maximum); at omnis divisor ipsius 4cd, qui non est divisor ipsius bd, non potest esse divisor ipsius $4cd+bd$ per artic. 48. Ergo m non est divisor ipsius $4cd+bd$ seu ipsius dividendi 56, ergo non datur communis divisor dividendi $4cd+bd$ (seu 56) et divisoris cd, qui sit major quam d.

(55) Hinc si dividendus dividatur per divisorem, et divisor per residuum, et residuum primum seu divisor secundus per residuum secundum seu divisorem tertium, et ita quousque libuerit, tunc maxima mensura communis ultimi divisoris et ultimi residui erit maxima mensura communis primi divisoris et primi dividendi. Nam quia divisor et residuum divisionis praecedentis fiunt dividendus et divisor sequentis, et per praecedentem communis mensura divisoris et residui est communis mensura dividendi et divisoris, ergo communis mensura divisoris et residui divisionis ultimae est communis mensura dividendi et divisoris divisionis ultimae, ergo divisoris et residui divisionis penultimae, ergo dividendi et divisoris divisionis penultimae, ergo rursus divisoris et residui divisionis antepenultimae, ergo dividendi et divisoris divisionis antepenultimae, et ita porro procedetur usque ad dividendum et divisorem divisionis primae.

(56) Hinc habetur modus inveniendi duorum numerorum integrorum maximam communem mensuram, si quam habent. Dividatur dividendus per divisorem, divisor per residuum, idque continuetur, donec nullum sit residuum, et ultimus divisor erit maxima communis mensura quaesita. Ultimus enim divisor, cum nullum residuum relinquat, erit divisor exactus, omnis autem divisor exactus est maxima mensura communis sui ipsius et dividendi (est enim divisor dividendi, et quilibet numerus est maximus divisor sui ipsius seu quo non datur major sui, ergo nec datur major communis). Ergo ultimus divisor est maxima communis mensura ultimi divisoris et ultimi dividendi, ergo et residui (qui est ultimus divisor) et divisoris divisionis penultimae (qui est ultimae dividendus), ergo per praecedentem omnium divisorum et residuorum, itemque omnium dividendorum et divisorum divisionum praecedentium, adeoque et primae; dividendus autem et divisor divisionis primae sunt numeri dati, quorum communis divisor quaeritur. Semper autem habetur denique ultimus divisor exactus; quoniam residuus est semper integer semperque decrescit, tandem vel invenitur divisor exactus, qui est

maxima mensura communis quaesita, nec opus est ultra pergi, vel devenitur ad unitatem, infra quam descendi non potest, nam nec datur integer minor unitate, et unitas semper ist divisor exactus. Quando autem pergendum est usque ad unitatem, tunc signum est, duos numeros nullam habere communem mensuram nisi unitatem, seu esse primos inter se. Utrumque exemplis declarabo. Sint duo numeri 56 et 12, quorum quaeritur mensura communis; 56 aequ. $4.12+8$ (erit 56 dividendus, 12 divisor, 4 quotiens, 8 residuus), 12 aequ. $1.8+4$ (erit 12 dividendus, 8 divisor, 1 quotiens, 4 residuus), 8 aequ. 2.4 (erit 8 dividendus, 4 divisor, 2 quotiens, residuus 0). Ergo maxima communis mensura 56 et 12 est 4, seu $56\smile 4$ dat 14, et $12\smile 4$ dat 3. At 14 et 3 amplius divisorem communem non habent. At 120 et 49 esse primos inter se sic discemus: 120 aequ. $2.49+22$, 49 aequ. $2.22+5$, 22 aequ. $4.5+2$, 5 aequ. $2.2+1$, ergo ultimus residuus est 1, adeoque nulla alia datur mensura communis.

Unusquisque numerus dividi potest per unitatem, secundus quisque per 2, tertius quisque per 3, quartus quisque per 4, et ita porro, incipiendo numerationem ab 0. Ita 0, 3, 6, 9 etc. sunt divisibiles per 3.

Hinc sequitur, productum ex duobus numeris continuis, ut 0.1, vel 1.2, vel 2.3, vel 3.4 etc. esse numerum parem seu divisibilem per 2; et productum ex tribus continuis esse numerum divisibilem per 3, ut 4.5.6 sive 120, vel 5.6.7 sive 210, vel 6.7.8 sive 336; semper enim unus inter eos est ternalis seu divisibilis per 3. Ita productus ex quinque continuis, ut 12.13.14.15.16, semper est divisibilis per 5; nam unus quinalis semper inest, quia quintus quisque est unus ex quinque continuis, nunquam enim intervallorum eorum inter duos quinales plures quam quatuor numeri interpositi esse possunt.

Hinc sequitur, productum ex tribus continuis dividi posse per 6, ut $120\smile 6$ aequ. 20 et $210\smile 6$ aequ. 35, quia productum ex tribus continuis est etiam productum ex duobus continuis, ergo dividi potest per 2, idemque quia est ex tribus, dividi potest per 3. Similiter productum ex quatuor continuis dividi potest per 2.3.4 seu per 24, ita $8\frown 9\frown 10\frown 11$ seu 7920 dividi potest per 24. Et ita porro. Unde sumto quocunque numero ut y, cujus continui sunt $\overline{y+1}$ et $\overline{y+2}$ et $y+3$ etc. productus ex omnibus, nempe $y\frown\overline{y+1}\frown\overline{y+2}\frown\overline{y+3}$ etc. dividi potest exacte per $1\frown 2\frown 3\frown 4$ etc. Itaque

$\frac{y.\overline{y+1}}{1.2}$, item $\frac{y.\overline{y+1}.\overline{y+2}}{1.2.3}$, item $\frac{y.\overline{y+1}.\overline{y+2}.\overline{y+3}}{1.2.3.4}$, et ita porro, sunt numeri integri, modo y sit integer. Hinc innumerae consequentiae elegantes duci possunt; exempli causa, quia $\frac{y.\overline{y+1}}{1.2}$ vel $\frac{yy+y}{2}$ est integer, erit $yy+y$ numerus par, a quo si auferatur $2y$, qui est etiam par, residuus $yy-y$ erit par. Itaque si a numero quadrato auferatur latus, residuus erit par, ut $9-3$ est 6, idque etiam ex eo patet, quod fit ex duobus sola unitate differentibus seu continuis $y-1$ et y. Similiter $y.\overline{y+1}.\overline{y+2}$ seu $y^3+3yy+2y$ est ternalis seu divisibilis per 3, ergo auferendo ternalem $3yy-3y$ restabit y^3-y, qui etiam erit divisibilis per 3. Itaque cubus latere minutus semper est ternalis sive exacte divisibilis per 3, *modo* scilicet latus y sit numerus integer. Imo y^3-y est senalis seu divisibilis per 6, fit enim ex tribus continuis seu sola unitate differentibus $\overline{y-1}.y.\overline{y+1}$. Eodem modo $y-2.\overline{y-1}.y.\overline{y+1}.\overline{y+2}$ seu $y^2-4.\overline{y^2-1}.y$ seu y^5-5y^3+4y divisibilis per 1.2.3.4.5 seu per 120 adeoque et per 30, a quo si auferatur $5y^3-5y$ divisibilis per 30 (nam y^3-y per 6), restabit y^5-y divisibilis per 30. Hinc sequitur, si y neque per 2 neque per 3 neque per 5 dividi possit, tunc y^4-1 etiam dividi posse per 30. Sunt enim numeri y^5-y duo confactores y et y^4-1; jam si y dividi non potest per primitivos 2 et 3 et 5, necesse est per artic. **44** alterum confactorem y^4-1 dividi posse et per 2 et per 3 et per 5, qui cum sint primitivi, necesse est per **46.** y^4-1 dividi posse per 2.3.5 seu per 30.

VIII.

DE PRIMITIVIS ET DIVISORIBUS EX TABULA COMBINATORIA.

Combinationum formulae: y^0, $\frac{y}{1}$, $\frac{y.\overline{y-1}}{1.2}$, $\frac{y.\overline{y-1}.\overline{y-2}}{1.2.3}$, $\frac{y.\overline{y-1}.\overline{y-2}.\overline{y-3}}{1.2.3.4}$

Nomina indices / Numeri rerum	Nullio 0	Unio 1	Binio 2	Ternio 3	Quaternio 4	Combinationum summae	seu Potentiae Binarii
	Combinationes singulae						
Nihil 0	1					1	2^0 Nullatum
Unitas 1	1	1				2	2^1 Radix
Binarius 2	1	2	1			4	2^2 Quadrat.
Ternarius 3	1	3*	3**	1		8	2^3 Cubus
Quaternar. 4	1	4*	6*	4**	1	16	2^4 Biquadr.

Itaque 3* significat tres esse uniones ternarii, item 3** denotat tres esse biniones ejusdem ternarii, et 6* indicat sex esse biniones quaternarii. Sint enim res quatuor a, b, c, d, erunt earum biniones sex, nempe ab, ac, ad, bc, bd, cd. 4* significat quatuor rerum esse quatuor uniones, nempe a, b, c, d, et 4** significat quatuor esse terniones quatuor rerum, scilicet abc, abd, acd, bcd.

Numeri hujus Tabulae hanc habent proprietatem, ut duae combinationes alicujus numeri (ut binarii) sibi proximae (ut 2 et 1, quarum illa est unio, haec binio binarii) simul sumtae constituunt (3**) combinationem Numeri proxime majoris (ternarii) combinationum priorum (binionis et unionis) majori (nempe binioni) similem (sive erit 3** sive 2+1 binio ternarii, erit unio binarii + binio binarii).

Habent etiam hanc proprietatem Numeri hujus Tabulae, ut combinatio quaelibet (ut binio $\frac{y.\overline{y-1}}{1.2}$) multiplicata per $(y-2)$ numerum rerum (y) indice (2) minutum, et divisa per (3) indicem (2) unitate auctum exhibeat $\left(\frac{y.y-1.y-2}{1.2.3}\right)$ combinationem proxime majorem ejusdem numeri.

His proprietatibus demonstrandis nunc quidem supersedebimus, sunt enim satis ab aliis demonstratae, sed ex illis ducemus novas, circa Numerorum divisibilitates. Prima autem haec est:

Factus ex nummeris continuis (seu sola unitate differentibus) *quotcunque* (ut $y.y \quad 1.y-2$) *dividi potest per factum ex totidem continuis incipientibus ab Unitate* (1.2.3). Nam $\frac{y.y-1}{1.2}$ vel $\frac{y.y-1.y-2}{1.2.3}$ etc. est numerus combinationis Rerum; est ergo numerus integer. At si numerus aliquis integer exprimatur per modum fractionis, ut $\frac{y.y-1.y-2}{1.2.3}$, necesse est ejus Numeratorem $y.y-1.y-2$ dividi posse per denominatorem 1.2.3 seu 6.

Corollarium. Hinc quilibet *Numerus factus ex continuis dividi potest per numerum quemvis, qui non est major numero continuorum;* ita $y.y-1.y-2.y-3.y-4.y-5$ dividi potest per 2, item per 3, item per 4, item per 5, item per 6.

Ex his duci possent innumera theoremata circa potentiarum vel aliarum formularum divisibilitates, verbi gratia: $y.y-1$ sive $yy-y$ bifidus seu divisibilis per 2. Ergo omnis Numerus quadratus latere minutus est bifidus. Etiam omnis quadratus latere auctus est bifidus. Et *omnis quadrato-quadratus suo quadrato minutus est quadrifidus seu dividi potest per quaternarium,* imo per *duodenarium.* Sed haec nunc persequi non placet. Ne quis autem dubitet an regulae uniusmodi sint universales seu verificentur etiam cum latus est unitas, scire debet, Nullitatem seu Nihil esse numerum exacte divisibilem per quemlibet numerum; itaque etiam Unitatis quadrato-quadratus ipsius unitatis quadrato minutus, nempe $1-1$ sive 0, divisibilis erit per 12, nam $\frac{0}{12}$ est 0; sed de his alias.

Si Numerus rerum sit primitivus, combinatio ejus quaelibet per ipsum dividi potest, demta prima

et ultima. Sit combinatio v. g. quaternio $\frac{y.y-1.y-2.y-3}{1.2.3.4}$ et sit y Numerus rerum primitivus ex. g. 5, ajo eam dividi posse per 5. Cum enim y sit primitivus, nullum habebit divisorem praeter se ipsum, ideo nihil confert ad divisibilitatem, nisi in combinatione ultima, ubi ipse est inter divisores, sive si $y-1.y-2.y-3$ non sit divisibilis per 1.2.3.4, multiplicatus per y non fiet divisibilis (quia primitivus numerum multiplicans non reddit eum ex non-divisibili divisibilem nisi per se ipsum), at multiplicatus per y, dans $y.y-1.y-2.y-3$, est divisibilis per 1.2.3.4 ex hypothesi, ergo $y-1.y-2.y-3$ est divisibilis per 1.2.3.4, sive $\frac{y-1.y-2.y-3}{1.2.3.4}$ est integer. Is autem prodit, si combinatio proposita $\frac{y.y-1.y-2.y-3}{1.2.3.4}$ dividatur per suum numerum rerum y. Ergo ea divisione prodit integer, et proinde combinatio quaevis (excepta ultima) quae sic exprimitur, id est quaevis praeter y^0 seu nullionem sive primam, est per suum numerum rerum exacte divisibilis, si numerus rerum sit primitivus; ita 7.21.35.35 21.7 combinationes septenarii sunt divisibiles per 7.

Generalius: *Quaelibet combinatio, exceptis duabus extremis, divisibilis est per aliquem divisorem sui numeri rerum,* sive communem habet cum numero rerum divisorem, et ideo nunquam (exceptis duabus pene extremis, quae coincidunt cum ipso numero rerum) potest esse primitivus. Sit combinatio $y.y-1.y-2.y-3.y-4 \smile 1.2.3.4.5$, quae fit ex $y-1.y-2.y-3\ y-4 \smile 1.2.3.4$ quae est combinatio proxime praecedens numeri proxime minoris quam vocabimus C ducta in $\frac{y}{5}$; est ergo combinatio proposita $\frac{Cy}{5}$, C existente integro. Quodsi jam index 5 coincidit cum Cy seu cum combinatio est ultima, tunc non potest dividi $\frac{Cy}{5}$ per y; sed et ratiocinatio non procedit cum combinatio proposita est prima seu minima, nec datur C. In ceteris casibus debet vel C dividi per 5, quo casu erit $\frac{C}{5}$ integer, ac proinde $\frac{Cy}{5}$ erit divisibilis per y, nam dabit $\frac{C}{5}$ integrum; vel C non potest dividi per 5, tunc si 5 est primitivus, debet y dividi per 5, et $\frac{y}{5}$ erit divisor aliquis ipsius y integer, per quem poterit dividi $\frac{Cy}{5}$, sin esset derivativus, ut $\frac{Cy}{6}$, tunc combinatio proposita $\frac{Cy}{6}$ poterit dividi per aliquem ipsius 6 divisorem. Nam C, quod non potest dividi per 6, vel poterit dividi per aliquem ipsius 6 divisorem, ut 2, tunc poterit neccssario y dividi per alium ipsius 6 condivisorem, nempe 3, ut $\frac{Cy}{6}$ fiat integer, ergo restabit alius divisor ipsius y hac divisione per 6 non sublatus, per quem dividi poterit combinatio $\frac{Cy}{6}$; vel C non potest omnino dividi per ullum ipsius 6 divisorem, et tunc necesse est y vel cum 6 coincidere, quod fit in casu ultimae combinationis jam excluso, vel y dividi posse per 6, restabitque divisor aliquis ipsius y per quem dividetur $\frac{Cy}{5}$. Generaliter ergo omnis combinatio exceptis duabus extremis dividi potest per aliquem divisorem ipsius y, si non per ipsummet y.

Si combinatio proxime praecedens (C) numeri proxime praecedentis divisibilis est per indicem combinationis datae (6), tunc combinatio proposita $\left(\frac{Cy}{6}\right)$ dividi non potest per numerum rerum (y), sin illa non est divisibilis per indicem, tunc haec est divisibilis per suum numerum rerum. Est ergo nota reciproca. Demonstratio patet ex praecedenti demonstratione, ubi eam satis attigimus. Sed ut breviter tamen repetamus: Si $\frac{C}{6}$ est integer, utique $\frac{C}{6}$ y dividi potest per y; sin $\frac{C}{6}$ non est integer, nec $\frac{Cy}{6}$ dividi potest per y. Est enim $\frac{C}{6}$ quotiens divisionis per y factus.

Si combinatio aliqua (C) per suum indicem (4) unitate auctum (5) et ita primitivum dividi potest, tunc ejus numerus rerum (y—1) unitate auctus (nempe y) per hunc primitivum dividi non potest. Et, si ille non potest, tunc hic potest. Est ergo reciproca. Hoc ita

demonstratur: Si $\frac{y-1.y-2.y-3.y-4}{1.2.3.4}$ sive C est divisibilis per 5 seu indicem 4 unitate auctum, et 5 est primitivus, necesse est aliquem ex ipsis factoribus Numeratoris, nempe vel y—1, vel y—2, vel y—3, vel y—4, esse divisibilem per 5; et contra. Ratio: quia cum sit primitivus, non potest unus factorum dividi per unum divisorem ipsius 5, alius per alium, ut in se invicem ducti faciant aliquod divisibile per ipsum 5. Jam si aliquis ex his multiplicatoribus est divisibilis per 5, necesse est numerum, qui minus quam indice unitate aucto seu quinario a quolibet eorum distat, non esse divisibilem per 5. At y distat a quolibet eorum minus quam 5, nam a maxime remoto y—4 distat quaternario. Ergo si aliquis ex his multiplicatoribus divisibilis per 5, tunc y non est divisibilis per 5. Contra si nullus ex his multiplicatoribus est divisibilis per 5, tunc cum sint pauciores unitate quam 5, necesse est proximum ipsis, nempe y, esse divisibilem per 5, quod autem de multiplicatoribus omnibus, et de ipsa combinatione in casu divisoris primitivi verum est. Habemus ergo ostensum, quod proposueramus.

Cum numerus rerum (y) per indicem combinationis primitivum (5) dividi non potest, tunc solum et semper combinatio $\left(\frac{y.y-1.y-2,y-3.y-4}{1.2.3.4.5}\right)$ per ipsum numerum rerum dividi potest. Nam cum numerus rerum y per indicem combinationis primitivum 5 dividi non potest, tunc solum et semper numerus rerum praecedens y—1 unitate auctus, id est y, per indicem combinationis praecedentis 4, unitate auctum, primitivum 5 dividi non potest. Cum numerus praecedens y—1 per combinationis suae indicem 4 unitate auctum 4+1 primitivum dividi non potest, tunc solum et semper combinatio illa $\frac{y-1.y-2.y-3.y-4}{1.2.3.4}$ sive C per indicem suum unitate auctum 4+1 primitivum dividi potest, per propositionem praecedentem convertibilem. Est autem combinatio illa C proxime praecedens numeri proxime praecedentis. Jam cum combinatio proxime praecedens C numeri proxime praecedentis y—1 per indicem suum unitate auctum, seu per indicem combinationis propositae 5 dividi potest, tunc solum et semper ipsa combinatio proposita per suum numerum rerum y dividi potest, per propositio-

nem ante praecedentem convertibilem. Ergo cum numerus rerum etc. Q. E. D.

Ex hac propositione patet, *solos Numeros Rerum primitivos habere hanc proprietatem, ut quaelibet eorum combinatio per ipsos dividi possit*, seu attributum hoc supra de ipsis demonstratum esse convertibile. Nam inter indices combinationum numeri rerum est quilibet numerus ipso minor, ut inter indices quinarii sunt quaternio, ternio, binio, unio (nullionem autem primarii et ipsam ultimam, hoc loco quinionem, in his propositionibus semper exclusimus). Ergo si Numerus rerum est derivativus seu per aliquem primitivum divisibilis, dabitur aliqua ejus combinatio, cujus index erit ille ipse primitivus, sed illa combinatio non est per suum numerum divisibilis, *per prop. praecedentem.* Ergo omnis Numerus derivativus habet combinationem, quam non dividit.

Antequam pergamus, propositiones quaedam constituendae sunt de modo cognoscendi, quot in data serie continuorum contineantur numeri divisibiles per datum.

Numeri continui quotcunque incipientes cum unitate, tot continent numeros divisibiles per datum, quot in eorum maximi per datum divisi quotiente sunt unitates, ut 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13 continent numeros trifidos seu per ternarium divisibiles quatuor, quia 13 divisus per 3 dat neglecto residuo quotientem 4. Hoc ita demonstro: Si maximus 13 dividatur per ternarium sive per 3, prodit quotiens 4. Ergo ternarius 4 vicibus sumtis seu quadritrifidus non est major quam 13; et continue minuendo quotiente, et ternarius 3 vicibus seu tertrifidus et ternarius 2 vicibus seu bitrifidus, et ternarius 1 vice seu unitrifidus, multo minus sunt majores quam 13. Qui sunt omnes trifidi possibiles non majores quam 13, tot scilicet quot in quotiente 4 erant unitates. Hi autem omnes continentur in numeris omnibus ab unitate usque ad 13 simul sumtis, quia numeri continui incipientes ab unitate continent omnes numeros maximo non majores. Ergo tot continent trifidos, quot in maximi per 3 divisi quotiente sunt unitates.

Numeri continui quotcunque, quorum minimus est proxime major numero divisibili per datum, tot continent Numeros divisibiles per datum, quot totidem numeri continui incipientes cum unitate; ita

B 7.8.9.10.11.12.13 tot continent trifidos quot
A 1.2.3.4.5.6.7. Nam quilibet priorum seriei ex majoribus constantis vocetur B, quilibet respondens seriei minorum vocetur A, patet fore B aequa. A + 6. Nempe 7 est 1 + 6 et 8 est 2 + 6, et generaliter B quilibet est A senario numero scilicet trifido auctus; ergo B non est trifidus, nisi et A sit trifidus, et contra.

Numeri continui quotcunque, quorum minimus est proxime major numero divisibili per datum, tot continent numeros divisibiles per datum, quot in quotiente numeri ipsorum per datum divisi unitates. Patet ex duabus propositionibus praecedentibus. Nam numeri continui 7.8.9.10.11.12.13, quorum minimus est proxime major trifido, continent tot trifidos, quot totidem continui incipientes ab unitate 1.2.3.4.5.6.7 per praecedentem, hi vero tot quot eorum maximi 7 per 3 divisi quotiens 2 continet unitates. Maximus autem 7 est numerus omnium 1.2.3.4.5.6 7, ac proinde et omnium 7.8.9.10.11.12.13. Ergo numeri continui 7.8.9.10.11.12.13 tot continent trifidos, quot sunt unitates in quotiente 2 numeri multitudinis eorum 7 divisi per 3.

Numeri continui, quorum minimus est divisibilis per datum, tot continent numeros divisibiles per datum, quot in numeri eorum unitate minuti et deinde per datum divisi quotiente unitate aucto sunt unitates.

Sint numeri continui octo quorum minimus 6 est trifidus, 6.7.8.9.10.11.12.13; omittatur minimus, supererunt septem 7.8.9.10.11.12.13, in quibus numerus trifidorum est quotiens numeri 7 divisi per 3, at numeri initio positi octo unum praeterea trifidum habent, nempe minimum 6. Ergo si sint continui trifidi quotcunque ut 6.7 etc. 13, nempe octo, numerus eorum unitate minuatur, fiet 7; is dividatur per 3, quotiens erit 2. Huic adjectus 1, dabit 3 numerum trifidorum quaesitum.

Regula generalis investigandi Numerum Numerorum per datum divisibilium, qui in serie data Numerorum continuorum comprehenduntur: *Numerus maximus dividatur per datum, quotiens residuo neglecto servetur, et numerus minimus proxime inferior etiam dividatur per datum ac quotiens residuo neglecto iterum annotetur; subtrahatur quo-*

tiens minor a majori, residuum erit numerus divisibilium quaesitus.

Sit series continuorum data A 8.9.10.11.12.13;
compleatur retrorsum
usque ad unitatem, fiet series completa B 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13;
adjecta erit series continuorum ab
unitate seu series complens C 1.2.3.4.5.6.7; quaeruntur omnes trifidi seriei A. Hi erunt omnes trifidi seriei B (tot quot sunt unitates in quotiente numeri maximi 13 per 3 divisi) demtis omnibus trifidis seriei C, qui sunt tot quot unitates in numero maximo seriei C, nempe 7, per 3 diviso, qui numerus 7 minimo seriei A, nempe 8, proxime inferior est. Ergo omnes trifidi seriei A erunt $\frac{13}{3}$ | 4 seu 4 demto $\frac{7}{3}$ seu 2, seu 4—2 id est 2.

Si Numerus maximus seriei continuorum est divisibilis per datum, et numerus minimo proxime inferior est etiam divisibilis per datum, tunc numerus divisibilium per datum in serie data aequivalet numero terminorum diviso per datum, eritque illa divisio exacta.

Sit series data A 7.8.9.10.11.12.13.14.15
et series completa B 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15
et series complens C 1.2.3.4.5.6,
numerus maximus seriei datae 15 est trifidus, ejus minimo 7 proxime inferior 6 est etiam trifidus. Dico numerum trifidorum seriei A aequivalere numero terminorum seriei A, nempe 9, diviso per 3 eamque divisionem esse exactam. Nam numerus trifidorum seriei A aequivalet numero trifidorum seriei B, demto numero trifidorum seriei C. Trifidorum autem seriei B numerus est $\frac{15}{3}$ exactus, et trifidorum seriei C est $\frac{6}{3}$ exactus; ergo numerus trifidorum seriei A erit $\frac{15-6}{3}$ exactus; at 15—6 est numerus terminorum seriei A, ergo numerus terminorum seriei A divisus per 3 dat exacte quaesitum.

Si numerus maximus seriei continuorum est divisibilis per datum, et numerus minimo proxime inferior non est divisibilis per datum, tunc numerus divisibilium per datum in serie data, quotientem numeri terminorum per datum divisi excedit unitate.

Sit series data A 8.9.10.11.12.13.14.15
et series completa B 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15
et series complens C 1.2.3.4.5.6.7,
dico numerum trifidorum seriei A esse $\frac{8}{3}$ (neglecto residuo) + 1 id est 3. Nam trifidi seriei A sunt $\frac{15}{3}$ id est 5, demto $\frac{7}{3}$ neglecto quotiente seu 2. 15 sit exacte divisibilis per 3, non vero 7. Hinc fit, ut detrahendum sit unitate minus, quam fuisset si successisset divisio, itaque non tantum est $\frac{8}{3}$ neglecto residuo, seu $\frac{15}{3}-\frac{7}{3}$ neglecto residuo, sed praeterea 1, quia in $\frac{15}{3}$ ob exactam divisionem nil negligitur, sed negligitur tantum in detrahendo. Clarius: trifidi seriei A sunt $\frac{15}{3}-[\frac{7}{3}-\frac{1}{3}]$ seu demtis $\frac{7}{3}$ neglecto residuo $\frac{1}{3}$ seu $\frac{15}{3}-\frac{7}{3}+\frac{1}{3}$. Jam $\frac{15}{3}-\frac{7}{3}+\frac{1}{3}$ est $\frac{8}{3}$ $\frac{2}{3}+1$, et $\frac{8}{3}-\frac{2}{3}+1$ est $\frac{8}{3}$ neglecto residuo + 1. Ergo trifidi seriei A sunt $\frac{8}{3}$ neglecto residuo + 1, seu numerus terminorum seriei A, qui est 8, divisus per 3, neglecto residuo, et addito 1.

Si numerus maximus seriei continuorum non est divisibilis per datum, et numerus minimo proxime inferior est divisibilis per datum, tunc numerus divisibilium per datum in serie data quotientem numeri terminorum per datum divisum aequat.

Sit series data A 7.8.9.10.11.12.13.14.15.16
completa B 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16
complens C 1.2.3.4.5.6,
dico numerum trifidorum seriei A esse $\frac{10}{3}$. Est enim $\frac{16}{3}$ neglecto residuo, demto $\frac{6}{3}$ exacto.

Si numerus maximus seriei continuorum non est divisibilis per datum et numerus minimo proxime inferior itidem non est divisibilis per datum, numerus tamen seriei est divisibilis per datum, tunc numerus divisibilium per datum in serie data quotientem numeri terminorum per datum divisum aequat.

Sit series data A 5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16
series completa B 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 11.12.13.14.15.16
complens C 1.2.3.4
16—4 est numerus terminorum seriei A, et $\frac{16}{3}$ neglecto residuo, demto $\frac{4}{3}$ neglecto residuo, est aequ. $\frac{16-4}{3}$ neglecto residuo, nam $\frac{16}{3}$ neglecto residuo est $\frac{16}{3}-\frac{1}{3}$ et $\frac{4}{3}$ neglecto residuo est $\frac{4}{3}-\frac{1}{3}$, et

$\frac{16}{3}$ negl. resid. — $\frac{4}{3}$ negl. resid. est $\frac{16}{3} - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ seu $\frac{16-4}{3}$.

Quod semper ita contingere ostendam: Sit $y-x$ aequ. bl, sitque y aequ. $al+m$ et x aequ. $cl+n$, erit $y-x$ aequ. $al-cl+m-n$ aequ. bl. Est autem $m \urcorner l$, ergo $m-n$ non est divisibilis per l, ergo $+m-n$ est 0, seu m aequ. n. Semper ergo duo residua se destruent, seu si duorum numerorum differentia est per datum divisibilis, et neuter numerorum est per datum divisibilis, residua sunt aequalia.

Si nec numerus maximus seriei continuorum, nec numerus minimo proxime inferior, nec numerus terminorum seriei per datum exacte dividi possint, recurrendum est ad regulam generalem, quam esse deprehendi hanc: Si serie continuorum data, maximus et minimo proxime inferior (x) per datum (l) dividantur, sitque residuus posterior (n) major (non major) priore (m), numerus divisibilium per datum in serie comprehensorum erit unitate superior (aequalis) quotienti numeri terminorum ($y-x$) divisi per datum (l).

Sit y numerus terminorum seriei completae seu maximus seriei datae, et x numerus terminorum seriei complentis seu minimo seriei datae proxime inferior, et $y-x$ numerus terminorum seriei datae, et sit y aequ. $al+m$, x aequ. $bl+n$, positis a, b quotientibus, m, n residuis. Numerus orthotomorum (ex. gr. trifidorum) seriei completae $\frac{y}{l}$ neglecto residuo sit a, seu $\frac{y}{l} - \frac{m}{l}$; Numerus orthotomorum seriei complentis $\frac{x}{l}$ neglecto residuo sit b seu $\frac{x}{l} - \frac{n}{l}$. Quorum differentia erit $\frac{y}{l} - \frac{x}{l} + \frac{n}{l} - \frac{m}{l}$ seu $\frac{y-x}{l} + \frac{n-m}{l}$, qui est numerus orthotomorum seriei datae. Ergo $\frac{y-x}{l}$ aequ. $a-b+\frac{m-n}{l}$, et quoniam $m \urcorner l$, ergo si $y-x$ dividatur per l, erit $a-b$ quotiens et $m-n$ residuus, posito m esse majorem quam n. Ergo $\frac{y-x}{l}$ neglecto residuo erit aequ. $a-b$, ac proinde Numerus Terminorum seriei datae $y-x$ per l datum divisus neglecto residuo, erit $a-b$ seu erit numerus orthotomorum, idem

est, si sit $m-n$ aequ. 0, quia tunc nullum est residuum. Sin contra sit n major quam m, tunc erit $\frac{y-x}{l} + \frac{n-m}{l}$ aequ. $a-b$, eritque $a-b$ major quam $\frac{y-x}{l}$, ergo et major quam $\frac{y-x}{l}$ neglecto residuo, qui tamen excessus ipsius $a-b$ super $\frac{y-x}{l}$ est minor unitate, quia $n \urcorner l$, ergo et $n-m \urcorner l$, ergo $\frac{n-m}{l} \urcorner 1$. Ergo et excessus ejus super $\frac{y-x}{l}$ neglecto residuo, est minor duabus unitatibus; componitur enim ex $\frac{n-m}{l}$ minore quam 1 et ipso residuo ipsius $\frac{y-x}{l}$ etiam minore quam 1. Excessus autem integri $a-b$ super integrum comprehensum in $\frac{y-x}{l}$ seu quotientem numeri terminorum per datum divisi, cum sit aliquis et tamen minor binario, erit 1. Ergo conclusum habemus: Si n residuus numeri x minimo datae seriei continuorum proxime minoris, divisi per datum l est major quam m, residuus numeri y maximi seriei continuorum datae, tunc $a-b$ numerus divisibilium per datum l comprehensorum in seriei data est unitate major quam $\frac{y-x}{l}$ integer (neglecto residuo) quotiens numeri terminorum seriei per datum l divisi; sin vero residuus ille n hoc m non major, sed vel minor vel aequalis, tunc $a-m$ numerus divisibilium per datum in serie data comprehensorum est quotienti numeri terminorum seriei per datum diviso, neglecto residuo, aequalis.

Ex praecedenti propositione apparet etiam, si residuus minimo inferioris in serie data continuorum per datum divisi est major quam residuus maximi divisi per eundem, fore numerum per datum divisibilium in serie data continuorum comprehensorum majorem numero per datum eundem divisibilium comprehensorum in serie totidem continuorum incipientium cum unitate; alioqui vero fore semper aequalem, nunquam vero minorem. Patet, inquam, ex praecedenti, quia is numerus divisibilium comprehensorum in serie totidem incipientium ab unitate, idem est cum quotiente ipsius numeri terminorum per datum diviso.

Si series continuorum incipiat a numero divisibili per datum, et numerus continuorum non sit divisibilis per datum, erit numerus divisibilium per datum in serie comprehensorum unitate major quotiente numeri terminorum per datum divisi, seu numero divisibilium per datum, qui in serie totidem continuorum cum unitate incipientium comprehenduntur.

Sit series 6.7.8.9.10.11.12.13, cujus minimus est trifidus, utique proxime minor 5, divisus per ternarium, relinquet maximum residuum possibilem, nempe 3 — 1. Ergo numerus maximus seriei 13 divisus per 3 relinquet residuum, qui non potest esse major quam prior, erit ergo vel minor vel aequalis. Si aequalis, tunc duobus residuis m et n se destruentibus erit $\frac{y-x}{l}$ aequ. a—b integro, seu numerus terminorum y—x erit exacte divisibilis per l; et contra, si sit exacte divisibilis per l, tunc $\frac{m-n}{l}$ utique destrui debet, ergo m et n aequales. Quando vero numerus terminorum non est exacte divisibilis per n, ut hoc loco, tunc residui m et n non sunt aequales; est autem n seu 3 — 1 maximus, qui esse potest, ergo m est minor. Hoc autem posito utique numerus divisibilium per datum l comprehensorum in serie data, erit unitate major quotiente numeri terminorum divisi per l, seu numero comprehensibilium in totidem continuis incipientibus ab unitate.

Factus ex numeris continuis quotcunque dividi potest per factum ex totidem continuis incipientibus ab unitate seu $\frac{5.6.7.8.9.10.11.12}{1.2.3.4.5.6.7.8}$ est integer. Nam numerator continet totidem ad minimum bifidos, totidem trifidos, totidem quadrifidos etc., quot nominator, per propositionem antepraecedentem. Ergo numerator fit ad minimum ex 2 toties in se ducto, 3 toties in se ducto, 4 toties in se ducto, quoties nominator ex illis fit, seu omnes potentiae binarii, ternarii etc. vel alterius primitivi, quae in se invicem ductae constituunt nominatorem, eae in se invicem ductae cum aliis tamen praeterea in ipsos ductis constituunt et numeratorem.

Si factus ex continuis quotcunque divisus per totidem continuos incipientes cum unitate, adhuc dividi potest per proxime majorem divisoribus derivativum, necesse est ut dividi possit praeter priores per quemlibet novi divisoris divisorem. Ut si $\frac{5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5}$ dividi potest per 6, debet dividi posse et per 2 et per 3. Ergo vel habebit numerator plures bifidos quam nominator, si nempe 5—1 divis. per 2 reliquisset majus residuum, quam 9 divis. per 2, quod non est; vel habebit numerator magis bifidos, nempe 8, cubum in numeratore loco quadrati 4 in nominatore. Quoniam autem methodum habemus sciendi, an plures bifidi vel trifidi vel alii quicunque insint numeratori, quam nominatori, superest ut investigemus etiam an pluries. Ubi considerandum, divisibilium per dignitates numeri seriem seu ordinem investigari utile futurum esse. Binarii dignitatum hic est ordo:

2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.22.24.26.28.30.32.34.36.38.40.42.44.46.48

divisib. per

2.4.2.8. 2. 4. 2.16. 2. 4. 2. 8. 2. 4. 2.32. 2. 4. 2. 8. 2. 4. 2.16

3.6.9.12.15.18.21.24.27.30.33.36.39.42.45.48.51.54.57.60.63.66.69.72.75.78.81

divisib. per

3.3.9. 3. 3. 9. 3. 3.27. 3. 3. 9. 3. 3. 9. 3. 3.27. 3. 3. 9. 3. 3. 9. 3. 3.81

Sed haec alias prosequemur. Nunc considerandum, si $\frac{5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5}$ dividi potest per 6, adeoque per 2, necessario altiorem potentiam ipsius 2 confici ex bifidis numeratoris, quam nominatoris. Et quia non sunt plures bifidi in numeratore, quam nominatore, videndum, an non sint plures quadrifidi in numeratore quam in nominatore, quod sciri eadem methodo potest, qua id in bifidis scivimus.

IX.

EXERCITIUM AD PROMOVENDAM SCIENTIAM NUMERORUM.

(1) Proponitur problema in rationalibus Numeris: dato numero a, exhibere numerum x, qui faciat, ut $x + \frac{a}{x}$ sit quadratus, aut ostendere impossibilitatem. Is quadratus sit yy, et fiet $xx + a = xyy$.

(2) Si x et y sint integri, etiam a est integer, nam ex aequatione praecedenti est $a = xyy - xx$. Itaque cum a aequetur integro, erit integer.

(3) Si a et y sint integri, etiam x est integer. Esto enim x fractus $z : w$ cujus numerator sit z et denominator w, fractione ad minimos terminos reducta, seu ita ut z et w sint primi inter se. Ita ex aequatione articuli 1 fiet $zz + aww = zwyy$, seu $zz : w = zyy - aw$. Ergo $zz : w$ est integer, quod est impossibile, cum z et w sint primi inter se, nisi w sit 1 seu nisi x sit integer. Hic ex supposito fracto concluditur non fractus.

(4) Sed licet a et x sint integri, nihil prohibet saepe y esse fractum, ut mox patebit.

(5) Si numeri omnes requirantur integri, necesse est, ad hoc ut problema succedat, a esse bc, confactoribus b et c existentibus integris, talibus ut $b + c$ sit quadratus, ipse scilicet yy, alter autem horum confactorum velut b erit x. Quia enim $a = xyy - xx$ per artic. 1, ideo positis a et y adeoque (per artic. 3) et x integris, erit a divisibilis per x. Posito ergo $a = bc$ et $b = x$, fiet $bc = byy - bb$ seu $b + c = yy$, ut asserebatur. Exempli causa si a sit 14, ubi $b = 2$ et $c = 7$ et $2 + 7 = 9$, potest esse $x = 2$, nam $2 + \frac{14}{2} = 9$. Potest etiam esse $x = 7$, nam $7 + \frac{14}{7} = 9$. Nec refert utrum alteruter horum b et c aequetur unitati, alter vero ipsi a. Verb. gratia a sit 15, quia ergo $15 + 1 =$ quadrato 16, ideo potest x esse 1; nam $1 + \frac{15}{1} = 16$; potest etiam x esse 15, nam $15 + \frac{15}{15} = 16$.

(6) Si numeri omnes requirantur integri, habetur solutio, id est, quaesitum quodvis possibile vel impossibilitas. Cum enim dato numero a integro bini haberi possint ejus confactores quoties dari possunt, patet an et quinam confactores possint componere quadratum. Horum jam quilibet potest esse x

quaesitus, summa autem confactorum erit quadratus ipse yy. Quodsi tales confactores non dentur, problema erit impossibile, per artic. praecedentem, et quando $a + 1$ est quadratus, ideo cum 1 et a sint confactores ipsius a, x potest esse 1, item a.

(7) Si omnes numeri requirantur integri, non alius primitivus potest esse a, quam 3. Est enim a primitivus, ergo bini confactores non possunt esse alii, quam a et 1. Ergo (per artic. 5) $a + 1 = yy$ seu $a = yy - 1 = y + 1, y - 1$. Ergo (major) $y + 1$ est a, et (minor) $y - 1$ est 1. Ergo $y = 2$. Ergo $y + 1$ seu a est $= 3$. Et x erit 1 vel 3, nam $1 + \frac{3}{1} = 4$ et $3 + \frac{3}{3} = 4$.

(8) Si omnes numeri requirantur integri, et postulentur a et x primi inter se, necesse est, ad hoc ut problema sit possibile, datum a unitate auctum facere quadratum, qui quadratus erit yy, sed x erit 1. Neque enim numerorum primorum inter se unus, nisi sit unitas, alterius factor esse potest; primos autem inter se vocamus, qui non aliam habent communem mensuram quam unitatem.

(9) Si soli a et x requirantur integri, datus scilicet et quaesitus, nec referat, utrum resultans yy sit integer vel non; et y sit $v : w$ fractione ad minimos terminos redacta, et proinde v et w sint integri primi inter se, w abeunte in 1 eo casu, quo y est integer; ponaturque $a = bc$ et $x = bz$, ipso b existente maxima mensura ipsorum a et z et abeunte in 1 eo casu, quo a et x sint primi inter se: his positis dico fore $x = bww$. Nam in aequatione articuli 1, pro x substituendo bz et pro y substituendo $v : w$, fiet $bbzzww + bcww = bzvv$ seu fiet $bzzww + cww = zvv$ seu $bzz + c = zvv : ww$, itaque $zvv : ww$ est integer, cum sit aequalis integro $bzz + c$. Hinc cum zvv dividi possit per ww, sed vv et ww non possint habere communem mensuram (ex hypothesi), necesse est ut z dividi possit per ww. Rursus (eodem argumento) quia $cww : z$ est integer, seu cww dividi potest per z, z autem et c sunt primi inter se (alioqui b non esset maxima communis mensura ipsorum bc et bz contra hypoth.), necesse est ww dividi posse per z. Hinc cum paulo ante ostensum sit etiam z dividi posse per ww, consequens est z et ww esse numeros inter se aequales, et proinde cum posuerimus x esse bz, fiet $x = bww$.

(10) Iisdem positis necesse est, cc esse majorem quam 4bww. Nam ex aequatione articuli praecedentis pro z ponendo ww fiet $bw^4 + c = vv$, seu $c = vv - bw^4$ seu $c = v + ww\sqrt{b}, v - ww\sqrt{b}$. Jam in integris productum ex duobus unitate majoribus est majus pro-

ducente quovis. Ergo c est major quam $v+ww\sqrt{b}$, item c est major quam $v-ww\sqrt{b}$. Ergo et c est major quam horum differentia, quae est $2ww\sqrt{b}$, seu cc major est quam $4bw^4$. Excipitur casus, quo excessus ipsius v seu ipsius $\sqrt{(bw^4+c)}$ super de$w\sqrt{b}$ est minor unitate.

(11) Iisdem positis et posito praeterea a et x esse integros primos inter se, x est quadratus nempe ww, nam cum x sit bww per praecedentem artic., eo casu b abit in 1.

(12) Iisdem positis, si a et x sint integri primi inter se, habebit a duos confactores d et e, quorum differentia erit duplum quadrati et is quadratus erit x. Veluti si a sit 33 et x sit 4, et d sit 3 et e sit 11, erit $11-3=8=2.4=2x$ et $4+\frac{33}{4}=\frac{49}{4}$. Nam ex aequatione articuli 9, ubi erat $bzzww+cww=zvv$, pro z ponendo ww (per artic. 9) et pro b ponendo 1 (ex hyp. articuli praesentis et praecedentis) et pro c ponendo a (nam cum sit $bc=a$, faciendo $b=1$ fit $c=a$) prodibit $w^4+a=vv$ seu $a=vv-w^4=v+ww$, $v-ww$. Sunt ergo duo confactores ipsius a, quorum unus minor, nempe d, sit $v-ww$, alter major, nempe e, sit $v+ww$, et fiet $e-d=2ww$, ipso ww existente x, per praeced.

(13) Si ipsorum a et x maxima communis mensura b sit quadratus $\beta\beta$, tunc c (quotiens ex a divis. per b) habebit binos confactores d et e, quorum differentia divisa per β, radicem quadraticam ipsius b, dabit duplum quadrati, qui quadratus multiplicatus per b, dabit x.

Exempli causa sit a, 729, potest x esse 36, horum maxima communis mensura b est $9=\beta\beta$. Nam $729:9=81=c=de=3.27$, et $e-d$ $(=27-3)=24$ et $24:\beta=24:3=8=2.4=2ww$, et $ww=4$, et $bww=36=x$. Et fiet $36+\frac{729}{36}=\frac{225}{4}$. Nam ex aequatione articuli 9 pro z ponendo ww, et pro b ponendo $\beta\beta$ fit $c=vv-\beta\beta w^4=v+\beta ww$, $v-\beta ww$. Ergo c habebit binos confactores $d=v-\beta ww$, et $e=v+\beta ww$, et $e-d$ erit $=2\beta ww$. Ergo $e-d,:\beta=2ww$ et $e-d,:2\beta,,b=bww=x$. Casus articuli 10 vel 11 sub hoc etiam articulo continetur, cum b adeoque et β est 1.

(14) Si a datus et x quaesitus requirantur rationales integri in aequatione $x+\frac{a}{x}=yy$, nec referat utrum y sit integer an fractus, invenire numerum x quoties est possibilis, aut invenire impossibilitatem, idque per tentationes numero definitas. Primum dispici potest, an

a habeat binos confactores, quorum summa sit quadratus, et habebitur aliqua solutio per artic. 5. Deinde dispici potest, an a divisus exacte per quadratum (qui etiam potest, esse 1) det numerum habentem binos confactores d et e, quorum differentia divisa per radicem dicti quadrati, det duplum novi quadrati. Ita enim habebitur aliqua solutio per artic. 13. Sed generaliter ut omnis solutio possibilis aut impossibilitas inveniatur, quaerantur bini quivis confactores ipsius a, qui vocentur b et c, et pro quibusvis b et c sumatur integer w talis, ut sit $4bw^4$ minor quam cc per artic. 10, tenteturque an x possit esse bww per artic. 9, et cum res succedit, ut hoc modo fiat $x+\frac{a}{x}$ vel quod idem est $bww+\frac{c}{ww}$ vel quod eodem redit bw^4+c aequalis quadrato rationali integro, tunc et non aliter habetur quaesitum. Quodsi nullus w inter limites praescriptos det x succedentem, problema pro numero dato a impossibile est.

Ut melius intelligatur praxis hujus solutionis, subjiciemus aliquot exempla. Cum nempe numerus a datus est integer, et x quaesitus requiritur integer, a datus sit 19, quaeritur an sit aptus ut inveniri possit x integer pro aequatione $x+\frac{19}{x}=yy$.

	b	19	1
	c	1	19
	cc	1	361
w,1	$4bw^4$	76	4
	x = bww	19 succed.	1 non succedit.
w,2	$4bw^4$	. . . .	64
	x = bww	. . . .	4 non succedit.
w,3	$4bw^4$	. . . .	324
	x = bww	. . . .	9 succedit.
w,4	$4bw^4$	. . . .	1024 justo major.

Nempe a posito 19, b est 19 vel 1, et c est 1 vel 19; itaque cc est 1 vel 361. Jam cum b est 19 et c est 1, tunc posito w, 1, fit $4bw^4=76$, qui numerus est justo major, id est major quam cc seu quam 1. Ergo pro b, 19 et c, 1 frustra tentatur major w, nam sic $4bw^4$ fiet adhuc majus excedens. Pergamus ergo ad b, 1 et c, 19, erit cc, 361. Hinc si w sit 1, fiet $4bw^4=4$, qui numerus minor est quam 361. Ergo tentetur, an $x=bww=1$ succedat; sed non succedit, quia $1+19=20$, qui non est quadratus. Eodem modo res non succedit, cum w sumitur 2, etsi enim $4bw^4$ fiat 64, minor quam 361, tamen $x=bww=4$ non succedit. Sed si sumatur w, 3, tunc $4bw^4$ erit 324 minor quam 361, et $x=bww$ erit 9. Jam $9+\frac{19}{9}=\frac{100}{9}$, qui est quadratus. Ergo hic casus succedit. Sed posito $w=4$ fit $4bw^4$, 1024 justo major seu maj orquam 361. Ergo frustra assumitur w adhuc major quam 4, et quia non dantur alii b et c (confactores ipsius 19) quam b, 19 et c, 1, vel b, 1 et c, 19, alia solutio haberi nequit.

Sumamus aliud exemplum: postuletur x integer, posito a esse 39, seu quaeritur $x+\frac{39}{x}=yy$.

	b	39	13	3	1
	c	1	3	13	39
	cc	1	9	169	1521
w, 1	$4bw^4$	justo maj.	justo maj.	12	4
	$x=bww$	. . .	. . .	3 succ.	1 non succedit
w, 2	$4bw^4$	. . .	. . .	192 just. maj.	64
	$x=bww$	. . .	. . .	. . .	4 non succedit
w, 3	$4bw^4$	. . .	. . .	. . .	324
	$x=4bw$	. . .	. . .	. . .	9 non succedit
w, 4	$4bw^4$	. . .	. . .	. . .	1024
	$x=bw^4$	. . .	. . .	. . .	16 non succedit
w, 5	$4bw^4$	. . .	. . .	. . .	2500 justo maj.

itaque non aliter problema succedit, quam si x sit 3, ubi fit $3+\frac{39}{3}$ seu $3+13=16$.

Postuletur denique x integer, posito a esse 42, seu quaeritur $x+\frac{42}{x}=yy$. Et schema operationis erit tale:

	b	42	21	14	7	6	3	2	1
	c	1	2	3	6	7	14	21	42
	cc	1	4	9	36	49	196	441	1764
w, 1	$4bw^4$	j.m.	j.m.	j.m.	28	24	12	8	4
	$x=bww$	.	.	.	7 n.s.	6 n.s.	3 n.s.	2 n.s.	1 n. s.
w, 2	$4bw^4$	.	.	.	j. m.	j. m.	192	128	64
	$x=bww$	.	.	.	.	.	12 s.n.	8 n.s.	4 n. s.
w, 3	$4bw^4$	.	.	.	.	.	j. m.	j. m.	324
	$x=bww$	.	.	.	.	.	.	.	9 n. s.
w, 4	$4bw^4$	.	.	.	.	.	.	.	1024
	$x=bww$	.	.	.	.	.	.	.	16 n. s.
w, 5	$4bw^4$	.	.	.	.	.	.	.	justo maj.

Anmerkung. Das Format des Buches gestattete es nicht, das vorstehende Schema genau nach dem Ms. abzudrucken; es mussten, um Raum zu gewinnen, die Worte justo maj. mit j. m. und non succedit mit n. s. wiedergegeben werden.

Itaque cum a est 42 et x requiritur integer, problematis solutionem non succedere ostensum est.

Superest ut solvendi problematis modum quaeramus, cum a datus est fractus, x autem est integer; item cum a est integer, x autem permissus est fractus; ac denique cum a est fractus et x etiam permissus est fractus. Sed haec nunc persequi non vacat. Tantum paucis annotare placet, posito a integro, x autem fracto, positisque integris b, c, q, u, v fore $a=bc$, $x=buu:qq$, $q=v:qu$ et $bu^4+cq^4=vv$, ita tamen ut b possit esse unitas, sed q erit numerus integer unitate major. Erunt autem c et u, b et q, u et q, v et u, primi inter se. Et numeri fracti x et y, ad minimos terminos fractionum reducti, non quidem habent communem denominatorem, habent tamen denominatores, quorum est communis divisor. Numeratores autem ipsius x et ipsius y non possunt habere communem divisorem, nisi si quem habent communem cum ipso a. Itaque dato numero integro $a=bc$, ut haberi possit $x+\frac{a}{x}=yy$, quaeruntur integri u et q, primi inter se, et u primus cum c, et q primus cum b, tales, ut fiat bu^4+cq^4 aequalis quadrato cuidam vv, nec problema solvi potest, quia u et q quales diximus inveniantur. Sufficeret autem inveniri per tentationes numero definitas, ut supra articulo 14.

X.

OBSERVATION NOUVELLE DE LA MANIÈRE D'ESSAYER SI UN NOMBRE EST PRIMITIF.

(Aus einem Briefe Leibnizens an den Herausgeber des Journals des Savans. Février 1678.)

J'ai fait quelques observations sur les nombres primitifs, qui sont de conséquence, à mon avis, pour la perfection de la science des nombres, dont on appelle primitifs ceux qui ne peuvent être divisés, ni produits par multiplication, au lieu que tous les autres peuvent être produits et divisés par ceux-ci. Si leur progression était bien connue, elle servirait à nous decouvrir le mystère des nombres en général: mais elle a paru si bizarre jusques ici, qu'on n'en a pû trouver aucune marque ni proprieté affirmative: et tout ce qu'on en sçait, c'est qu'ils sont indivisibles: encore est-il malaisé de le reconnaitre dans les grands nombres, sans en faire l'essai par une multitude d'autres, ce qui est étrangement prolixe. Je crois avoir trouvé le vrai chemin pour pénetrer dans leur nature: mais n'ayant pas eu encore le loisir de l'achever, je vous donnerai ici une proprieté positive, qui me parait curieuse et utile quoiqu'elle ne soit pas réciproque; car au moins tous les nombres qui ne l'ont pas, seront exclus d'abord. Voici cette proprieté. Tout nombre primitif au dessus de cinq étant diminué ou de 1 ou de 5 disjontivement, est divisible par 6. Par exemple, 7 moins 1 est 6, 11 moins 5 et 6, 13 m. 1 est 12, 17 m. 5 est 12, 19 m. 1 est 18, 37 m. 1 est 36, 101 m. 5 est 96, 103 m. 1 est 102, qui divisé par 6 donne 17, 10007 m. 5 divisé par 6 donne 1667, 510511 m. 1 divisé par 6 donne 85085 etc.

XI.

INVENIRE TRIANGULUM RECTANGULUM IN NUMERIS CUJUS AREA SIT QUADRATUS.*)

Ajo id problema esse impossibile.

Inter varias demonstrandi rationes hanc reperi pulcherrimam, quia per multas alias praeclaras propositiones ducit.

*) Leibniz hat bemerkt: 29. Decembr. 1678.

Propositio I. Si sint duo triangula similia, et latus trianguli unius fit multiplicatione lateris homologi trianguli alterius per aliquem numerum, etiam area illius fiet ex area hujus per ejusdem Numeri quadratum multiplicata.

Nam areae triangulorum similium sunt inter se ut quadrata homologorum laterum, adeoque si latus fit multiplicatione lateris homologi per aliquem numerum, fiet quadratum lateris multiplicatione lateris homologi per quadratum ejusdem numeri. Ac proinde idem est in areis Triangulorum ipsorum.

Propositio II. Si area trianguli rectanguli primitivi in numeris integris, quadratus esse non potest, etiam derivativi in integris, imo et trianguli rectanguli cujuscunque in numeris fractis, area non potest esse quadratus.

Primo. Nam primitivum et derivativum sunt similia, ergo per prop. 1. area primitivi sit ex divisa area derivativi per quadratum numeri derivativum metientis. Ergo si area derivativi est quadratus, etiam quod ea per quadratum divisa sit, nempe area primitivi erit quadratus; quod si impossibile ostendatur, etiam aream derivativi quadratum non esse posse patet.

Secundo. Trianguli rectanguli in numeris fractis latera reducantur ad communem denominatorem, manifestum est tres numeratores fore tria latera homologa alterius trianguli similis in integris; et aream trianguli rectanguli in fractis in quadratum communis illius denominatoris ductam dare aream trianguli homologi in integris per prop. 1, quae si quadratus esse non potest, neque id, quo in quadratum ducto ipsa producitur, nempe area trianguli in fractis, quadratus esse poterit.

Problema III Si in triangulo rectangulo duo latera quaelibet habeant communem mensuram, tertium habebit eandem communem mensuram.

Est enim tertium nihil aliud quam latus summae vel differentiae quadratorum a duobus reliquis. Jam ex hypothesi duo ista reliqua latera habent communem mensuram, ergo et quadrata eorum habent communem mensuram, nempe quadratum communis mensurae laterum. Ergo quadratorum ab ipsis summam vel differentiam metitur communis horum quadratorum mensura, nempe quadratum communis mensurae laterum. Quodsi ergo hoc quadratum summam vel differentiam illam metitur, etiam latus hujus quadrati (scilicet communis mensura duorum reliquorum laterum) latus summae illius vel differentiae, id est latus trianguli tertium metietur.

P r o p o s i t i o IV. Duo numeri integri inaequales, non quadrati, quorum in se invicem ductu producitur quadratus, habent aliquam communem mensuram.

Ut a^2b, b vel a^2b, bc^2, unde fit a^2b^2 vel $a^2b^2c^2$. Nam quivis quadratus producitur ex quadratis factorum lateris. Itaque dividi potest in duos factores non nisi tribus modis, vel enim omnia quadrata divelluntur, uno latere hinc, altero illinc manente, et duo illi factores sunt aequales, nempe radix (v. g. abc, abc); vel nulla quadrata divelluntur, et tunc aliqua quadrata hinc, aliqua illinc, consistunt, et uterque factor est quadratus (v. g. a^2, b^2c^2); vel aliqua quadrata divelluntur, aliqua non divelluntur, et tunc latus ejus quod divellitur, hinc pariter atque illinc consistit (v. g. a^2b, bc^2) ac proinde duo factores divellendo facti habent mensuram communem, nempe hoc ipsum latus. Ergo si duo factores quadrati sint inaequales, et non quadrati, habebunt communem mensuram, numerum scilicet aliquem.

P r o p o s i t i o V. Omnia latera trianguli rectanguli in integris primitivi sunt numeri impares praeter unum latus circa rectum, quod semper est par (si quidem area est integer).

Primum patet, omnia latera non posse esse pares, alioqui triangulum non esset primitivum, quia communis mensura foret binarius. Nec duo quaelibet possunt esse pares, alioqui et tertium foret per prop. 3. Ergo si quod est par, erit unicum tantum ex tribus. Est autem semper aliquod, si quidem area est integer, quia alioqui latere uno in alterius circa rectum dimidium ducto non potest prodire integer. Quid fiat, cum area non est integer, non est hujus loci; quaerimus enim aream in integris, quae sit quadratus.

P r o p o s i t i o VI. Omnibus ut supra positis, latus impar circa rectum et dimidium lateris paris non possunt esse simul quadrati.

Constat et dudum ab aliis demonstratum est, latera trian-

guli rectanguli in numeris integris omnia sic posse exprimi:

$$\underbrace{x^2 - y^2 \mid 2xy}_{\substack{\text{latera circa}\\ \text{rectum}}} \quad \Big| \quad \underset{\text{hypotenusa}}{x^2 + y^2}$$

Ajo $x^2 - y^2$ et xy non posse simul esse quadratos, posito triangulum de quo agitur esse primitivum. Nam si xy est quadratus, tunc per prop. 4. vel x et y habebunt communem mensuram, vel tam x quam y erit quadratus. Prius fieri hic non potest, alioqui et omnia trianguli latera habebunt communem mensuram, quod est contra naturam trianguli primigenii. Restat ergo posterius, ut tam x quam y sint quadrati. Eodem modo si $x^2 - y^2$ (seu $x+y$ in $x-y$) est quadratus, tunc per prop. 4. vel $x+y$ et $x-y$ habent communem mensuram, vel sunt quadrati ambo. Prius fieri non potest, nam si $x+y$ et $x-y$ essent commensurabiles, nullam possent etiam habere communem mensuram quam binarium, nisi x et y etiam commensurabiles velimus, quod paulo ante explosimus. Sed nec binarium habent pro communi mensura, alioqui essent pares, ergo et factum ex ipsis $x^2 - y^2$ esset par, cum tamen sit impar per prop. 5, quippe cum alterum latus circa rectum $2xy$ sit par. Restat ergo posterius, ut tam $x+y$ quam $x-y$ sint ambo quadrati. Cumque supra ostenderimus, in praesenti hypothesi etiam x et y esse ambos quadratos, habebimus quatuor quadratos y, $x-y$, x, $x+y$, sed hoc quoque impossibile est, quia ita tres haberentur quadrati progressionis arithmeticae, $x-y$, x, $x+y$, differentiam habentes quadratum, quod est absurdum. Ergo impossibile est, latus impar et dimidium lateris paris simul esse quadratos.

P r o p o s i t i o VII. Iisdem positis, iidem non possunt esse aequales.

Sint xy et $x^2 - y^2$ aequales, si fieri potest; ergo $y^2 + xy$ aequ. x^2, ergo $y+x$ in y erit quadratus; et $x^2 - xy$ aequ. y^2, ergo $x-y$ in x erit quadratus. Ergo duo numeri $x+y$ et y (item $x-y$ et x) per prop. 4. vel erunt aequales, quod esse non potest, vel commensurabiles, quo facto et x et y erunt commensurabiles contra ostensa in demonstratione propositionis praecedentis; vel erunt simul quadrati, sed illic duos $x+y$ et y itemque hic duos $x-y$ et x, et in summa hos quatuor