ alternantur.

V. LEMMA ex calculo infinitorum: Fractio $\frac{\nu}{\nu+1}$ est aequalis toti seriei infinitae $\frac{1}{1}-\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{\nu^3}+\frac{1}{\nu^4}-\frac{1}{\nu^5}$ etc. Demonstratio simul et explicatio: Posito ν esse 20, ostendendum est fractionem $\frac{20}{21}$ idem esse quod infinita series $\frac{1}{1}-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{160000}-\frac{1}{3200000}$ etc. Nimirum fractio $\frac{20}{21}$ multiplicata per 21 dat 20, ut patet; et series ista infinita, multiplicata per 21 dat etiam 20, ut mox ostendetur. Jam quorum aequi-multipla sunt aequalia, ea ipsamet sunt aequalia; aequatur ergo fractio et series. Superest tantum ut ostendatur, seriem multiplicatam per 21 seu per $20+1$ dare 20. Operatio ita stabit:

Multiplicetur per	$+1-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{160000}-\frac{1}{3200000}$ etc. 20
fiet ☉	$20-1+\frac{1}{20}-\frac{1}{400}+\frac{1}{8000}-\frac{1}{160000}$ etc.
Multiplicetur per	$+1-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{160000}$ etc. 1
fiet ☽	$+1-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{160000}$ etc.
Ergo ☉ + ☽ aequalia	20 * * * *

VI. CONCLUSIO SECUNDA: Valor praesens unitatis seu sortis post annum debitae est $\frac{\nu}{\nu+1}$, posito ν esse numerum, quotam usurariam exprimentem, seu si ν sit 20, hoc est si usurae sint quincunces sive vigesima sortis, erit $\frac{20}{21}$ seu subsesquivigecupla sortis sive $\frac{100}{105}$ de sorte. Nam valor ille praesens est $1-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}$ etc. (per artic. 4), id est (per artic. 5) $\frac{20}{21}$ seu $\frac{100}{105}$, quod probandum erat. Si vero usurae essent 6 in 100, tunc numerus valeret $\frac{100}{6}$ seu $\frac{50}{3}$, et valor praesens sortis foret $\frac{100}{106}$ seu $\frac{50}{53}$ de sorte. Eadem conclusio adhuc alia ratione inveniri et demonstrari potest sine serie infinitorum hoc modo: Post annum debebis mihi summam S; quaeritur quantum mihi solvi aequum sit nunc, ut res eodem recidat. Ponamus te mihi solvere nunc debere Y; itaque debet summa Y esse talis, ut anno finito usura cum sorte aequetur ei, quod mihi debes. Nam dedisti mihi Y nunc indebita, ergo debeo tibi X, et anno finito debebo tibi Y una cum

vicesima ipsius Y seu $Y+\frac{1}{20}Y$, quae si aequentur ipsi S summae, quam post annum mihi debes, compensatione facta, debitum tunc ipso jure mutuo tolletur per artic. 2, et negotium initum inter nos finitum intelligi potest, quod desideratur artic. 3. Quoniam ergo $Y+\frac{1}{20}Y=S$, erit $Y=\frac{S}{1+\frac{1}{20}}$ seu erit $Y=\frac{20}{21}$ de S, ut supra. Nam si $\frac{20}{21}$ nunc indebite solvas, post annum inde usuras debebo $\frac{1}{21}$; ergo post annum in summa tibi debebo $\frac{20}{21}+\frac{1}{21}$ seu $\frac{21}{21}$ sive 1. Sed post annum tu quoque mihi debebis 1, unitatem nempe sive sortem; ergo compensatione facta apparet, si pro 1 tunc debendis nunc solvas $\frac{20}{21}$, neutrum alteri quicquam amplius debiturum. Licet autem haec via in hoc casu sit facilior priore, tamen priorem magni momenti esse judico, quia exemplum praebet Analyseos memorabilis, ab Algebra in eo diversae, quod Algebra, ut in posteriore via patet, assumit quantitatem incognitam tanquam cognitam, et inde regrediens eamque cum cognitis aequans, valorem ejus quaerit, prior vero Analysis per meras cognitas procedens valorem incognitum directe obtinet. Quod magnum usum habet, quando impossibile est obtineri valorem incognitae rationalem per Algebram, tunc enim ea nihilominus hac via obtineri potest per seriem infinitam.

VII. CONCLUSIO TERTIA. Iisdem positis valor praesens unitatis seu sortis post biennium debitae est $\frac{1}{1}-\frac{2}{\nu}+\frac{3}{\nu^2}-\frac{4}{\nu^3}+\frac{5}{\nu^4}-\frac{6}{\nu^6}$ etc. Demonstratio. Debebis mihi 1 biennio abhinc: quod si mihi nunc solvas 1 anticipando, inde tibi debebo usurae nomine post annum $\frac{1}{20}$, post biennium rursus $\frac{1}{20}$ in summa $\frac{2}{20}$; quae si statim mihi detrahas per artic. 1, dabis mihi tantum $1-\frac{2}{20}$. Sed quia hoc modo tu quoque priora $\frac{1}{20}$ uno anno, nempe primo, et posteriora $\frac{1}{20}$ duobus, nempe primo et secundo anticipasti; ideo usuram mihi post annum primum tam ob priora, quam ob posteriora $\frac{1}{20}$ primo anno anticipata debebis, nempe bis $\frac{1}{400}$ seu $\frac{2}{400}$, et post annum secundum ob posteriora $\frac{1}{20}$ secundo anno anticipata debebis mihi $\frac{1}{400}$; ergo summa $\frac{3}{400}$, quae si rursus anticipando mihi solvas, dabis mihi $\frac{1}{1}-\frac{2}{20}+\frac{3}{400}$. Sed jam ita ego rursus priora $\frac{1}{400}$ anticipavi anno primo, posteriora vero $\frac{1}{400}$ anno primo et secundo: unde usuram tibi debebo, quae anno primo finito de prioribus $\frac{2}{400}$ erit $\frac{2}{8000}$, de posterioribus $\frac{1}{400}$ erit $\frac{1}{8000}$, summa $\frac{3}{8000}$; anno secundo vero de posterioribus $\frac{1}{400}$ usura erit $\frac{1}{8000}$, et summa usurarum anni primi et secundi $\frac{4}{8000}$, quam si rursus anticipando mihi detrahi patiar, dabis mihi tantum $1-\frac{2}{20}+\frac{3}{400}-\frac{4}{8000}$. Sed jam ita tu priora $\frac{3}{8000}$ rursus anticipasti anno primo, posteriora $\frac{1}{8000}$ anno primo et secundo, unde usuram mihi debebis, quae anno primo de prioribus $\frac{3}{8000}$ est $\frac{3}{160000}$, de posterioribus $\frac{1}{8000}$ est $\frac{1}{160000}$, summa $\frac{4}{160000}$; anno secundo de posterioribus $\frac{1}{8000}$ est rursus $\frac{1}{160000}$, summaque usurarum anni primi et secundi $\frac{5}{160000}$, quam si mihi statim solvas anticipando (salvo in continuatione calculi anticipationis resegmento) dabis mihi $1-\frac{2}{20}+\frac{3}{400}-\frac{4}{8000}+\frac{5}{160000}$. Et ita calculum in infinitum continuatum fingendo, prodibit series infinita, quam posuimus.

VIII. CONCLUSIO QUARTA. Pro triennio iisdem manentibus Nominatoribus et signis, Numeratores erunt numeri triangulares, pro quadriennio Pyramidales, pro quinquennio triangulo-triangulares, et ita porro pro pluribus annis altiores numeri, quos figuratos vocant, ego ob usum combinatorios appellare soleo, in infinitum. Hoc cum ad eundem modum ostendi possit, quo praecedentem conclusionem demonstravimus, prolixe hic deducere supersedeo. Numeri ipsi tales sunt:

Numeri figurati seu Combinatorii	Valor praesens sortis debitae	post ann.
Unit. 1. 1. 1. 1. 1.	$\frac{1}{1}-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{160000}$ etc $=\frac{20}{21}$	1
Natural. 1. 2. 3. 4. 5	$\frac{1}{1}-\frac{2}{20}+\frac{3}{400}-\frac{4}{8000}+\frac{5}{160000}$ etc. $=\frac{400}{441}$	2
Triang. 1. 3. 6. 10. 15.	$\frac{1}{1}-\frac{3}{20}+\frac{6}{400}-\frac{10}{8000}+\frac{15}{160000}$ etc. $=\frac{8000}{9261}$	3
Pyram. 1. 4. 10. 20. 35.	$\frac{1}{1}-\frac{4}{20}+\frac{10}{400}-\frac{20}{8000}+\frac{35}{160000}$ etc. $=\frac{160000}{194481}$	4
Triang.-Triang. 1. 5. 15. 35. 70.	$\frac{1}{5}-\frac{5}{20}+\frac{15}{400}-\frac{35}{8000}+\frac{70}{160000}$ etc. $=\frac{3200000}{4084101}$	5
etc.	etc.	etc.

IX. Ad inveniendos adhuc aliter hos valores praesentes assumo LEMMA: Valor praesens valoris futuri est valor praesens ipsius summae. Exempli causa, sub finem anni 1685 seu post biennium debebis mihi aliquam summam; vellem nosse quis nunc sub finem anni 1683 ejus summae sit valor praesens. Itaque primum quaero, quis summae post biennium seu sub finem anni 1685 caeduae futurus sit valor post annum seu sub finem anni 1684; is utique erit $\frac{20}{21}$ de summa (per artic. 6), quia unus tantum annus intercedit. Itaque si post biennium mihi debeas unitatem, perinde est quantum ad hunc calculum ac si post an-

num mihi debeas $\frac{20}{21}$. Sed rursus, si post annum mihi debes $\frac{20}{21}$, perinde est (iterum per artic. 6) ac si mihi deberes nunc $\frac{20}{21}$ de illa summa $\frac{20}{21}$, hoc est $\frac{400}{441}$. Itaque si post biennium mihi debes aliquid, valor praesens erit $\frac{400}{441}$ de illo, seu quadratum numeri $\frac{20}{21}$ acceptum de illa summa tanquam unitate. Et eodem modo apparebit, valorem praesentem unitatis post triennium debitae esse $\frac{20}{21}$ de $\frac{20}{21}$ de $\frac{20}{21}$ seu cubum numeri $\frac{20}{21}$, id est $\frac{8000}{9261}$. Et ita porro. Atque hoc Lemma nihil aliud est, quam subsumtio illius axiomatis notissimi, quod aequalia uni tertio sunt aequalia inter se; nam $\frac{400}{441}$ nunc aequantur ipsis $\frac{20}{21}$ caeduis post annum, et haec aequantur unitati caeduae post biennium. Ergo et haec unitas aequatur ipsis $\frac{400}{441}$ caeduis nunc. Inde jam patet

X. CONCLUSIO QUINTA. Si numerus quotae usurariae sit ν (id est 20, positis usuris quincuncibus seu vigesima sortis), erit valor praesens summae post aliquot annos caeduae, ad ipsam summam, in ratione ν ad $\nu+1$ (id est subsesquivigecupla seu 20 ad 21) replicata secundum numerum annorum. Hoc est, summae caeduae post annum unum valor praesens erit simpliciter $\frac{20}{21}$ de summa, seu erit ad summam in ratione 20 ad 21. At valor praesens summae caeduae post duos annos erit $\frac{20}{21}$ de $\frac{20}{21}$ seu $\frac{400}{441}$ summae, seu erit ad summam in ratione duplicata 20 ad 21 seu ut 400 (quadratum de 20) ad 441 (quadratum de 21). Et valor praesens summae caeduae post triennium erit $\frac{20}{21}$ de $\frac{20}{21}$ de $\frac{20}{21}$ summae, seu $\frac{8000}{9261}$ summae, seu erit ad summam in ratione triplicata 20 ad 21, seu ut tertia dignitas sive cubus de 20 ad cubum de 21; et ita porro. Idque generaliter exprimendo, sit praesens valor Z, summa debita S, numerus annorum a, et quotae usurariae numerus ν; quibus positis, erit Z=S multiplic. per $\boxed{a}\,\frac{\nu}{\nu+1}$. Sit ν, 20 et S unitas, erit unitatis caeduae post annos

	unum,	duos,	tres,	quatuor,	quinque	etc.
valor praesens	$\frac{20}{21}$	$\frac{400}{441}$	$\frac{8000}{9261}$	$\frac{160000}{194481}$	$\frac{3200000}{4084101}$	etc.
id est	latus	quadratum	cubus	biquadratum	surdesolidum	etc.

qui numeri vel multiplicando, vel tantum eorum logarithmos addendo, continuari poterunt ad quotlibet annos, utileque erit fractiones decimaliter enuntiari. De usu horum in quibusdam juris quaestionibus apud egregios autores non satis recte definitis, aestimandisque reditibus ad vitam (ubi interusurio composito locus est) alio schediasmate disseremus.

Caeterum ut meditationis hujus usus sit in promptu, operae pretium, ipso praesertim Nobilissimo Autore invitante, facturos nos rati sumus, constructa Tabella, in qua (posita sorte 100000, et usura vicenaria), quantum pro quoque annorum (ad quadraginta usque) numero, deducto legitimo interusurio relinquatur, sive quanti sors anticipato aestimanda veniat, exponeretur; unde porro, beneficio regulae proportionis, quamcunque sortem datam, ad quantamcunque anticipationem aestimare planum foret, cum alias calculus futurus esset longe impeditissimus, iis saltem, qui Logarithmorum destituuntur praesidio.

Tabula sortium anticipato accipiendarum, posito debito 100000.

Ann.	Sors anticip.	Ann.	Sors anticip.
1	0. 95238	11	0. 58468
2	0. 90703	12	0. 55684
3	0. 86384	13	0. 53032
4	0. 82270	14	0. 50507
5	0. 78353	15	0. 48102
6	0. 74622	16	0. 45811
7	0. 71068	17	0. 43630
8	0. 67684	18	0. 41552
9	0. 64461	19	0. 39573
10	0. 61391	20	0. 37689
Ann.	Sors anticip.	Ann.	Sors anticip.
21	0. 35894	31	0. 22036
22	0. 34185	32	0. 20987
23	0. 32557	33	0. 19987
24	0. 31007	34	0. 19035
25	0. 29530	35	0. 18129
26	0. 28124	36	0. 17265
27	0. 26785	37	0. 16444
28	0. 25509	38	0. 15661
29	0. 24294	39	0. 14915
30	0. 23138	40	0. 14205

XIII.

DE REDITIBUS AD VITAM.

Do tibi centum, ut quinque annua recipiam. Victurus sum adhuc triginta annos, quibus ego communi jure usuras perciperem ipse, sequentibus autem temporibus heredes mei. Volo autem ego frui anticipando etiam illis reditibus qui ad heredes meos essent perventuri, libensque patiar r e s e g m e n t u m, quod vulgo vocant rabat. Hoc in eo consistit, ut quantitas ejus, quod interest ab ea summa, quam justo maturius accipio, resecetur. Exempli gratia, si mihi debeas quinque post annos triginta eaque jam nunc desiderem, perinde est ac si mihi quinque nunc mutuo des in annos triginta, finitis illis reddenda. Unde singulis annis unam quartam partem nummi tibi debebo, si vicesimae usurae sint sive quinque in centum. Sed cum parum rationi consentaneum videatur, omnes reditus totius meae posteritatis in infinitum me anticipando percipere velle, cum raro nomina ob revolutiones rerum humanarum ultra aliquot saecula durent; hinc satis superque sufficiet, si trecentorum annorum reditus ego his triginta annis percipiam, quanquam mihi calculus ostenderit, parum interesse trecentorum tantum annorum, an vero totius aeternitatis futurae reditus anticipare quis velit, quod paradoxum quidem est, verissimum tamen. Cum autem velim aequalem quantitatem percipere in singulos annos, hinc trecenti isti anni in hos triginta reliquae meae vitae sic partiendi sunt, ut pro quolibet anno vitae sit aequalis anticipatio. Itaque necesse est nos partiri trecentos annos in triginta partes. Erit una quaeque decem annorum, sive habebimus triginta denarios annorum, et quolibet anno vitae meae decem annorum reditus percipiam, ita tamen, ut hi decem anni, quos primo anno percipio, aeque distent a primo anno ac sequentes decem anni a sequenti anno. Quare sequitur istos decem annos non esse sumendos continuos, sed triginta annorum intervallo discretos; nempe primo anno percipiam usuras primi primorum triginta annorum seu anni primi et primi secundorum triginta annorum seu anni trigesimi primi et primi tertiorum seu anni sexagesimi primi, et ita porro usque ad primum decimorum seu ultimorum triginta annorum sive usque ad 271^{mum}. Similiter secundo anno omnium (qui numero decem sunt) secundorum annorum usuras percipiam, et tertio omnium tertiorum cujusque tricenarii, ac denique ultimo sive trigesimo anno meae vitae percipiam usuras omnium postremorum seu trigesimorum annorum cujusque ex decem tricenariis.

Sufficit ergo ut constituamus, quid mihi primo anno debeatur; et sane si nullum esset resegmentum, primo anno plenae decem annorum usurae, id est a centum nummis in singulos quinque, adeoque primo statim anno quinquaginta nummi deberentur. Sed cum id manifeste iniquum sit, sequitur resegmentum esse adhibendum, et quidem tanto majus, quanto major est anticipatio; itaque ex decem annis, quorum usuras statim simul percipio, primus quidem est ipse annus primus primorum triginta annorum, itaque ratione ipsius nulla est anticipatio, sed usurae primi anni sequentium triginta annorum seu anni trigesimi primi triginta annis anticipantur, et usurae primi anni ex tertio tricenario anticipantur annis sexaginta, et ita porro. Itaque decem annorum qui simul percipiuntur, haec anticipatio est:

anni	1mi	2di	3tii	4ti	5ti	6ti	7mi	8vi	9ni	10mi
anticipatio est annorum	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270

primos quinque aureos sub finem primi anni integros accipio quippe jam debitos, de secundis anno 31mo demum debitis in annos triginta usuras vicesimas solvere debeo, de tertiis anno 61mo demum debitis in annos sexaginta, et ita porro, de ultimis anno 271mo debitis in annos 270. Sed cum neque ego tamdiu victurus sim, neque cum posteritate mea ullum de ea re negotium esse velimus, ideo has usuras vicesimas nummorum justo maturius solutorum ego vivus solvam aut quod eodem redit compensando detrahi mihi patiar. Verum si successu temporis eas solvere volo, ut solent usurae annuatim persolvi, utique mihi plus sequentibus quam primis annis vitae meae sive solvendum, sive quod eodem redit, eo nomine detrahendum erit. Nam tertio anno finito usuras persolvere debebo a nummis tum primo anno tum etiam secundo justo maturius acceptis, idemque multo magis in annis sequentibus continget; quod quidem incrementum quale esset futurum, et quomodo ego vivus solvere usuras anticipationis etiam annorum diu postventurorum deberem, peculiari calculo non indignum esset. Verum id nunc a nobis rejicitur; nam hoc modo minus esset resegmentum anni primi quam secundi, et secundi quam tertii, quod est contra propositum, volumus enim usuras ad vitam in singulos

annos esse aequales. Itaque necesse est, ut ego primo statim anno solvam sive detrahi mihi patiar omnes usuras ob anticipationem hoc anno peractam debitas, alioqui sequentibus annis solvendas. Sed hoc modo, ut ego tibi usuras anticipationis solvo, ita tu mihi etiam usuras anticipationis debebis ob ipsas usuras prioris anticipationis anticipatas. Quin imo quaelibet anticipatio novam pariet anticipationem, dabiturque resegmentum resegmenti semper replicatum; quae omnia uno calculo complectenda sunt, si primi anni usuram justam post omnia resegmenta constituere velimus.

Primum itaque anno primo post contractum percipio quinque nummos ob primum hunc annum (qui etiam primus est primi trecenarii) elapsum, idque sine resegmento; deinde simul percipere volo usuras anni primi de secundo tricenario seu trigesimi primi, qui tunc quidem futuri essent nummi quinque, nunc autem detrahendum est resegmentum, ob usuram, quae ab his quinque nummis in triginta annos a me debetur et nunc per anticipationem solvenda est. Jam secundo anno elapso ob hos quinque nummos anticipatos deberem tibi $\frac{5}{20}$, quos si jam nunc solvam elapso statim primo anno, et ita tu hanc summam $\frac{5}{20}$ uno anno anticipes, hinc anno secundo elapso mihi debebis partem eorum vigesimam seu $\frac{5}{20^2}$ nomine usurae. Quod cum ego iterum statim anticipem, debebo rursus tibi inde $\frac{5}{20^3}$, et ita porro in infinitum. Itaque summa omnium resegmentorum ratione usurae primi anni de quinque nummis anticipatis debitae sic ineunda erit, ut mihi ob quinque nummos triginta annis justo maturius acceptos, ratione usurae primi anni de his quinque nummis debitae, detrahenda sint: $\frac{5}{20} - \frac{5}{20^2} + \frac{5}{20^3} - \frac{5}{20^4}$ etc. in infinitum, id est $\frac{5{,}20}{20+20^2}$ aequ. $\frac{5}{1+20}$. Porro tertio anno elapso, ob quinque nummos anticipatos deberem etiam $\frac{1}{4}$ seu $\frac{5}{20}$. Quos si sub finem secundi solvere debeam, ob unius anni anticipationem debebo tantum (prorsus ut in praecedenti) $\frac{5}{20} \frown \frac{20}{1+20}$ seu $\frac{5}{1+20}$. Sed cum hos $\frac{5}{20} \frown \frac{20}{1+20}$

rursus uno anno anticipem, quia sub finem primi anni solvere debeo, hinc solvam tantum $\left.\frac{20}{1+20}\right\}\boxed{2}$, $\frac{5}{20}$. Et pro quarto anno $\left.\frac{20}{1+20}\right\}\boxed{3}$, $\frac{5}{20}$, et ita porro. Et pro trigesimo et uno denique anno qui est primus secundi tricenarii debebo solvere $\frac{5}{20}$, $\boxed{30}\left\{\frac{20}{1+20}\right.$. Summa autem omnium horum numerorum, nempe $\frac{20}{1+20}+$ $\boxed{2}\frac{20}{1+20}+\boxed{3}\frac{20}{1+20}$ etc. usque ad $\boxed{30}\frac{20}{1+20}$ multiplicata per $\frac{5}{20}$, sic inibitur. In serie progressionis geometricae est summa maxima a ad terminum maximum l, ut terminus maximum l ad differentiam maximam r, seu a aequ. $\frac{ll}{r}$. Est autem hic l aequ. $\frac{20}{1+20}$ et r aequ. $\frac{20}{1+20}-\boxed{2}\frac{20}{1+20}$ aequ. $\frac{20}{\boxed{2}\,1+20}$. Ergo a aequ. $\boxed{2}\frac{20}{1+20}\smile\frac{20}{\boxed{2}\,1+20}$ sive a aequ. 20. Et quoniam a ad b ut l ad m, erit b aequ. $\frac{20\,.\,20}{1+20}$. Et autem f ad p ut b ad l, ergo f aequ. p $\frac{b}{l}$, et p ultimus terminus aequ. $\boxed{30}\frac{20}{1+20}$. Ergo f aequ. $\boxed{30}\frac{20}{1+20}\frown\frac{20\,.\,20}{\boxed{1}\,1+20}\smile\frac{20}{1+20}$. Ergo f aequ. 20, $\boxed{30}\frac{20}{1+20}$. Jam summa omnium terminorum l, m, n etc. usque ad p aequ. a—f. Ergo summa omnium Numerorum $\frac{1}{1+20}+\boxed{2}\frac{1}{1+20}$ etc. usque ad $\boxed{30}\frac{1}{1+20}$ erit aequ. 20—20., $\boxed{30}\frac{20}{1+20}$, qui numerus multiplicatus per $\frac{5}{20}$ dabit summam resegmentorum omnium ob quinque nummos tringinta annis anticipatis adhibendorum, sive resegmentum integrum a quinque nummis primo secundi tricenarii anno elapso demum debitis, et jam elapso primo primi tricenarii persolvendis detrahendum, seu 5—5, $\boxed{30}\frac{20}{1+20}$. Hoc autem si detrahas a 5, restat 5, $\boxed{30}\frac{20}{1+20}$, usura primorum annorum cu-

jusque tricenarii primo primi tricenarii accipienda. Idem brevius concludere potuissemus. Nam si quinque post triginta annos solvenda sint, quaeraturque quantum nunc solvendum, ajo nunc solvendum esse y, quantitatem quae usuris in sortem computatis post 30 annos exhibeat 5, id est fiet y, $\boxed{30}\frac{1+20}{20}$ aequ. 5, sive y aequ. 5, $\boxed{30}\frac{20}{1+20}$. Eodem modo pro quinque nummis in sexaginta annos anticipatis nunc solvendum 5, $\boxed{60}\frac{20}{1+20}$. Et ita porro usque ad 5, $\boxed{270}\frac{20}{1+20}$, quorum decem terminorum ineunda est summa. Sit series progressionis geometricae $1+x+xx$ etc. $+x^9$, ejus summa est $\frac{1}{1-x}-\frac{x^{10}}{1-x}$ seu $\frac{1-x^{10}}{1-x}$. Ergo summa erit 5, $\boxed{30}\frac{20}{1+20}$ in $\dfrac{1-\boxed{300}\frac{20}{1+20}}{1-\boxed{30}\frac{20}{1+20}}$. Est autem $\boxed{30}\frac{20}{1+20}$ circiter 0.231 seu paulo minus quarta parte unitatis; at $\boxed{300}\frac{20}{1+20}$ est circiter $\frac{2037}{4632000000}$ adeoque pro nihilo computari potest, perinde ac si quis reditus suae posteritatis in infinitum anticipare vellet; adeoque fiet summa quaesita $5\frown0.231\frown\frac{1}{1-0.231}$ sive circiter 1.501 seu etiam $\frac{5}{3}$. Qui numerus $\frac{5}{3}$ si addatur numero 5 aureorum, qui a primo anno sine resegmento accipiuntur, habebimus $5+\frac{5}{3}$ seu $6+\frac{2}{3}$ nummos pro reditu ad vitam ex centum nummis, si fingamus creditorem adhuc 30 annis a contractu victurum et posteritatis suae reditus anticipare velle, usuram autem communem vicesimam esse; quodsi minus diu victurus ponatur, patet ei plus deberi.

XIV.

DE RESOLUTIONIBUS AEQUATIONUM CUBICARUM TRIRADICALIUM, DE RADICIBUS REALIBUS, QUAE INTERVENTU IMAGINARIARUM EXPRIMUNTUR, DEQUE SEXTA QUADAM OPERATIONE ARITHMETICA.

Tametsi pro insigni admodum invento haberi non possit, ostendere hominibus, quae longe quaerunt, jam tum in eorum potestate esse, utile est tamen, tum ut sciant uti suis possessionibus, tum ut frustraneo labore absistant. Idque in Aequationum Cubicarum Triradicalium resolutione faciam, ubi primum earum naturam paucis explicuero.

Sciendum est scilicet aequationem omnem aut possibiles habere radices omnes, aut impossibiles omnes, aut quasdam possibiles, alias impossibiles. Impossibiles autem radices cum Analytice exprimuntur, imaginarias appellamus. Omnis aequatio simplex sive primi gradus (loquor autem non nisi de aequationibus rationalibus, in quibus scilicet enuntiandis nulla irrationalis adhibetur) ut $x - d \sqcap 0$ vel $x + d \sqcap 0$ est realis. Aequatio quadratica duas habet radices, easque aut reales ambas, aut imaginarias ambas. Ut si sit aequatio $x^2 - bx + c^2 \sqcap 0$, erunt radices duae $x \sqcap + \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$ et $x \sqcap \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$, ubi quantitas $\sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$ erit realis, si $\frac{b}{2}$ major quam c, at imaginaria, si minor, eoque casu aequatio proposita erit impossibilis. Unde patet vera origo aequationum impossibilium, et radicum imaginariarum, quod scilicet ex quantitate negativa radix quadratica extrahi non potest, neque analytice neque geometrice, ut si sit $b \sqcap 2$ et $c \sqcap 2$, erit $\sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2} \sqcap \sqrt{-3}$. Quod si jam aequatio simplex ducatur in quadraticam, oritur aequatio cubica, quae habet vel tres radices reales si quadratica est possibilis, vel duas imaginarias unamque tantum realem, si quadratica sit impossibilis. Aequatio quadrato-quadratica possibilis aut duas habet radices reales, aut quatuor, quia ex duabus quadraticis facta intelligi potest. Potest autem semper reduci ad cubicam, quod primus jam superiore seculo invenit Ludovicus Ferrariensis, Cardani et Tartaleae aequalis, et observavi, cum quatuor habet radices reales, tunc reduci ad cubicam triradicalem; cum duas, tunc ad cubicam unius radicis revocari.

Sit jam aequatio cubica: $y^3 * \mp qy - r \sqcap 0$ (omnes enim ad hanc formam revocari possunt), ex regula Scipionis Ferrei a Tartalea et Cardano publicata, radix ejus una eaque semper realis erit:

$$y \sqcap \sqrt{(3)\, \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^3}{27}}} + \sqrt{(3)\, \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^3}{27}}},$$

ex qua data reliquas duas radices quadratica aequatione investigare facile est, quae possibilis est, si reliquae duae radices sunt reales; impossibilis vero, si sint imaginariae. Dixi autem hanc unam minimum semper realem esse. Ubi vero sese objicit difficultas ingens. Nimirum evenit aliquando ut quantitas $\sqrt{\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^3}{27}}$ sit impossibilis, tunc scilicet cum signum ambiguum $\mp$ valet $-$ et $\frac{q^3}{27}$ est major quam $\frac{r^2}{4}$, tunc enim quantitas $\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}$ est negativa adeoque quantitas $\sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}$ imaginaria. Quomodo ergo fieri potest, ut quantitas realis, qualis est radix aequationis propositae, exprimatur interventu imaginariae? Hoc ipsum enim mirum est, talem quantitatum imaginariarum interventum in illis aequationibus cubicis tantum (ut calculus ostendit) observari, quae nullam habent radicem imaginariam, sed omnes reales sive possibiles, idque per trisectionem anguli ab Alberto Girardo aliisque ostensum est. Videatur imprimis Schotenius in appendice Com. ad Geom. Cartes. Haec difficultas omnibus hactenus Algebrae scriptoribus crucem fixit, nec quisquam eorum est, qui non professus sit regulas Cardani in hoc casu exceptionem pati. Primus omnium Raphael Bombelli, cujus Algebram perelegantem Italico sermone jam superiore seculo Bononiae editam vidi, invenit, eas servire posse ad eruendas radices veras rationales sive numeris exprimibiles, quando tales habet aequatio; sed quando radices illae rationales sunt falsae sive negativae, tunc nesciebat ille etiam ex irrationalibus erui posse, adeoque aliam methodum praescripsit e Cardano sumptam, quae tamen reapse ad aequationis divisionem per $y +$ vel $-$ aliquo ultimi termini divisore (ut stylo Cartesii utar) reducitur, etsi alia longe phrasi utatur Cardanus. A me vero deprehensum est, eadem methodo, nonnihil tamen pro re nata immutata, etiam ex irrationalibus Cardanicis erui rationales falsas seu negativas. Quanquam autem haec observavit Bombellus, nondum tamen illud asseruit, nedum demonstravit, ipsas radices Cardanicas irrationales interventu imaginariarum expressas esse quantitates reales ac aequationi resolvendae sufficientes. Quod vero a me liquido evincetur, ut appareat, alias imposterum radices aequationum Cubicarum triradicalium frustra quaeri, et habere nos quicquid in eo genere optari cum ratione potest.

Hoc cum a me aliquot abhinc mensibus inventum esset, nolui tamen explicare, donec alia quaedam memoratu digna in Algebraico negotio deprehenderem, ne inventum parum speciosum sine socio derideretur. Nunc vero cum originem talium regularum intime inspexerim et viam ad altiores aequationes repererim, deprehensa sectione potestatum generali, memorabilium admodum theorematum tabulam non mediocriter utilem complexa, et formulas quarundam aequationum dederim per omnes gradus in infinitum euntes, quaeque per irrationales sui gradus resolvuntur; hoc, inquam, cum praestiterim quicquid illud est circa Aequationum Triradicalium resolutiones, sive inventum a me sive si mavis observatum, protrudere post tot alia non contemnenda specimina non amplius erubesco.

Utile autem erit commemorare, qua via ad rem penitus eruendam excitatus sit animus. Incideram aliquando in duas aequationes ejusmodi: $x^2+y^2 \sqcap b$ et $xy \sqcap c^2$, unde sequebatur $x^2 \sqcap \frac{c^2}{y^2}$, adeoque $\frac{c^2}{y^2}+y^2 \sqcap b$ et $y^4-by^2+c^2 \sqcap 0$, sive $y^2 \sqcap +\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}$ et $y \sqcap \sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$. Ergo pro $x^2+y^2 \sqcap b$, substituto valore ipsius y^2, scribebam $x^2-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2} \sqcap 0$ sive $x \sqcap \sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$. Erat autem c major quam b, adeoque $\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}$ erat quantitas imaginaria. At vero constabat mihi aliunde, saltem summam incognitarum $x+y$ esse quantitatem realem et

aequari cuidam lineae d, quod me valde perplexum reddidit, cum enim ex calculo praecedenti deduxissem $d \sqcap x+y \sqcap \sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}+\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$, non capiebam, quomodo ejusmodi quantitas posset esse realis, in quam exprimendam imaginariae sive impossibiles ingrederentur. Relegere ergo calculi vestigia coepi, errorem suspicatus, sed frustra: eadem enim perpetuo prodiere. Tandem venit in mentem, operationem instituere, quam hic subjiciam: $d \sqcap \sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}+\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$ sive $d \sqcap A+B$, ergo quandrando utrobique

$$d^2 \sqcap \overbrace{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}^{+A^2}+\overbrace{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}^{+\ B^2}+\overbrace{2c}^{+\ 2AB},$$

nam rectangulum AB sive $\sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$ in $\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$ facit c, ut calculus ostendet; erit ergo $d^2 \sqcap b+2c$ adeoque $d \sqcap \sqrt{b+2c}$. Aequando ergo inter se duos valores ipsius d, fiet $\sqrt{b+2c} \sqcap \sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}+\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$; unde si in numeris faciamus $b \sqcap 2$ et c etiam $\sqcap 2$, fiet $\sqrt{6} \sqcap \sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$. Qua observatione nullam facile in tota analytica singularem magis et paradoxam a me memini notatam, nam me primum arbitror radices irrationales, in speciem imaginarias, ad reales etiam sine extractione reduxisse. Et notabile est, **sextum** nos habituros **Operationis sive Arithmeticae sive Analyticae genus;** nam praeter additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem, radicum extractionum habebitur Reformatio seu Reductio expressionum imaginariarum ad reales. Nimirum additio et subtractio composita reducunt ad simplicia seu partes ad totum, vel contra; multiplicatio causas ad effectum; divisio et extractio contra: divisio fractos ad integros, extractio surdos ad rationales, denique Reformatio imaginarios ad reales.

Ad exemplum enim hujus theorematis, sive aequationis inter realem et in speciem imaginariam, alia exempla concinnari possunt infinita, etiam pro altioribus radicum irrationalium gradibus, modo earum exponentes sint progressionis geometricae duplae, ut $\sqrt{(4)}$, $\sqrt{(8)}$, $\sqrt{(16)}$ etc., imo et nonnunquam pro aliis ut $\sqrt{(6)}$, ut multis exemplis ostendere possum. Sed generaliter ejusmodi composita radicum ex binomiis et residuis non nisi tunc cum radicum exponentes sunt progressionis geometricae duplae, reduci possunt analytice. In caeteris vero, ut $y \sqcap \sqrt{(3)\,\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}+\sqrt{(3)\,\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}$, reductio ejusmodi non admittitur per naturam rerum, quoniam scilicet radices irrationales cubicae non statim tolluntur cubando, ut quadraticae quadrando. Sit enim $y^3 \sqcap A^3 + B^3 + 3ABy$; est autem $3AB \sqcap q$, ut calculus ostendet, et $A^3+B^3 \sqcap r$. Unde fit aequatio non pura (ut in quadratica supra habueramus $d^2 \sqcap b+2c$), sed affecta $y^3 \sqcap +3qy+r$, quod impedit, quominus istae quantitates alia adhuc ratione et sine imaginariis exprimi possint, ut in quadraticis successerat. Sed tametsi Reductio quantitatum in speciem imaginariarum ad reales non semper enuntiatione quadam expressa palpabilis reddi possit, non eo tamen minus hae in speciem imaginariae reapse sunt reales habendae. Itaque de hac operatione sexta Reformationum dicendum est, quod de operatione quinta extractionum, esse scilicet quantitates reales, quae tamen non nisi imaginariarum interventu exprimantur; quemadmodum sunt radices, quas surdas vocamus, quae non nisi per suas potestates enuntiantur. Quanquam autem exemplum radicum quadraticarum in speciem imaginariarum validam satis suspicionem moveat altiores quoque reales esse, quoniam tamen minime convenit, in hujusmodi quaestionibus, ubi accurata veritatis indagatio in humanae mentis potestate est, nos conjecturis duci, ideo demonstrandum putavi, expressiones illas semper esse rectas et admittendas, etiam tum cum interveniunt imaginariae, ut in cubicis triradicalibus usu venit. Quod antequam faciam, ostendam paucis, contrarium sensisse doctissimos viros et habuisse graves sane dubitandi rationes. De Cardano et Tartalea qui regulas illas publicavere primi, non est cur moneam. Bombellus, quem dixi observasse primum, quod ex his radicibus erui possint saltem radices rationales verae seu affirmativae, si quae sunt, credidit tamen in caeteris casibus, cum scilicet radices rationales sunt negativae aut etiam cum non sunt rationales, exceptionem pati regulas. Exempli causa proposita aequatione $y^3-12y-9 \sqcap 0$, quae triradicalis est, haec, inquit, aequatio resolvi non potest per regulas propositas; ideoque utitur

alia methodo, eamque dividit per $y+3$, unde fit aequatio quadratica, quam resolvit. Sed non noverat ille, ipsam quantitatem negativam -3 esse radicem licet falsam, aut certe non putabat irrationales eam continere. Idem putat, aequationes ejusmodi in quibus scilicet terminus penultimus est negativus et quadratum semissis termini ultimi est minus cubo trientis penultimi, tunc cum ultimus terminus est affirmativus, non posse resolvi. Unde proposita aequatione $y^3-6y+8 \sqcap 0$ ait, questa agguagliatione risolutamente non si può agguagliare, e la proposta tratta dell' impossibile, in quo sine dubio deceptus est; scimus enim hodie, omnem aequationem cubicam esse possibilem et habere vel unam radicem realem vel tres. In quo eum errasse tanto magis miror, quod jam tum scivit, Trisectionem Anguli ad aequationem cubicam, quae per regulas Cardani tractari non posse credebatur, reduci. Sed error inde ortus, quod nondum satis eo tempore notum erat, aequationes provenire ex radicibus in se ductis, quod a Cartesio, si non inventum, saltem in clara luce positum est. Unde non miror, alicubi Bombellum asserere, non videri sibi unam quaestionem plures una veras responsiones sive radices habere posse. Albertus Girardus, qui primus quod sciam usum Trisectionis Anguli in hoc negotio accurate explicuit, Cardani regulas satis aperte exclusit. Quem secutus est Cartesius. Nam Vieta radices irrationales rarius attigit, et cum methodum tradidit sane pulcherrimam extrahendi radices aequationum in numeris rationalibus, non est usus extractione ex radicibus irrationalibus.

Quod superest ergo summi viri Renati Cartesii ac doctissimorum ejus discipulorum Huddenii et Schotenii mentem explicare suffecerit. Cartesius libro tertio Geometriae radices Cardani diserte non nisi illis aequationibus applicandas censet, in quibus imaginariae quantitates evitantur, et tunc cum imaginariae interveniunt, novum notae algebraicae genus introducere conatur, ut scilicet quantitas incognita non per extractionem radicis sive sectionem rationis, sed per sectionem anguli explicetur, in quo mihi non satisfacit. Nam aliae sunt notae Analyticae, aliae Geometricae; illae serviunt ad quantitatem incognitam enuntiandam relatione ad quasdam operationes arithmeticas, quales sunt additiones, subtractiones, multiplicationes, divisiones, radicum extractiones et (quae a me adduntur) imaginariarum reformationes, hae vero enuntiant quantitatem incognitam relatione ad quasdam operationes geometricas ductusque linearum. Et aequationem resolvisse aliud est, quam construxisse: resolutio rei naturam detegit, incognitas simplicissime enunciat, earumque omnes recessus patefacit; constructio quaesitam quantitatem exhibet instrumento; tametsi ultro largiar Geometriam ad ostendendam realitatem quantitatum in speciem imaginariarum, imo et surdarum adhiberi debere, ne scilicet pro figmentis inanibus humanae mentis habeantur. Quare Cartesii ratiocinationi non assentior, cum nobis est persuasum (ut scilicet jacturam soletur, quam ex defectu regularum Cardani nos pati credidit), aeque clare, imo clarius ac distinctius nos concipere incognitam per relationem ad subtensas arcuum, quarum triplum est datum, quam per relationem ad latera cuborum quorum contentum est datum. Faterer si de Geometrica constructione ageretur, sed analytici est incognitas exprimere per notas, quae ad calculum sint aptae; manifestum est autem, notam Cartesianam, qua incognitae cubicae per relationes ad arcus exprimerentur, ad calculum servire non posse aut certe inter calculandum semper mansuram invariatam, cum contra radices cubicae irrationales nonnunquam extrahi, semper tolli possint et in se invicem aut in alias duci, aliasque atque alias formas induere, quibus earum natura et problematis constitutio detegatur. Neque enim Cartesius ex nota sua ad anguli trisectionem nos referente duceret unquam radices rationales aequationis, neque illud demonstraret sane memorabile, omnem aequationem cubicam deprimibilem habere radicem rationalem, uti ex irrationalibus Cardanicis, etiam tum cum imaginariae interveniunt, egregie patet, quod infra denuo attingere operae pretium erit.

Denique concludit Cartesius, naturam radicum cubicarum non pati, ut terminis *exprimantur* simplicioribus, nec ut per *constructionem* aliquam, quae una et generalior et simplicior sit, determinentur. Quae Schotenius iisdem verbis repetit in praefatione Commentariorum in librum tertium et rursus pag. 297 Com. ad lib. I., usque adeo ea illi placuere. De *constructione* non repugno; at quod ad *expressionem* attinet, ajo, Cardanicam et simplicissimam et generalissimam esse, omnesque omnino casus complecti, secus quam Cartesio videbatur. Schotenii mens ex his aliisque multis locis satis patet; at de ingeniosissimo Huddenio miror, quo neminem unquam profundius in analyseos purae et a geometria abstractae mysteria penetrasse scio. Is Epistola ad Schotenium prima pag. 504 regulae, inquit, quarum ope quarun-

dam cubicarum aequationum radices investigantur, quas Cardanus autori Scipioni Ferreo asscribit etc. Et regula 21 exemplo quarto cum agnovisset ex irrationalibus Cardanicis erui posse radices rationales, subjicit: excepto tantum uno casu, quando termino penultimo existente negativo cubus trientis ab ipso major est quadrato semissis ab ultimo.

Utile vero erit etiam rationem adjicere, quae doctissimis viris persuasit, regulas Cardani esse limitatas. Primum Cardanicae radices in casu toties dicto speciem habent impossibilium sive imaginariarum, sed regeri poterat, non ideo imaginarias sive impossibiles habendas, imo necessario esse reales, quoniam ex aequatione data (quae utique possibilis est) consequantur; ex vero autem non sequi nisi verum. Ad hanc objectionem parata illis replicatio fuit, radices Cardanicas ex aequatione cubica data non sequi necessario, sed niti quadam suppositione; ea autem suppositione tunc cum ad impossibile ducit, esse abstinendum. Hujus responsionis vis ac momentum eleganter apparet ex calculo, quem instituit doctissimus Huddenius. Esto aequatio data $x^3 \mp qx - r \sqcap 0$. Ponatur incognita $x \sqcap y+z$; haec suppositio utique semper permissa est; ergo erit $x^3 \sqcap y^3+3y^2z+3yz^2+z^3$, adeoque ex aequatione data $x^3 \sqcap \mp qx+r$ aequando duas ipsius x^3 valores, fiet $y^3+3y^2z+3yz^2+z^3 \sqcap \mp qx+r$. Cum vero plures habeamus quantitates indeterminatas quam aequationes, nam indeterminatae sunt tres x, y, z, aequationes tantum duae $x \sqcap y+z$ (sive $x^3 \sqcap y^3+3y^2z+3yz^2+z^3$) et $x^3 \sqcap \mp qx+r$, ideo (regulariter) licebit novam pro arbitrio fingere aequationem. Fingamus ergo $y^3+z^3 \sqcap r$, et restabit in aequatione superiore $3y^2z+3yz^2 \sqcap \mp qx$, cujus uno latere diviso per x, altero per $y+z$, ipsi x aequivalentem, fiet $3yz \sqcap \mp q$. Unde ut verba in compendium contraham (cetera enim clara sunt) fiet denique $x \sqcap \sqrt[3]{\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}\mp\frac{q^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}\mp\frac{q^3}{27}}}$.

Quodsi ergo $\mp$ valeat — (id est si $\mp$ sit +) et sit $\frac{q^3}{27}$ major quam $\frac{r^2}{4}$, venimus ad aliquod impossibile, adeoque suppositio a nobis pro arbitrio facta, qua fecimus $y^3+z^3 \sqcap r$, eo casu admittenda non est, quare et valor hic ipsius x ex aequatione data necessario non ducitur. Haec ratiocinatio recta est et solida, quatenus concludit ex aequatione directe deduci nec necessario calculo formulam

Cardanicam sic quidem deduci, ac certe nisi aliunde deprehendissem radices Cardanicas generatim esse admittendas, ex hoc certe calculo solo asserere non auderem, ob intervenientem ut dixi suppositionem.

Opus est ergo, ut sine ulla ejusmodi suppositione demonstrem, radicibus Cardanicis omnem generaliter aequationem cubicam recte resolvi. Incipiam a clarioribus exemplis earum, quae radicem habent rationalem, ut facilius intelligatur postea demonstratio generalis de irrationalibus. Sit quantitas aliqua 2b, poterit eadem et sic enuntiari: $b+\sqrt{-ac}+b-\sqrt{-ac}$. Qanquam enim $\sqrt{-ac}$ sit quantitas imaginaria, summa tamen ideo non minus est realis, quoniam imaginariae destruuntur. Dividatur haec formula in duas partes, binomium $b+\sqrt{-ac}$, et residuum $b-\sqrt{-ac}$, et utriusque separatim investigetur cubus, erit ipsius $b+\sqrt{-ac}$ cubus hic $\begin{array}{l} +\ b^3 - ac\sqrt{-ac} \\ -3bac+3b^2 \ldots \end{array}$ et ipsius $b-\sqrt{-ac}$ cubus erit $\begin{array}{l} b^3 + ac\sqrt{-ac} \\ -3bac-3b^2 \ldots \end{array}$

adeoque erit

$$\sqrt{\begin{array}{l}(3) + b^3 - ac\sqrt{-ac} \\ \quad -3bac+3b^2 \ldots\end{array}} + \sqrt{\begin{array}{l}(3) + b^3 + ac\sqrt{-ac} \\ \quad -3bac-3b^2 \ldots\end{array}}$$

$$\text{vel } \left.\sqrt{\begin{array}{l}(3) + b^3 + \sqrt{-a^3c^3} \\ \quad -3bac+6a^2c^2b^2 \\ \quad -9b^4ac\end{array}} + \sqrt{\begin{array}{l}(3) + b^3 - \sqrt{-a^3c^3} \\ \quad -3bac+6a^2c^2b^2 \\ \quad -9b^4ac\end{array}}\ \right\} \sqcap 2b$$

sive $b+\sqrt{-ac}+b-\sqrt{-ac}$. Quodsi ergo ex tali binomio ejusmodi semper extrahi posset radix cubica, quemadmodum ex hoc quidem potest, utique junctis inter se binomio et residuo semper tolli posset imaginaria. Sed quoniam data ejusmodi expressione: $\sqrt{(3)\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}+\sqrt{(3)\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}$, qualem exhibent cubicae aequationes, non semper extrahi potest, id est, quia non semper quantitas data $\frac{r}{2}$ in duas b^3-3bac nec quantitas data $\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}$ in tres $-a^3c^3+6a^2c^2b^2-9b^4ac$ dispesci a nobis sine alia aequatione, aeque ac data difficili, potest; ideo fit ut ex quantitatibus realibus non semper possimus imaginarias eliminare.

Exempla autem in numeris rationalibus proponere utile erit. Sit aequatio, qua et Albertus Girardus utitur: $x^3 \cdot -13x-12 \sqcap 0$, cujus radix vera est 4. Ex formulis autem Scipionis Ferrei sive

Cardani erit $x \sqcap \sqrt{(3)\,6+\sqrt{\frac{-1225}{27}}}+\sqrt{(3)+6-\sqrt{\frac{-1225}{27}}}$.

Quam expressionem rectam esse et realem, et admittendam sic demonstrabo. Ponatur $x \sqcap 2+\sqrt{-\frac{1}{3}}+2-\sqrt{-\frac{1}{3}}$, erit utique $x \sqcap 4$, uti aequatio postulati Videamus nunc an inde derivari possit formula Cardanica. Nimirum cubando et superiorem formulam $b+\sqrt{-ac}+b-\sqrt{-ac}$ huc applicando, faciendoque $b \sqcap 2$ et $ac \sqcap \frac{1}{3}$ habebimus pro cubo ipsius $2+\sqrt{-\frac{1}{3}}$ formulam hanc:

$$\begin{array}{l} +8 \\ -3,2,\tfrac{1}{3} \sqcap -2 \end{array} + \sqrt{\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{27} \\ +6,\tfrac{1}{9},4 \sqcap \frac{72}{27} \\ -9,16,\tfrac{1}{3} \sqcap -\frac{1296}{27} \end{array}\right.}$$

sive summando $6+\sqrt{\frac{-1225}{27}}$. Eodem modo cubus a $2-\sqrt{-\frac{1}{3}}$ erit $6-\sqrt{\frac{-1225}{27}}$, ac proinde $\sqrt{(3)\,6+\sqrt{\frac{-1225}{27}}}$ erit $2+\sqrt{-\frac{1}{3}}$ et $\sqrt{(3)-\sqrt{\frac{-1225}{27}}}$ erit $2-\sqrt{-\frac{1}{3}}$, ac jungendo binomium residuo erit x sive $\sqrt{(3)6+\sqrt{\frac{-1225}{27}}}+\sqrt{(3)6-\sqrt{\frac{-1225}{27}}}$ idem quod $2+\sqrt{-\frac{1}{3}}+2-\sqrt{-\frac{1}{3}}$, id est erit, 4, ut ostendere propositum erat.

Unum adhuc exemplum adducere operae pretium erit, cum radix rationalis in irrationalibus Cardanicis latens est falsa sive negativa, quoniam variatur nonnihil calculus, et video Raphaelem Bombellum, egregium certe artis analyticae magistrum, hic haesisse: nam ut supra dixi, radices rationales veras extrahere potuit, falsas non potuit.

Exemplum esto $x^3 \cdot -48x-72 \sqcap 0$, cujus radix falsa est $x \sqcap -6$. Erit ex regula $x \sqcap \sqrt{(3)36+\sqrt{-2800}}+\sqrt{(3)36-\sqrt{-2800}}$; ostendendum est ergo harum duarum irrationalium summam nihil aliud facere, quam -6. Quem in finem ponemus $x \sqcap \underbrace{-3+\sqrt{-7}}_{\odot}\ \underbrace{-3-\sqrt{-7}}_{☽}$ sive $x \sqcap \odot + ☽$ vel $x \sqcap \sqrt{(3)\odot^3}+\sqrt{(3)☽^3}$. Resumta ergo formula superiore, qua erit $\odot \sqcap b+\sqrt{-ac}$ et $☽ \sqcap b-\sqrt{-ac}$, ac nunc pro b substituendo -3 et pro ac sumendo 7, erit

$$\begin{array}{l} \odot^3 \sqcap -27 \\ \quad +3,3,7 \sqcap 63 \end{array} + \sqrt{\left\{\begin{array}{l} -343 \\ +6,49,9 \sqcap 2646 \\ -9,81,7 \sqcap -5103 \end{array}\right.}$$

sive summa inita $\odot^3 \sqcap 36+\sqrt{-2800}$; eodem modo ostendetur esse $☽^3 \sqcap 36-\sqrt{-2800}$. Cum ergo sit $x \sqcap -6 \sqcap \sqrt{(3)\odot^3}+\sqrt{(3)☽^3}$, prit $x \sqcap \sqrt{(3)\,36+\sqrt{-2800}}+\sqrt{(3)\,36-\sqrt{-2800}}$, ut regula Cardani eerscripserat, quod ostendendum proponebatur.

Tametsi autem radices cubicae semper ex binomiis et residuis ejusmodi analytice extrahi non possint, patet tamen semper in illis inesse, et operatione Geometrica inveniri, quemadmodum aliae radices surdae: ac proinde imaginarias semper destrui ac summam duarum hujusmodi radicum cubicarum semper esse realem, tametsi destruendi modus non sit semper enuntiabilis. Ne qua tamen ansa dubitandi relinquatur, duplici demonstratione generali rem conficiemus, quae rationales irrationalesve non moretur. Prior demonstratio huc redit: Formula Cardanica satisfacit aequationi cubicae triradicali; omnis formula quae satisfacit aequationi cuidam, est ejus radix; ergo formula Cardanica est aequationis cubicae triradicalis radix. Omnis porro radix aequationis cubicae triradicalis est quantitas realis (ex hypothesi ideo enim triradicalem vocamus, quod tres habet radices reales, qualem illam esse, quae regulas Cardani respuere credebatur, dudum ostensum est; videatur inprimis Schotenius in appendice de aequationum cubicarum resolutione; neque vero plures quam tres habere potest radix cubica ulla). Ergo formula Cardanica (etiam tum cum ex cubica triradicali ducitur) est quantitas realis. Superest ergo tantum, ut ostendamus formulam Cardanicam etiam aequationi cubicae triradicali satisfacere, quod apparet, si in aequatione ejusmodi ut $x^3 - qx - r \sqcap 0$ substituendo valorem ipsius x, nempe

$$
\begin{array}{llllll}
x^3 \sqcap & A^3 & + \; 3A^2B & + \; 3AB^2 & + \; B^3 \\
& \frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}} & +{}^{*}q\sqrt{(3)\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}} & +{}^{*}q\sqrt{(3)\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}} & +\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}} \\
-qx \sqcap & & -q\sqrt{(3)\frac{r}{2}\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}} & -q\sqrt{(3)\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}} & \\
-r \sqcap & -\frac{r}{2} & & & -\frac{r}{2} \\
\hline
\sqcap 0 & \sqcap 0 & & &
\end{array}
$$

Semper ergo formula Cardanica satisfacit, nec refert, major minorve sit $\frac{q^3}{27}$ quam $\frac{r^2}{4}$.

Altera demonstratio haec est: Sit aequatio dat $ax^3 - qx - r \sqcap 0$; ajo, radicem seu valorem ipsius x esse

$$\overset{A}{\sqrt{(3)\,\frac{r}{2}+\sqrt{+\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}} + \overset{B}{\sqrt{(3)\,\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}},$$

quanquam sit $\frac{q^3}{27}$ major quam $\frac{r^2}{4}$. Probo, quia tunc semper erit $A \sqcap \frac{x}{2}+\sqrt{-ac}$, $B \sqcap \frac{x}{2}-\sqrt{-ac}$, sumta pro ac quantitate quamcunque calculus obtulerit, ac proinde summa utrius radicis cubicae seu $A+B$ erit x, ut proponebatur. Assumtum sic ostendo: Ponatur A vel B major minorve esse quam assignata quantitas, et excessus vel defectus sit $\mp d$; erit ergo $A \sqcap \frac{x}{2} \mp d+\sqrt{-ac}$, et $B \sqcap \frac{x}{2} \mp d-\sqrt{-ac}$, nam calculus ejusmodi binomiorum ostendit, quantitates reales in binomio pariter ac residuo esse easdem, nec differentiam nisi in signis quantitatis imaginariae intervenientis esse debere. Compendii autem causa ponamus $\frac{x}{2} \mp d \sqcap b$, fiet $A \sqcap -b+\sqrt{-ac}$ et $B \sqcap b-\sqrt{-ac}$

*) Nam $AB \sqcap \frac{q}{3}$ ut facile calculo ostendi potest.