tam, saltem ad surdam simpliciorem. V. gr. sit proposita radix $\sqrt{ab}$ et a sit 2 et b sit 6, tunc ab erit 12, et $\sqrt{ab}$ seu $\sqrt{12}$ idem erit quod $2\sqrt{3}$, quia 12 idem est quod 4.3 seu quod $\sqrt{4}$ in $\sqrt{3}$ seu quod $2\sqrt{3}$.

Quantitates negativae, cum a minori subtrahi debet majus, saepe oriuntur in calculo, et licet non videantur respondere ad quaestionem, reapse tamen respondent perfectissime, non tantum enim indicant, quaestionem fuisse male conceptam (etsi venia danda sit, quia praevideri non poterat), sed etiam quomodo fuerit concipienda et quid ad eam recte conceptam sit respondendum. Ex. causa quaeritur, quantum Titius habeat in bonis, subducto calculo eorum quae habet et quae debet; reperitur eum non modo nihil habere in bonis (nisi scilicet ipsum debitum, quod significat non habere, uti meritum sceleris), sed etiam habere minus quam nihil, id est acquisitionibus adhuc quibusdam opus ei fuisse ad nihil habendum. Itaque ostendit haec solutio, quaerendum fuisse non quid habeat (habet enim nihil), sed quid accipere eum oporteat, ut omnino liber intelligatur. Et patet, eum qui haeres ejus fiat sine inventarii beneficio, non lucrari, sed perdere tantam summam, quanta est signo — affecta. Itaque dum quis acquirit x seu a—b, reperitur autem postremo a—b seu x idem valere quod —c, apparet utique eum, qui x acquirit, revera perdere summam c. Unde vicissim patet, eum, si perdat x seu —c, lucrari, et judicem qui haeredi talem haereditatem x adimat, revera ipsi adjudicare summam c; atque adeo subtractionem quantitatis negativae esse additionem affirmativae ejusdem molis. Nempe quantitas x seu —c et quantitas $\underline{+c}$ habent eandem *molem* c, eritque —x idem quod $\overline{-c}$, id est $-\overline{-c}=+c$. Et hoc est quod vulgo dicitur, — in — facere +.

Similis quaestio in lineis fieri potest; v. gr. quaeritur quantum aliquis per horam progrediatur hinc versus Brunsvigam, si quovis quadrante horae progrediatur primum per passus 100 et mox durante adhuc eodem quadrante regrediatur per passus 150; dico absoluta hora progressum talis viatoris versus Brunsvigam fore passuum — 200, seu revera finita hora 200 passibus magis abfore a Brunsviga, quam inde aberat hora incepta, atque adeo non lucratum esse, sed sub progressus specie perdidisse. Et progressus iste poterit appellari falsus, cum revera sit regressus. Tales

errores, etsi non tam manifeste absurdi, quotidie contingunt in rebus humanis.

Numeri fracti habent Numeratorem et Denominatorem; et quidem si denominator sit unitas, numerus fractus revera est integer; sit enim fractus $a:b$ et sit $b=1$, fiet $a:b=a:1=a$. Idem contingere potest, si numerator possit exacte dividi per denominatorem, ut sit $a=bc$, fiet $a:b=bc:b=c$.

Unde patet, indicationes regressivas hoc habere, ut explicatione facta saepe possit evanescere signum regressivi, atque adeo sub fractis in speciem contineri integros, sub irrationalibus in speciem vel Radicalibus contineri posse et rationales; quemadmodum et suo loco patebit, sub transcendentibus in speciem contineri etiam posse ordinarias quantitates.

Porro omnis fractus vel purus est, vel integrum habet sub se latentem. Purus est, si numerator sit minor denominatore, ut $2:3$; sed integer admistus est, si numerator sit major denominatore, ut $11:3$, nam 3 detrahendo quoties fieri potest, patet detrahi posse ter, quia est quotiens, et restare 2 adeoque fieri $11:3 = 3+(2:3)$ seu $\frac{11}{3}=3+\frac{2}{3}$.

Surdus vel potius *Radicalis* seu radice affectus variat tum pro varietate extrahendae radicis, tum pro varietate eorum, ex quibus extrahenda est. Radix extrahenda est duplex, *pura* vel *affecta*. Pura est, cum potentia Radicis aequatur datae quantitati; affecta, cum formatum ex pluribus diversis radicis quaesitae potentiis tanquam membris, datae quantitati aequatur. Ex. causa si $x^2=6$ seu si quadratum ipsius x aequatur dato 6, fit $x=\sqrt[2]{6}$, quae est radix pura; idem est si sit $x^5=45$, fit enim $x=\sqrt[5]{45}$. Sed si sit $x^5+3x^2=45$, ita ut non soli surdesolido, sed propter ea triplo ipsius quadrati aequalis sit numerus 45, tunc extractio est non pura, sed affecta.

Et sciendum est, inventam rationem hactenus haberi omnes radices affectas aequationis quadraticae, cubicae et biquadraticae reducendi ad puras; sed hanc methodum non esse ulterius promotam ad aequationes surdesolidas et altiores, de quo suo loco.

Radix pura vel est quadratica vel cubica vel biquadratica vel surdesolida etc. adeoque variat tot modis quot variari possunt potentiae.

Quanquam, ut suo loco dicemus, radices sub potentiis, et potentiae sub radicibus secundum certas considerationes comprehendi possunt, imo dantur sive potentiae sive Radices extraordinariae quae sub hactenus explicatis non continentur. Sed de his suo loco, nam pertinent ad Transcendentes.

Extractio fieri potest vel semel omnino vel per gradus. Ex. gr. extractio Radicis biquadraticae fieri potest vel extrahendo statim radicem biquadraticam, vel extrahendo primum radicem quadraticam, et ex residuo rursus radicem quadraticam. Ita interdum fit, ut succedat prior extractio radicis quadraticae, sed non posterior; v. gr. si debeat extrahi Radix biquadratica ex 4 seu si quaeratur $\sqrt[4]{4}$, idem est ac si quaeratur $\sqrt[2]{\sqrt[2]{4}}$, id est $\pm\sqrt[2]{2}$.

Radices (purae) variant ratione eorum, ex quibus sunt extrahendae, quae rursus vel sunt quantitates rationaliter expressae, vel quantitates radicales. Et radix quae sub vinculo suo continet plura membra, ex quibus unum ad minimum est radicale, dicitur universalis, ex. gr. $\sqrt{a+\sqrt{ab}}$ seu $\sqrt{(a+\sqrt{ab})}$.

Quantitates surdae, quae nullum continent radicem universalem, vel sunt simplices, quarum scilicet potentia aliqua (pura) est rationalis; vel sunt compositae, constantes ex membris duobus vel pluribus, quarum vel alterutrum est rationale vel ambo sunt irrationalia. De his sub nomine Apotomarum et similibus multum disseruit Euclides in libro decimo, sed quibus post hodiernos exprimendi modos immorari haud est necesse.

Illud notari sufficit, quantitatem potentia rationalem dici, cujus quadratum est rationale, verb. gr. $\sqrt{ab}$, nam ejus quadratum est ab, idque etiam in compositis locum habet. $\sqrt[2]{a+\sqrt{aa-bb}}+\sqrt[2]{a-\sqrt{aa-bb}}$ est quantitas potentia rationalis, nam ejus quadratum est $+a+\sqrt{aa-bb}+a-\sqrt{aa-bb}+2\sqrt{a+\sqrt{aa-bb}}$ in $\sqrt{a-\sqrt{aa-bb}}$; jam $\sqrt{a+\sqrt{aa-bb}}$ in $\sqrt{a-\sqrt{aa-bb}}$ est $\sqrt{bb}$ seu $\pm b$; ergo fit, hoc quadratum esse $+a+\sqrt{aa-bb}+a-\sqrt{aa-bb}\pm 2b$ seu $2a\pm 2b$. Unde $\sqrt{2a\pm 2b}$ idem est quod erat $\sqrt{a+\sqrt{aa-bb}}+\sqrt{a-\sqrt{aa-bb}}$; sed hoc obiter.

Caeterum ne quis putet, omnes quantitates radicales fortasse aliqua nobis incognita hactenus ratione posse fieri rationales, sciendum, Euclidem demonstrasse (quemadmodum et alias vel ex calculo haberi potest) quod multae quantitates sunt incommensurabiles inter se adeoque rationem inter has quantitates exprimi per

Numerum qui dicitur surdus, id est qui est incommensurabilis unitati. Fractus vero est unitati commensurabilis. Quod ita patet: sit fractus quicunque. ut $3:5$; dividatur unitas in partes 5, patet unam quintam partem unitatis esse mensuram communem tam fractionis $\frac{3}{5}$, quam unitatis, nam $\frac{1}{5}$ in unitate constat contineri quinquies, in $\frac{3}{5}$ contineri ter. Caeterum quomodo continuatis operationibus per integros accedi possit ad fractos, et per rationales ad surdos, suo loco patebit.

Ex irrationalibus oriuntur quantitates impossibiles seu imaginariae, quarum mira est natura, et tamen non contemnenda utilitas; etsi enim ipsae per se aliquid impossibile significent, tamen non tantum ostendunt fontem impossibilitatis, et quomodo quaestio corrigi potuerit, ne esset impossibilis, sed etiam interventu ipsarum exprimi possunt quantitates reales.

Itaque quemadmodum saepe licet liberare formulam a signo — seu quantitate negativa, et a quantitate fracta, aut a surda; ita licet interdum calculum liberare ab imaginaria, idque vel operatione depressiva vel operatione regressiva, seu evolutiva, quod est desideratum, vel saltem operatione involutiva seu progressiva, quod tamen et ipsum suum usum habet, et aliquando ad evolutionem conducere potest. Sed haec tunc erunt explicanda, cum de operationibus agetur.

Nunc tantum nonnulla praelibare oportet, ut variae quantitatum species intelligantur.

Quantitates imaginariae oriuntur, cum radices quadraticae, vel involventes quadraticas extrahendae sunt ex quantitatibus negativis, ex. gr. $\sqrt[2]{-1}$, $\sqrt[4]{-1}$ (seu $\sqrt[2]{\sqrt[2]{-1}}$), $\sqrt[6]{-1}$ (seu $\sqrt[3]{\sqrt[2]{-1}}$), ad quas reduci possunt caeterae. Nam $\sqrt[2]{-2}$ idem est quod $\sqrt[2]{2}$ multipl. per $\sqrt[2]{-1}$.

Hae expressiones id habent mirabile, quod in calculo nihil involvunt absurdi vel contradictorii, et tamen exhiberi non possunt in natura rerum seu in concretis. Quomodo autem significent quaestionem male esse constitutam, apparet in exemplis, ubi facta debita mutatione in datis, evanescunt imaginariae. Nempe res ostendit, nos quaesiisse punctum in aliqua linea, quod tamen quaerendum erat extra ipsam, vel linea aliter erat assumenda. Res exemplo patebit: Datus sit (fig. 20) circulus ABC, quem tangat recta AE, ex cujus rectae puncto aliquo F educatur normaliter recta

FG occurrens circulo in punctis H et L, patet in casu quo F incidit in φ, ita ut fiat AF vel Aφ aequalis radio circuli, duo puncta occursus H et L coincidere in unicum punctum λ, et ex sectione fieri contactum. Sed si F adhuc magis removeatur ab A, ut si ponatur in (F), tunc ductam (F)(G) nullo modo posse occurrere circulo. Unde $\varphi\lambda$ est omnium FH maxima, et omnium FL minima. His positis, aliquis Analyticus curiosus merito quaerat, quid factura sit natura rerum, ut calculantem eludat, qui sumens AF radio majorem, nihilominus quaerat punctum occursus cum dato circulo, quod punctum tamen est impossibile. Sane idem plane instituitur calculus, sive AF sit major sive minor radio; imo calculus fieri potest generalis; quomodo ergo discemus impossibilitatem? cum nunquam quicquam hic in calculo assumatur, ut adeo prodire possit per se et sua natura absurdum. Sciendum igitur, naturam nihil aliud habuisse, quod inquisitioni impossibili imponeret, quam imaginarias quantitates seu radices ex negativis.

Res clarius patebit, si digressione non inutili ipsum calculum instituamus. Centrum circuli sit K. Jam AF sit x, FH vel FL sit y. Radius KA vel FM vel Kλ vel KH vel KL sit r, et HL bisecetur in medio M, patet esse KM aeq. AF seu x et HM quadrat. — KA quadrat. — KM quadrat. seu HM qu. $= rr - xx$ seu $HM = \sqrt{rr - xx}$, et $FL = FM$ (seu r) $+ LM$ seu HM. Ergo FL seu $y = r + \sqrt{rr - xx}$, seu generaliter $y = r \pm \sqrt{rr - xx}$, ut scilicet diversa puncta H et L uno eodemque calculo ambiguo designentur, quanquam suffecerit scribere $y = r + \sqrt{rr - xx}$, quoniam omnis radix per se ambigua est, de quo suo loco. Hinc si $rr - xx$ sit $= 0$, fit $y = r$ et evanescit irrationalitas adeoque et ambiguitas; et patet in casu cessantis ambiguitatis seu coincidentis utriusque puncti H et L, ipsam AF seu x coincidere cum r (eo ipso dum $rr - xx = 0$ seu $xx = rr$) adeoque et y seu $\varphi\lambda$ fieri aequalem ipsi radio r seu AK. Sed si x vel AF ponatur major quam radius r vel AK, tunc $rr - xx$ est quantitas negativa, quippe residuum post detractionem majoris xx a minore rr. Hic ergo fuit modus, quo natura indicare potuit, y in eo casu quo x est majus quam r, esse impossibile.

Unde discimus, quaestionem non esse bene constitutam, et vel debere circulum ABC sive radium ejus r assumi majorem, vel eodem manente circulo, ipsam x vel AF assumendam minorem, ut quaesitum obtineri possit. Et nisi darentur tales quantitates imaginariae in calculo, impossibile foret institui calculos generales,

seu valores reperiri possibilibus et impossibilibus communes, qui sola differunt explicatione literarum.

Superest, ut nonnihil addam de quantitate inassignabili, sive ea sit infinite parva, sive infinita, saltem ut aliqua de illis notitia habeatur; caetera enim suo loco explicabuntur. Recta TC (fig. 21) curvam AC(C) secet in duobus punctis C et (C), ex quibus demittantur ad axem AB perpendiculares CB et (C)(B). Jam ex C in (B)(C) agatur normalis CD, patet CD esse differentiam abscissarum AB et A(B); similiterque D(C) esse differentiam ordinatarum BC et (B)(C). Et si recta TC axi AB occurrat in T, patet triangula TBC et CD(C) esse similia. Sed in casu contactus, cum recta TC curvam AC(C) non secat sed tangit, seu cum puncta C et (C) coincidant vel quod eodem redit, infinite parvo (sive infinitesimo) distant intervallo, patet triangulum CD(C) fieri inassignabile, constans ex lateribus infinite parvis, et CD esse elementum abscissae et D(C) esse elementum ordinatae, et C(C), quemadmodum et suo loco patebit, esse elementum curvae; adeoque Triangulum hoc inassignabile CD(C) simile esse Triangulo assignabili seu ordinario TBC, imo ope hujus Trianguli inassignabilis seu interventu rationis inter quantitates inassignabiles CD et D(C) (quam noster calculus differentialis exhibet per quantitates ordinarias seu assignabiles) inveniri rationem inter quantitates assignabiles TB et BC, adeoque modum ducendi tangentem TC.

Caeterum non tantum quantitatis infinite parvae seu infinitesimae, sed etiam quantitatis infinitae usus est in calculo. Ex. causa constat ex opticis, cum radii diversi veniunt ex eodem puncto, idque punctum ponitur infinite vel inassignabiliter vel ut subinde loqui soleo, incomparabiliter abesse, radios fieri parallelos. Unde radii ex sole venientes finguntur paralleli, et directiones gravium etsi ad idem terrae centrum tendant, tamen ob magnam hujus centri distantiam, pro parallelis habentur, quasi sol aut centrum infinite abessent.

Sed quia mirabitur aliquis, quomodo in calculo assumtis meris quantitatibus finitis, prodire tamen possit aliqua quantitas infinita, sciendum est $\frac{1}{0}$ seu $1 : 0$ esse quantitatem infinitam, adeoque unitatem esse mediam proportionalem inter nihilum vel quasi et infinitum, adeoque si quantitas aliqua ordinaria dividatur per nihilum, quotientem esse infinitum. Talis autem divisio in calculo contingere potest, quod exemplo ostendam. Sit (fig. 22) angulus rectus KAH, cujus crura utcunque producta intelligantur et in uno ejus latere sumatur recta AH. Descripta sit curva LC talis *naturae*. ut quocunque ejus puncto sumto, ut C, atque inde ad rectam AH demissa perpendiculari CB, fiat semper rectangulum ABC (seu sub AB et BC) aequale eidem constanti quadrato ab AH, quam curvam ex Conicis constat esse Hyperbolam. Jam AH vocetur a, et HB vocetur x, fiet AB = a—x, et BC vocetur y. Ergo ex dicta curvae proprietate, cum sit AB in BC aequ. AH quadr. seu $\overline{a-x}y=aa$, utique fiet $y=aa:\overline{a-x}$ seu valor ipsius y sive BC oritur, si aa dividatur per a—x. Sed quando B incidit in A, ita ut AB evanescat seu fiat aequalis nihilo, fiet a=x, seu AH=HB, ergo a—x=0. Ergo in eo casu fiet $y=aa:0$ seu $\frac{aa}{0}$, ergo y est quantitas infinita, adeoque recta normalis ad ipsam AH educta ex A versus Hyperbolam est infinita, et licet continue ad eam accedat, nullum tamen punctum assignari potest, quo ei occurrat, ideoque solet dici Asymptota, quae res multis incomprehensibilis visa est, integrisque olim libris materiam dedit. Sed haec ideo tantum paucis libare placuit, ut infinitae magnitudinis designatio per finitas, ususque hujus designationis intelligeretur.

Superesset transcendentium finitarum uberior explicatio; sed hanc rem in locum convenientiorem rejicere maluimus, ut tandem tractationi de Notione simplici Analyseos Mathematicae, variisque generibus numerorum sive Quantitatum Matheseos universalis tractationi subjectarum, variisque connotationibus quantitates afficientibus, tanquam jacto jam fundamento, finem imponamus.*)

---

*) Am Schlusse des Concepts hat Leibniz hinzugefügt: De Enuntiationibus, Argumentationibus et Methodis postea dicemus.

VI.

PRIMA CALCULI MAGNITUDINUM ELEMENTA DEMONSTRATA IN ADDITIONE ET SUBTRACTIONE, USUQUE PRO IPSIS SIGNORUM + ET —.

(1) **Magnitudo** est quod in re exprimitur per numerum partium determinatarum.

Scholium. Ex. gr. orgyiae (quantum homo brachia extendere potest) magnitudo censetur exprimi numero sex pedum, vel (quia pes 12 pollicum est) per numerum 72 pollicum; Ulnae vel cubiti magnitudo per numerum unius et dimidii pedis, vel per unum pedem et sex pollices.

(2) a, b et similes notae significant numeros rerum exprimentes, qui scilicet ipsis debent assignari, posito aliquam esse rem, cui unitas assignetur, quam **Mensuram** appellamus.

Scholium. Sit pes p, pollex π, orgyia a, cubitus c, p erit 12π, a erit 6p vel 72π, c erit $1p+\frac{1}{2}p$ vel $\frac{3}{2}p$ vel $1p+6\pi$ vel 18π. Hinc si p (pes) sit mensura vel si ei assignetur unitas, a erit 6, c erit $\frac{3}{2}$, π erit $\frac{1}{12}$; sin π (pollex) sit mensura vel unitas, p erit 12, c erit 18, a erit 72. Si l sit latus quadrati, diagonalis d erit ut $l\sqrt{2}$, vel si l sit 1, d erit $\sqrt{2}$.

Homogenea inter se sunt, quorum magnitudines eadem mensura pro unitate sumta per numeros exprimi possunt.

(3) **Aequalia** sunt quorum unum alteri substitui potest salva magnitudine. Et ita designatur a=b, id est ipsi a ubique substitui potest b in magnitudinum calculo, et talis enuntiatio dicitur **aequatio**, velut in numeris $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$, in lineis pes = 12 pollices vel $p=12\pi$.

(4) **Axioma.** a=a.

(5) **Theorema.** Si a=b, sequitur esse b=a.

Nam quia a=b (ex hypothesi), ergo pro a (per 3) substitui potest b. Substituatur ergo b loco priore ipsius a in aequatione a=a (vera per axioma 3), fiet b=a. Quod erat demonst.

(6) **Theorema.** Si a=b et b=c, erit a=c, vel ut vulgo enuntiant: quae sunt aequalia uni tertio, aequalia sunt inter se.

Nam quia a=b (ex hypothesi priore), poterit in ea substitu-

(per 3) pro b ipsi aequale (ex hyp. posteriore) c, et ex $a=b$ fiet $a=c$. Q. E. D.

Additio.

(7) Definitio. Si pluribus magnitudinibus simpliciter positis, ut a, b, ex hoc ipso fiat nova ipsis homogenea, ut m, operatio dicetur Additio, nova aequatio dicetur summa et repraesentatio erit talis $+a+b=+m$. Et + vel plus erit signum additionis, id est simplicis positionis. Idem est in pluribus, ut si $+a+b+c=m$.

Scholium. Res scilicet redit ad simplicem additionem numerorum, per quos ob eandem rem pro unitate positam magnitudines exprimuntur.

(8) Theorema. $+a+b=+b+a$.

Patet ex praecedenti, quia ibi nihil refert, quo ordine collocentur; sufficit unum cum alio poni.

(9) Explicatio. Signum + omni notae magnitudinis sine signo sumtae praefigi potest, aut praefixum intelligi. Sed initio saepe omitti solet, itaque $a=+a$ et $a+b=+a+b$. Hinc et $++a=+a$, ut si ponatur $f=+a$, fiet $a=+a=f$ (ex hypoth.) $=+f=++a$.

(10) Explicatio. $+0+a=a$, seu 0 est signum nihili, quod nihil addit.

(11) Theorema. Si aequalibus addas aequalia, fiunt aequalia, seu si sit $a=l$ et $b=m$, erit $a+b=l+m$.

Nam $a+b=a+b$ (per 3), itaque in altero $a+b$ pro a ponendo l (ex hyp. priore) et pro b ponendo m (ex hyp. posteriore) quod licet (per 2), utique ex $a+b=a+b$ fiet $a+b=l+m$. Q. E. D.

Subtractio.

(12) Ab a subtrahere b significat in magnitudine, in qua ponitur a, sumere aequalem ipsi b, eamque tollere, idque indicatur scribendo: $a-b$ vel $+a-b$. Hinc si in magnitudine, in qua est a, nihil aliud esse intelligatur quam b, restat nihil, adeoque $+b-b=0$. Et — (signum denotans minus vel subtractionem) significat id quod positum fuit vel ei aequale, seu uno verbo ejus quantitatem positam rursus tollendo, perinde esse quoad magnitudinem sublatam ac si ponendo eam et rursus tollendo actum esset nihil. Si quid aliud adest, residuum appellatur.

(13) Theorema. Si ab aequalibus auferas aequalia, residua sunt aequalia, seu si sit $a=l$ et $b=m$, erit $a-b=l-m$.

Nam $a-b=a-b$ (per 3), in posteriore pro a ponatur l (ex hyp. 1.) et pro b ponatur m (ex hyp. 2.), ergo ex $a-b=a-b$ fiet $a-b=l-m$. Q. E. D.

(14) Theorema. Si a quantitatibus duabus auferas aequalia, et residua sint aequalia, ipsae quantitates sunt aequales, seu si sit $a-b=l-m$, et $b=m$, erit $a=l$.

Nam si aequalibus $a-b=$ (ex hyp. 1) $l-m$ addas aequalia (ex hyp. 2.) b et m, nempe priori b, posteriori m, fient (per 11) aequalia $a-b+b=l-m+m$, id est (per 12) $a=l$. Q. E. D.

(15) Theorema. Si ab aequalibus auferas duas quantitates, et residua sint aequalia, erunt quantitates aequales, seu si sit $a=l$ et $a-b=l-m$, erit $b=m$.

Nam $a-b=l-m$ (per hyp. 2.), ergo addendo utrobique aequalia $b+m$ et $b+m$, fient (per 11) aequalia $a-b+b+m=l-m+b+m$, ergo (per 12 junct. 8) $a+m=l+b$, a quibus aequalibus si aequalia a et l (per hyp. 1.) auferantur, fient (per 13) residua aequalia $m=b$. Q. E. D.

(16) Theorema. Si $a=b+e$, erit $a-b=e$.

Nam ab utroque aequalium auferendo b fient aequalia $a-b=b+e-b$, id est (per 12) $a-b=e$. Q. E. D.

(17) Theorema. Si $a=-b$, erit $b=-a$.

Nam quia $a=-b$ (ex hyp.), ergo addendo aequalibus istis aequalia b et b (per 3) fient (per 11) aequalia $a+b=-b+b$, ergo (per 12) $a+b=0$ seu (per 16) $b=0-a$ seu (per 10) $b=-a$. Q. E. D.

(18) Theorema. $-a-\underline{-a}=0$.

Nam — a designetur per f seu sit $-a=f$. Jam $f-f=0$ (per 3), ergo pro f ponendo aequale ipsi (ex hyp.) $-a$, fiet $-a--a=0$. Q. E. D.

(19) Theorema. $--a=+a$.

Nam $-a--a=0$ (per 18) et $0=-a+a$ (per 12), ergo (per 6) $-a--a=-a+a$, unde utrobique addendo a fient (per 11) aequalia $+a-a--a=-a+a+a$, et proinde (per 12) $0--a=0+a$ seu (per 10) $--a=+a$. Q. E. D.

(20) Theorema. $-+a=-a$ aut $+-a=-a$.

Patet ex 9.

(21) *Theorema.* In omni aequatione licet membrum abjicere ab una parte et signo contrario affectum ponere in altera.

Sit $f+a-b=h$, dico fore $f=h-a+b$. Nam in aequatione (ex hyp. vera) $f+a-b=h$ addatur utrobique $-a+b$, fiet inde $f+a-b-a+b=h-a+b$, id est (per 12) $f=h-a+b$. Q. E. D.

(22) *Explicatio.* Quod de formula sub *vinculo* comprehensa significatur, intelligendum est de singulis membris vinculo inclusis, ut $-(+a-b)$ vel $-\overline{+a-b}$ significat $-(+a)-(-b)$ seu (per 9) $-a--b$, id est (per 19) $-a+b$.

(23) *Theorema.* Addenda ascribuntur signis retentis, seu $f+(a-b)=$ (per 22) $f+a-b$.

Nam $f+(a-b)=f+a+-b=$ (per 20) $f+a-b$.

(24) *Theorema.* Subtrahenda ascribuntur signis mutatis, $+$ in $-$, et $-$ in $+$, seu $f-(a-b)=f-a+b$.

Nam $f-(a-b)=$ (per 21) $f-a--b=$ (per 19) $f-a+b$. Q. E. D.

Aliter: Sit $a-b=e$, ajo esse $-e=-a+b$ seu $f-e=f-a+b$. Nam $+e-e=+a-b-a+b$ (per 12), ergo ab aequalibus tollendo aequalia, illinc $+e$, hinc $+a-b$, restabunt (per 13) aequalia $-e$ et $-a+b$. Q. E. D.

Applicatio calculi ad res, ubi de toto, parte, majore, minore, positivo et privativo.

(25) *Explicatio.* Si explicando notas formulae per res ipsas, verbi gratia per lineas rectas sibi addendas vel subtrahendas, evanescat tandem subtractio vel signum $-$, ita ut semper destruendo id quod est signo $-$ affectum (verb. gr. $-b$) per aequalis molis signo $+$ affectum (nempe $+b$), tandem nihil aliud remaneat in formula vel ei aequivalente se, ex. gr. linea, quam quod sit affectum signo $+$: tunc tota formula dicitur designare quantitatem *positivam*; sin contra postremo signum $+$ evanescat, remanente $-$, tunc formula denotat quantitatem *privativam* seu nihilo minorem, hoc est talem, ut ad ipsam addenda sit ipsius *moles*, quo fiat nihil. Exempli causa si esset formula $f+a-b$, et esset $f+a=e+b$, et hae literae omnes forent quantitates positivae, quae explicatae per res, nullum in ultima resolutione deprehenderetur continere signum $-$, patet $f+a-b$ significare $+e$. Nam in hac formula pro $f+a$ substituendo $e+b$, fiet $e+b-b$, id est e. Contrarium esset, si in ultima resolutione nul-

lum remaneret signum $+$, ut si esset formula $f+a-d$, et esset $d=f+a+g$, tunc $f+a-d$ significabit $-g$. Nam pro $-d$ in formula $f+a-d$ substituendo valorem fiet $f+a-f-a-g$, id est $-g$. Hinc patet, quando duae quantitates signis contrariis affectae conjunguntur, semper alterutrum signorum penitus posse tolli per explicationem unius quantitatis, quatenus continet alteram quantitatem (vid. 12). Patet etiam, ut formula $f+a-d$ (quae quantitatem privativam $-g$ significat) fiat nihil, addi debere g (seu $+g$, ejusdem *molis* cum $-g$, sed affectum contrario signo) seu esse $f+a-d+g=0$, quia $f+a-d=-g$; jam $-g+g=0$ vel resolutione resumta $f+a-d=f+a-f-a-g$, ergo $f+a-d+g=f+a-f-a-g+g$, id est 0.

Scholium. Inspiciantur figurae duae, ubi in priore (fig. 23) progressus fit per lineam rectam f, et huic in directum adjectam rectam a, regressus autem (per puncta designatus) ab extremo adjectae a, in eadem recta totali $f+a$ fit per rectam b: ita in recta $f+a$ remanet e, adeoque est $f+a-b=+e$. In posteriore (fig. 24) progressus fit ut ante, sed regressus in eadem $f+a$ fit per ipsam rectam d majorem quam $f+a$, et excedentem quantitate g. Unde talis progressus est falsus sive putatitius, et qui sic progredi se putat, revera regressus est quantitate seu mole g, et est $f+a-d=-g$. Itaque signum $+$ designat progressum, signum $-$ regressum, et quod in lineis, idem in aliis augmentis et decrementis intelligi potest, velut in accepto et expenso.

(26) *Definitio.* Si sit $a+b=f$ et sint ipsorum a, b, f quantitates positivae, dicetur f *totum* et a, b dicentur *partes*. Idemque est, si sint plura, ut $a+b+c=f$. Requiritur igitur, ut quantitates sibi addi adimive possint, simulque ut sint positivae.

(27) *Definitio.* *Minus* est, quod aequale est parti alterius, nempe majoris, verb. gr. sit $f=a+b$ et $g=a$, dicetur f majus, et g minus, et scribetur $f \ulcorner g$ et $g \urcorner f$.

Scholium. Caeterum cautio in definitione totius et partis expressa, adeoque etiam ad majus minusque pertinens, nempe ut a, b, f etc. sint hoc loco quantitates positivae, necessaria est, alioqui si fiat $a+b=m$, non sequitur m esse majus quam a vel b, aut haec esse partes ipsius m, etsi sint *membra* formulae aequalis ipsi m; nam fieri potest, ut b (verbi gratia) sit revera quantitas negativa aequalis ipsi $-d$, posito d esse positivam, et tunc a existente positiva pro $a+b=m$ fieret $a-d=m$. Unde patet, a fore majus quam m; tantum abest, ut possit esse ejus pars.

(28) Theorema. Pars est minor toto, vel totum est majus sua parte.

Sit $a+b=f$, erit a minus quam f. Nam a aequale est ipsa a (per 3); jam quod aequale ipsi a est minus quam $a+b$ seu quam f (per 27), ergo a est minus quam f. Q. E. D.

(29) Definitio. Homogenea vel comparabilia sunt, quorum unius quantitas ab alterius quantitate semel aut saepius subtrahi potest, ut subtractum relinquat nihil aut aliquid se minus.

(30) Theorema. Duo homogenea tunc sunt aequalia, si alterum altero nec minus sit nec majus.

Nam homogenea sunt (ex hyp.), ergo (per 29) quantitas unius eorum ab alterius quantitate semel subtracta aut relinquit nihil, quo facto erunt aequalia (per 12), aut relinquit aliquid (se rursus minus vel majus), et tunc parti ejus, a quo subtractio facta est, aequale erit (vid. 12) adeoque (per 27) erit minus. Q. E. D.

(31) Theorema. Majus majore est majus minore, seu si $a \ulcorner b$ et $b \ulcorner c$, erit $a \ulcorner c$.

Nam quia $a \ulcorner b$ (hyp. 1), erit (per 27) $a=b+l$, et quia (hyp. 2) $b \ulcorner c$, erit (per 27) $b=c+m$, qui valor ipsius b substituatur (per 3) loco ipsius b in aequatione inventa $a=b+l$, et fiet inde $a=c+m+l$, ergo (per 27) $a \ulcorner c$. Q. E. D.

(32) Problema. Invenire b medium arithmeticum inter a et c, id est ita ut b tanto sit majore a minus quanto est minore c majus.

Constructio. Addantur in unum a et c, et summae dimidium erit b quaesitum.

Nam quia (ex hyp. constructionis) b est dimidium ipsius $a+c$, erit duplum b aequale duobus dimidiis, hoc est toti $a+c$, seu $a+c$ erit aequale duplo b, sive fiet $a+c=b+b$, ergo (per 21) $a-b=b-c$, id est erunt differentiae extremorum a medio b aequales, sive excessus a super b aequatur excessui b super c. Q. E. D.

VII.

CONSPECTUS CALCULI.

(1) Numeri simplices	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2) Literae	0	a	b	c	d	e	f	g	h	k	l
Lineae	N	NA	NB	NC	ND	NE	NF	NG	NH	NK	NL
	A	AB	AC	AD	FL	EL	DL	CL	BL	AL	
	B	BC	BD	etc.							
	etc.	etc.	CE	GL							
	L	KL	etc.								
			HL								
(3) Scala	N	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L

(4) Totum: e, 5, NE. Partes: NB, BE; b, c; 2, 3.

(5) Totum est aequale omnibus partibus, d aequ. $b+c$; 5 aequ. $2+3$; NE aequ. NB + BE.

(6) Majus una, $d \ulcorner c$, 5 majus quam 3.

(7) Pars minor toto, $c \urcorner d$, 3 minus quam 5.

(8) Additio simplex: si ad 2 addas 3, fiet $2+3$ sive 5; $b+c$ sive e; $2a+3a$ aequ. $5a$; NB + BE aequ. NE; sive si ab N progrediaris in B et a B progrediaris in E, progressus eris ab N in E, cadet autem punctum B inter N et E.

(9) Signum +, plus, initio omitti solet, $2+3$ aequ. $+2+3$.

(10) Subtractio simplex: si ab e subtrahas b, fit $e-b$ sive c; $5-2$ sive 3; NE—EB aequ. NB; sive si ab N progressus sis in E, et ab E regressus in B (et cadet B inter N et E), progressus eris ab N in B.

(11) Si aequalibus $g \mid 7$, et $c+d \mid 3+4$ addas (auferas) aequalia $e \mid 5$, et $b+c \mid 2+3$, fient aequalia. $\underline{\underline{g}}+\underline{e}$ aequ. $\underline{\underline{c+d}}+\underline{b+c}$ seu $g+e$ aequ. $b+2c+d$. $7+5$ aequ. $2+2\cdot3+4$ seu aequ. $2+6+4$ ($\underline{\underline{g}}-\underline{e}$ aequ. $\underline{\underline{c+d}}-\underline{b-c}$ aequ. $+d-b$; $7-5$ aequ. $4-2$)

(12) Nihil, 0, nec addit nec minuit: AN±N aequ. AN; $1+0$ aequ. $1-0$ aequ. 1; et contra, quod nec addit nec minuit, est nihil. Item si $a+n$ aequ. $a-n$, tunc n erit 0. Item $0+0$ aequ. 0. Et si $n+n$ aequ. n, tunc n erit 0.

(13) Si aequalium unum ab altero subtrahatur, restat nihil, et contra, ut $a-a$ aequ. 0; $3-3$ aequ. 0; NC—CN aequ. N;

sive si ab N progressus sis in C et a C regressus in N, progressus erit nullus; c - a—b (aequ. c—c) aequ. 0. Et contra, si c - a —b aequ. 0, erit c aequ. a+b.

(14) Si majus subtrahatur a minore, restat *minus nihilo*, ut +b—c (aequ. $\underbrace{+b-b}_{0}$—a) aequ. 0—a vel aequ. —a, seu 2—3 est —1. Si tibi debeantur 2, et tu vicissim debeas 3, compensatione facta debebis 1. Si in bonis habeas 200 et debeas 300, tunc patrimonium tuum erit minus nihilo seu 0—100, et 100 acquirere debebis, antequam liber fias nihilque purum habere incipias. Si ab A duos facias passus antrorsum versus L seu si progressus sis AC, et a C tres facias passus retrorsum CN, progressus tuus ab A versus L erit revera regressus ab A in N uno passu, +AC—CN aequ. —AN, cadet autem punctum A inter C et N.

(15) *Multiplicatio* est additio aequalium, ut b+b+b est 3b. Numerus repetendus b est *multiplicandus*, numerus repetitionum 3 est *multiplicans*, productum 3b seu f | 6, vel quia 3 est c, loco 3b scribitur cb | f vel 2˘3 sive 2.3 | 6. Eodem modo in tribus literis $\underbrace{bc}_{f}$ e | 2. 3. 5 | f e | 6. 5 | 30.

(16) In additione et subtractione vel multiplicatione ordo nihil facit, ut +b+a aequ. +a+b, b—a aequ. a—b, bc aequ. cb, 2˘3 idem quod 3˘2, bis tria idem quod ter duo.

(17) Dimensionis in dimensionem ductus seu quantitatis, exempli causa latitudinis AB (fig. 25) applicatio ad quamlibet partem longitudinis BE, est realis exhibitio multiplicationis mentalis, et quidem si angulus ubique sit idem, tunc prodit rectangulum planum NBEP, vel compendio NBE (sive NB˘BE) aut etiam NE. Cumque longitudo BE sit 3 pedum linearium, et NE duorum, itaque si ducas ter pedem linearem in bis pedem linearem, ter quidem duces in bis fit 6, et pedem linearem ducendo in pedem linearem fit pes superficialis, nempe quadratus NR. Itaque rectangulum NBE erit 6 pedum quadratorum. 3p in 2p dat 6pp, quodsi 3p aequ. c et 2p aequ. b, fiet 6pp aequ. bc. Itaque hoc rectangulum dicitur esse duarum dimensionum, ex latitudine b in longitudinem c. Si jam altitudo NQ (fig. 26), 4p vel d ducatur eodem modo in rectangulum NBEP seu 6pp vel bc, fit (12ppp vel) $12p^3$ vel bcd, id est rectangulum solidum EPNQ sive BPQ constans 12 pedibus cubicis; cuilibet enim pedi quadrato NR insistit columna NRQ

ex quatuor pedibus cubicis. Itaque hoc rectangulum solidum bcd est trium dimensionum. Neque hoc tantum in lineis, sed et in aliis applicationibus rei unius in quamlibet partem alterius locum habet. Ut si bonitas intrinseca seu pretiositas rei ducatur in quantitatem mercium seu bonitatem extrinsecam inde fit rei valor seu pretium, quod est duarum dimensionum, ut in argento puro vel mixto apparet, eadem enim bonitas intrinseca, sive idem mixturae vel alligationis gradus spectatur in qualibet particula. Idem est in aliis rebus dividuis in partes similes ejusdem pretiositatis cum toto, ubi duplo major quantitas est duplo pretiosior, unde ICti has res vocant quantitates. Secus vero est in illis quas ICti vocant species, qualis est equus, imo et adamans, qui physice quidem semilaris est, at non civiliter, quoniam si rumpatur, partes omnes simul tanti non sunt, quanti erat totum. Quod secus est in argento, vino, frumenti acervo. Itaque in his duplex ista aestimatio quantitatis et pretiositatis conjungenda est, non per additionem, sed per multiplicationem. Exempli causa, si auri bonitas intrinseca seu pretiositas sit duodecupla bonitatis argenti, tunc librae auri pretium duodecuplum erit pretii librae argenti, sed trium librarum auri pretium erit pretii librae argenti ter duodecuplum, ducta pretiositate in quantitatem.

(17) Quando quantitates, quae in se invicem ducuntur, sunt aequales, oriuntur *Potestates*.

a^0	a^1 (vel a)	a^2 (vel aa)	a^3 (vel a^2a)	a^4	a^5	a^6
1	1	1	1	1	1	1
b^0	b^1	b^2	b^3	b^4	b^5	b^6
1	2	4	8	16	32	64
l^0	l^1	ll	l^3	l^4	l^5	l^6
1	10	100	1000	10000	100000	1000000
Unitas	Radix Latus	Quadratum	Cubus	Biquadratum seu quadrati quadratum	Surde-solidum	Quadrati-cubus
Gradus						
Nullus,	Primus,	Secundus,	Tertius,	Quartus,	Quintus,	Sextus etc.

(18) l^bl^c (seu l^b in l^c vel l^{b}˘l^{c}) aequ. l^{b+c} aequ. l^e, seu l^2l^3 aequ. l^5, seu 100 in 1000 dat 100.000, et 4 in 8 dat 32. Numeri autem qui literae superscribuntur, sunt *indices* seu *exponentes* graduum. Uti vero l^{2+3} significat l^2l^3 seu l^5, ita $l^{2\cdot3}$ seu l^6 significat l^2 cubice seu ter in se multiplicatum seu $l^2l^2l^2$, vel l^3 quadratice sive bis in se multiplicatum l^3l^3. Itaque additio

exponentium significat multiplicationem potestatum, multiplicatio exponentis per alium exponentem significat potestatem potestatis. Ita 1^{2+3} est quadratum in cubum, at $1^{2\cdot 3}$ est quadraticubus seu cubi quadratum.

(19) Quadrat. dupli lateris non est duplum prioris, sed quadruplum
tripli triplum noncuplum
quadrupli quadruplum sedecuplum
etc. etc. etc.

Ita (fig. 27) quadratum super recta AB est quadruplum quadrati super recta NB. Quadratum ab AN continet novies quadratum a tertia ipsius AN parte $A\Psi$. Et $\boxed{2}\,\overline{GH}$ aequ. 16 $\boxed{2}\,\overline{G\varphi}$ seu quadr. HM aequ. 16 quadr. $\varphi\Sigma$, quia HG aequ. 4 $G\varphi$. Sit $G\varphi$ pes seu p, et GH sit 4p sive d, $\varphi\Sigma$ erit pp et HM erit dd aequ. 4p 4p seu 16pp sive 16 pedum quadratorum. Hinc si quis aream HM sternere velit lapidibus quadraticis longitudine AB, quos ponamus esse bipedales, tantum quarta parte lapidum indigebit quos opus haberet, si vellet pedales longitudine AN. Unum enim quadratum bipedale $A\Delta$ tantum spatii occupat, quantum quatuor pedes quadrati TN, NH, HM, MT. Itaque canalis, cujus capacitas sive lumen vel sectio per medium sit $A\Delta$, duplo crassior quam AG quadruplo plus aquae continebit.

(20) Cubi dupli lateris est octuplus, tripli 27^{plus}, quadrupli 64^{plus} etc. Inspiciatur (fig. 28) cubus ABCDEF vel (compendiosius) ACF, nempe super latere AB, et sit alius cubus GHIKLM vel GIM a latere GH dimidio ipsius AB; patet cubum majorem continere octo cubos tales qualis est minor, nempe cuilibet quatuor quadratorum baseos $A\Delta$ insistent duo, ipsi GD insistent GHIKLM et QIΩDYL, super TM duo TGQLVF, SQXYEV, super NH duo NBOIQS et POCΩXQ, super AG duo ANPQST et RPZXWS. Ita eodem modo si cuilibet quadratillo quadrati AG imponas tres cubulos, habebis 27 cubulos implentes cubum majorem ab AG.

(21) Dimensionum natura hactenus non satis intellecta est, nam licet in spatio per se considerato non dentur nisi tres dimensiones, in corpore tamen dantur multo plures. Etsi enim in solis figuris supra solidum ascendi non possit, non tamen altiores Potestates sive res quatuor aut quinque aut plurium dimensionum imaginariae sunt, ut vulgo putant, quod sic ostendo. Cum dimensio sit realis exhibitio multiplicationis (per superiora), hinc quoties nova quantitas accedit, quae cuilibet prioris parti inest vel applicatur, nova accedit dimensio. Sint duo cubi: ACF aureus, cujus latus sit b | 2, eritque ejus moles b^3 sive 8, et GIM argenteus, cujus latus sit a | 1, eritque moles ejus seu contentum a^3 | 1. Sit jam auri gravitas specifica etiam ut b, argenti ut a, id est quia b duplo majus quam a, seu a est 1 et b est 2, et aurum paulo minus quam duplo gravis est argento paris molis seu spatii; ideo ponamus nunc quidem gravitatem specificam auri esse duplam specificae argenti, ergo ducendo b in b^3 gravitatem specificam auri in cubi aurei molem (cuilibet enim particulae haec gravitas inest) fiet b^4 seu 16 pro pondere cubi aurei, at a (gravi. specifica argenti) in a^3 (cubi argentei molem) dabit a^4 seu 1 pondus cubi hujus argenti; habemus ergo duo *quadrati-quadrata realia*, facta ex quatuor dimensionibus: *longitudine*, *latitudine*, *altitudine*, *gravitate specifica*. Et iisdem positis si accedat quinta dimensio, nempe *impetus*, quem labendo acquirerent, ut si aureus labatur duplo tempore diutius argenteo, percussio (quae est quinque dimensionum) ab aureo cubo erit b^5, 32, ab argenteo a^5, 1, et habemus duo *surdesolida realia*. Et quia motuum proportiones pro arbitrio assumi possunt, manifestum est est ascendi in infinitum.

(22) Unitas non multiplicat in numeris, 1.1 seu $1\frown 1$ est 1, $1\frown 2$ seu 1.2 est 2, 1b est b. Multiplicat tamen in rebus ipsis seu attollit dimensiones, quando per Unitatem intelligitur aliqua Mensura pro Unitate assumta, ut pes; nam 1p in 1p dat 1pp seu pp sive pedem quadratum. Ita si a sit 1, tunc a^2 erit 1, sed si 1 significet unum pedem, tunc a erit unus pes linearis, a^2 unus pes quadratus, a^3 unus pes cubus. Itaque unitas subintellecta supplet numerum dimensionum, ut (in fig. 25 supra) rectang. NBE aequ. bc aequ. 2.3 seu 6, intellige 6 unitatum quadratarum seu $6a^2$. Jam 6 aequ. h, ergo bc aequ. h, subintellige bc aequ. ha seu $NB\frown BE$ | 2.3 aequ. $NS\frown ST$ | $6\frown 1$, linea enim h sive NS rectangulo bc aequalis esse non potest, nisi haec linea NS ducatur in unitatem ST.

(23) Itaque quando calculi non de numeris abstractis, sed de rebus ipsis intelliguntur, servanda est *lex homogeneorum* quam vocant, id est ea quae comparantur ac sibi adduntur vel auferuntur, debent habere eundem numerum dimensionum, ut b^2 et bc, item b^3, b^2c, bcd, neque enim linea superficiei, superficiesve spatio tridimenso, nec spatium vacuum ponderi corporis, nec pon-

dus mortuum percussioni comparari potest. Et quando non est idem dimensionum numerus, subintelligenda est unitas a, ut si comparentur b^4 et c^2d, hujus loco sumi potest ac^2d. Saepe tamen unitas dissimulatur.

(24) Quantitas ex pluribus dimensionibus formata a me dici solet f o r m a. Sunt autem hae

Grad. I. a.
Grad. II. a^2, ab.
Grad. III. a^3, a^2b, abc.
Grad. IV. a^3, a^3b, a^2b^2, a^2bc, abcd.
etc.

ita b^3c^2e sive $2^3 3^2 5$ significat 8.9.5 seu 360. Et utilissima *quidem* haec est resolutio numerorum d e r i v a t i v o r u m in p r i m i t i v o s seu eos, qui in alios (praeter se ipsum atque unitatem) hoc modo resolvi non possunt, ut 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 19 etc. Caeteri ex his fiunt, ut 4 est 2^2, et 6 est 2.3, et 8 est 2^3, et 9 est 3^2, est 10 et 2.5, et 12 est $2^2.3$, et 14 est 2.7, et 15 est 3.5, et 16 est 2^4, et 18 est $3^2.2$.

(25) Nihil in multiplicatione facit nihil, seu 0 aequ. 0^2 aequ. 0^3 aequ. 0.a aequ. 0b vel b0. Nam centies nihil est nihil, et nullies centum seu nunquam 100 est etiam nihil. Hinc si scribatur na^2b, et sit n aequ. 0, erit na^2b aequ. 0. Item 0b aequ. 0c, nec tamen ideo b aequ. c. Item quia af—bc aequ. 0 (1.6—2.3), erit etiam baf—b^2c aequ. 0 (seu 2.1.6—2^2.3, id est 12—12).

(26) Si tamen 0 significet rem non quidem nullam, sed infinite parvam, sive finitis nullo modo comparabilem, eaque ducatur in rem infinitam, inde fieri potest quantitas ordinaria seu finita. Infinitum ita designo ∞, eritque 0∞ aequ. 1. Sed hoc intelligendum ex exemplis, ubi consideratio haec utilissima reperietur, quae suo loco afferemus.

(27) b^0 aequ. 1. Nam $b^0 \frown b^c$ (per 18) aequ. b^{0+c}, id est (per 12) aequ. b^c et hoc (per 22) aequ. $1 \frown b^c$. Habemus ergo $b^0 \frown b^c$ aequ. $1 \frown b^c$, ergo (per 29) b^0 a e q u. 1. Hinc c o r o l l a r i u m b^0 aequ. 1, ergo et c^0 aequ. 1, ergo b^0 a e q u. c^0, nec tamen ideo b aequ. c, licet enim alioqui quae eodem modo tractata exhibent aequalia, sint aequalia, tamen per 0 tractari est non tractari.

(28) 1 aequ. 1^0 aequ. 1^1 aequ. 1^2 aequ. 1^3 etc. adeoque 1^y aequ. 1, et, si a aequ. 1, erit a^y aequ. 1 aequ. a^z; et contra si a^y

aequ. 1, et y diversus est ab unitate vel si a^y aequ. a^z et y ac z diversi sunt inter se, tunc erit a aequ. 1.

(29) Aequalium aequimultipla aequalia sunt, et e converso. Sit f aequ. 6, dico esse fd aequ. 6d. Nam f—6 aequ. 0 (per 13), ergo fd—6d aequ. 0 (per 25), ergo fd aequ. 6d (per 13), quod erat demonstrandum. Eodem modo demonstratur et conversa, scilicet quorum aequimultipla aequalia sunt, ea ipsamet aequalia sunt. Idem ex axiomate illo generali patet, quod aequalia f et 6, eodem modo tractata, nempe per d multiplicata, exhibent aequalia, nempe fd et 6d.

(30) $++$ est $+$ seu $+1 \frown +1$ aequ. $+1$, vel ponere ponens est ponere sive efficere, ut habeas quod alioqui habiturus non esses. Ita qui parientem tibi donat, partum donat; qui tibi jus centum nummorum donat, qui exigi possunt cum voles, is tibi centum nummos donat seu $+\overline{+100}$ aequ. $++100$ aequ. $+100$. Hinc $+1 \frown +b$ aequ. $+b$, nam $+b$ aequ. $+1 \frown b$ (per 22), ergo $+1 \frown +b$ aequ. $+1 \frown +1 \frown b$, at $+1 \frown +1$ aequ. $+1$ h i c, ergo $+1 \frown +1 \frown b$ aequ. $+1 \frown b$; at $+1 \frown b$ aequ. $+b$ (per 22), ergo $+1 \frown +b$ aequ. $+b$. Hinc $+b \frown +c$ aequ. $+bc$. Nam $+b$ aequ. $+1 \frown b$, et $+c$ aequ. $+1 \frown c$ (per 22), itaque $+b \frown +c$ aequ. $+1 \frown b \frown +1 \frown c$, et (quia per 16 in multiplicando transponere licet) aequ. $+1 \frown +1 \frown b \frown c$; jam $b \frown c$ est bc (per 15) et $+1 \frown +1$ est $+1$ h i c; ergo fit $+1 \frown +1 \frown b \frown c$ aequ. $+1 \frown bc$, id est (per 22) $+bc$. Haec consideratio signi cum adjuncta unitate, sumendo $+$ quasi $+1$, suo tempore usum habebit; proprie etiam non potest $+$ duci in $+$, non enim est quantitas, sed $+1$ in $+1$.

(31) $+-$ est $-$ seu $+1 \frown -1$ aequ. -1, seu ponere tollens est tollere seu efficere, ut non habeas quod alioqui habiturus esses, ut si tibi donem animal prorsus nullius pretii ea conditione, ut retineas pascasque, donum meum potius poena erit tanto major quanto voracius erit animal. Ita si in te transferam obligationem qua teneor, seu ut vulgo loquantur debitum passivum centum nummorum, utique hoc ipso centum nummi patrimonio tuo decedunt. Itaque $+1 \frown -b$ aequ. $-b$ et $+c \frown -b$ aequ. $-cb$, ut in praecedenti, seu ademtio duorum nummorum ter posita est ademtio sex nummorum.

(32) $-+$ est $-$ seu $-1 \frown +1$ aequ. -1. Patet ex praecedenti, nam transpositio licita per 16. Sensus est: tollere ponens est tollere, ut si jus centum nummorum secure exigendorum tibi

adimam, centum nummos ademi seu $-1 \frown +100$ est -100; item $-2 \frown +3$ est -6, seu si tibi jus trium nummorum bis adimam, sex nummos ademi.

(33) $- -$ est $+$, seu $-1 \frown -1$ aequ. $+1$, seu tollere tollens est ponere, ut si tibi adimam animal illud inutile et vorax, quód sub conditione alendi recepisti, teque illo onere liberem, tantum donasse videbor, quantum damni illud animal alioqui daturum adhuc fuisset. Et, si obligationem centum nummorum quos alteri debes, tibi ademtam recipiam in me, utique centum nummos tibi dedi. Itaque $-1 \frown -b$ est $+b$ et per transpositionem $-b \frown -1$ est $+b$ et (per 29) $\frac{-b \frown -1 \frown c}{-c}$ aequ. $\frac{+b \frown c}{+bc}$, ergo $-b \frown -c$ aequ. $+bc$, id est si duae res $| b |$ tibi adimantur, quarum unaquaeque alioqui tres nummos $| c |$ tibi ademtura fuisset, reapse sex nummos ea ratione acquisivisti sive nunc hoc modo habes, quos alioqui non esses habiturus.

(34) D i v i s i o est subtractio aequalium. Ut autem in multiplicatione, dato numero rerum repetendarum et repetitionum, quaeritur numerus rerum in universum seu factus, ita in divisione, dato facto sive numero rerum seu dividendo, quaeritur numerus repetitionum alterius rei seu divisorís; is numerus dicitur quotiens. Ita in multiplicatione tres nummi (qui est numerus multiplicandus seu repetendus) bis (qui est multiplicator seu nummerus repetitionum) sumti dant 6 (numerum productum), in divisione vero ipsius 6 per 3, is qui antea erat productus, nunc iterum est résolvendus, id est quaeritur quoties ex tribus nummis repetitis factus sit; et respondetur esse bis repetitos ac proinde tres nummos in sex nummis bis contineri, adeoque bis a sex nummis subtrahi posse. Is ergo numerus repetitionum, hoc loco binarius, qui in multiplicatione est datus, in divisione est quaesitus et dicitur q u o t i e n s, numerus vero repetite subtrahendus, hoc loco ternarius, dicitur divisor. Idem est si binarius sit divisor, id est subtrahendus quoties fieri potest, et reperietur ipsum ter subtrahi posse. Hinc patet etiam, divisione dividendum dividi in tot aequales partes, quot sunt in divisore unitates, ut sex dividitur per 3 in tres partes aequales, nempe tres binarios, quemadmodum in multiplicatione productus sex componitur ex aequalibus partibus, nempe tribus binariis vel duobus ternariis. Itaque uti $2 \frown 3$ vel 2.3 aequ. 6, ita $6 \smile 2$ vel $\frac{6}{2}$ aequ. 3, et

$6 \smile 3$ vel $\frac{6}{3}$ aequ. 2; in literis bc aequ. f, ergo $\frac{f}{b}$ aequ. c vel $\frac{f}{c}$ aequ. b.

(35) $bc \smile c$ vel $\frac{bc}{c}$, item $\frac{b}{c} \frown c$ vel $\frac{bc}{c}$ aequ. b, id est si qua res multiplicetur simul et dividatur per idem, multiplicatio et divisio se mutuo tollent, manebit res prior. Exempli gratia tertia pars tripli est simplum. Itaque quivis multiplicatione productus, ut bce (sive $2 \frown 3 \frown 5$) vel fe (sive $6 \frown 5$) vel $l \frown c$ ($10 \frown 3$) vel $\overline{l+e} \frown b$ (sive $15 \frown 2$) eosdem habet divisores quot factores, nempe bce, 30, dividi potest per 2 et 3 et 5; b et c et e jungendo 2 et 3 per 6 vel f vel bc; jungendo 2 et 5 per 10 vel l vel be; jungendo 3 et 5 per 15 vel $l+e$ vel ce. Patet etiam hinc, quotientem et divisorem reciprocari seu ex quotiente fieri posse divisorem et tunc ex divisore fieri quotientem; $\frac{6}{2}$ aequ. 3 et $\frac{6}{3}$ aequ. 2; item b divisorem, divisores be esse divisorem dividendi bce. Hinc et divisor quotientis est divisor dividendi, quia et quotiens est divisor, $36 \smile 3$ aequ. 12; jam 12 dividi potest per 4, ergo et 36, quia 36 dividi potest per 12, et 12 per 4.

(36) Hinc $\frac{b^2}{b}$ aequ. b aequ. $\frac{b^3}{b^2}$ aequ. $\frac{b^4}{b^3}$ etc.; item $\frac{b^3}{b}$ aequ. b^2 aequ. $\frac{b^4}{b^2}$ aequ. $\frac{b^6}{b^4}$; et generaliter $\frac{b^z}{b^y}$ aequ. b^{z-y} (per artic. 18 et 35). Exempli gratia $\frac{2^6}{2^4}$ aequ. 2^{6-4} aequ. 2^2 seu $\frac{64}{16}$ aequ. 4. Eodem modo $\frac{cb}{b}$ aequ. c seu cb^0, et $\frac{cb^2}{b}$ aequ. cb seu cb^1, et $\frac{cb^3}{b}$ aequ. cb^2 etc. Itaque quando divisor, ut b, in dividendo, ut cb^2, continetur, tunc destruitur, et invenitur quotiens cb simplicior dividendo cb^2. Hinc $\frac{6}{3}$ aequ. 2, quia $\frac{6}{3}$ aequ. $\frac{bc}{c}$ aequ. b.

(37) $\frac{0}{b}$ aequ. 0. Nam $\frac{0}{b}$ aequ. $\frac{0b}{b}$ (quia 0b aequ. 0 per artic. 25) et $\frac{0b}{b}$ aequ. 0 per artic. 35. Hinc 0 dividi potest per 2, item per 3 etc., nam dimidium nihil est nihil, et tertia pars nihili est nihil. Itaque 0 est par, et est ternalis, et quaternalis, et quinalis, et ita porro.

(38) $\frac{b}{b}$ aequ. 1, sive $\frac{3}{3}$ aequ. 1, seu omnis numerus per se ipsum divisus quotientem exhibet unitatem. Nam omnis numerus non nisi semel a se ipso subtrahi potest. Idem calculo ita constat. b aequ. $1 \frown b$ (per 22), ergo $\frac{b}{b}$ aequ. $\frac{1 \frown b}{b}$ (per axioma generale, quod aequalia eodem modo tractata exhibent aequalia); jam $1 \frown \frac{b}{b}$ aequ. 1 (quia in $\frac{b}{b}$ per artic. 35 duo $\frac{b}{b}$ se mutuo tollunt), ergo $\frac{b}{b}$ aequ. 1. Idem aliter: Quantitatum $\frac{b}{b}$ et 1 aequimultipla per b, nempe $\frac{b}{b} \frown b$ (id est b per 35) et $1 \frown b$ (id *est b* per 22) aequalia sunt, ergo (per 29 conversam) ipsae quantitates sunt aequales.

(39) $\frac{b}{1}$ aequ. b, seu unitas dividendo non mutat. Nam $\frac{b}{1}$ aequ. $\frac{b}{1} \frown 1$ (per 22) et $\frac{b}{1} \frown 1$ aequ. b (per 35).

(40) Articulus 38 et 39 ita conjungi possunt breviterque probari. b aequ. $b \frown 1$ (per 22), at omnis multiplicatione productus ut $b \frown 1$ habet (per 35) eosdem divisores, quos factores seu generatores hoc loco b et 1.

(41) Si numerus aliquis integer habeatur expressus per formam unicam constantem ex meris primitivis, tunc omnes divisores invenientur modo sequenti. Sit numerus 360 expressus per formam unicam (nam si expressus sit per formulam compositam ex pluribus terminis, res non procedit) b^3c^2e sive $2^3 3^2 5$, ubi ingredientes b, c, e sive 2, 3, 5 sunt meri primitivi, nam 5 exempli causa non dividi potest nisi per unitatem et se ipsum, ergo 360 dividi potest ante omnia per 1, hinc *primo* per b (2) et c (3) et e (5); *secundo* per formas secundi gradus in forma data contentas: b^2 (4), c^2 (9), bc (6), be (10), ce (15); *tertio* per formas tertii gradus: b^3 (8), b^2c (12), b^2e (20), bc^2 (18), bce (30); *quarto* per formas quarti gradus: b^3c (24), b^2c^2 (36), b^2ce (60), bc^2e (90); *quinto* per formas quinti gradus: b^3c^2 (72), b^3ce (120), b^2c^2e (180); *sexto* forma proposita dividitur per unam formam sexti gradus, nempe per se ipsam b^3c^2e.

(42) Hinc si modus exprimendi numerum datum per primi-

tivos non habeatur, potest numerus datus ad primitivos reduci hoc modo. Ponamus ignorari quod 360 sit b^3c^2e vel $2^3 3^2 5$, hoc ita inveniemus. Percurramus ordine omnes primitivos, quoad opus erit; et quidem omnis numerus dividi potest per 1. Post 1 sequitur 2; dividatur ergo 360 per 2, fit 180, nempe $360 \smile 2$ aequ. 180 (seu $b^3c^2e \smile b$ aequ. b^2c^2e). Similiter $180 \smile 2$ aequ. 90 ($b^2c^2e \smile b$ aequ. bc^2e), $90 \smile 2$ aequ. 45 ($bc^2e \smile b$ aequ. c^2e). At 45 si dividatur per 2, manet residuum, itaque hoc ad scopum nostrum non procedit (nec $c^2e \smile b$ procedit ad scopum nostrum). Ergo procedatur a 2 ad proximum primitivum 3, et fiet $45 \smile 3$ aequ. 15 ($c^2e \smile c$ aequ. ce), $15 \smile 3$ aequ. 5 ($ce \smile c$ aequ. e). Jam 5 non amplius sine residuo dividi potest per 3, nam si 3 detrahas a 5, restat 2, a quo 3 amplius detrahi non potest. Ergo ulterior divisio per 3 non procedit. Proximus primitivorum post 3 est 5. Hoc si dividatur 5, quod paulo ante provenerat, fiet $5 \smile 5$ aequ. 1 ($e \smile e$ aequ. 1), unitas autem amplius dividi non potest. Habemus ergo, 360 dividi posse per 2 quidem ter seu per cubum ipsius 2 sive per 2^3, per 3 vero bis seu per quadratum ipsius 3, ac denique per 5 semel, unde fit 360 aequ. $2^3 3^2 5^1$ seu $b^3c^2e^1$. Si quis vero in tali inquisitione occurreret primitivus inapplicabilis seu per quem divisio exacte fieri non possit, is transsilietur sumeturque sequens. Hac methodo etiam apparebit, *an numerus aliquis sit ipsemet omnino primitivus*, id est per alium praeter unitatem et se ipsum dividi non possit. Nam tentetur, an dividi possit per omnes ordine primitivos, donec perveniatur ad primitivos, per quos dividendo fiant quotientes (neglecto residuo) minores divisore, ut 19 dividatur per 2, prodit (neglecto residuo) 9, et $19 \smile 3$ dat 6, et $19 \smile 5$ dat 3, ergo ultra pergi opus non est, quia 3 quotiens minor est quam 5 primitivus divisor. Ratio est, quia si per primitivum altiorem, ut 7, procederet divisio, tunc quotiens cum minor sit quam 7, deberet vel esse primitivus minor quam 7, vel certe si non est primitivus, debebit divisibilis esse per primitivum minorem se ipso, adeoque minorem quam 7. Jam si quotiens est exacte divisibilis per aliquem primitivum minorem quam 7, etiam dividendus erit divisibilis per divisorem minorem quam 7 (per artic. 35) contra hypothesin; tentavimus enim jam per omnes. Ergo per primitivum altiorem, ut 7, non potest dividi dividendus, adeoque inutilis est tentatio ulterior. Dantur autem varia compendia pro agnoscendis numeris primitivis, sed ea non sunt hujus loci.

(43) Ex pluribus ejusdem numeri divisoribus seu factoribus illi qui simul eum faciunt, dicantur c o n f a c t o r e s , ut exempli gratia 12 seu $l+b$ aequ. b^2c aequ. dc aequ. bf. Sunt ergo confactores primo modo b, b, c, secundo d, c (vel b^2, c), tertio bf (seu b, bc). Possunt et dici c o n d i v i s o r e s.

(44) Si numerus divisibilis sit per primitivum aliquem, tunc aliquis confactorum ejus per eundem primitivum divisibilis erit, ut si 2.6 seu 12 divisibilis est per 3, dico vel 2 vel 6 debere divisibilem esse per 3. Nam si resolvatur numerus 2.6 secundum artic. 42, ut habeatur modus exprimendi eum per primitivos factores, necesse est ut inter eos etiam compareat 3; resolvendo autem hoc modo debet vel 2 vel 6 resolvi vel ambo, itaque 3 debet latere vel in uno vel in utroque, partim enim in uno, partim in altero latere non potest, quia ipsemet est primitivus sive resolvi in plures factores non potest. Et itaque cum 2 non sit divisibilis per 3, neque adeo in 3 resolvi possit, necesse est 6 in 3 resolvi posse; est enim 6 aequ. 2.3, et fiet 12 aequ. 2.2.3 seu $2^2.3$. Si vero divisor non sit primitivus, id necesse non est, ex. gr. 12 seu 2.6 dividi potest per 4. et tamen neque 2 neque 6 per 4 dividi potest: sed ipsum 4 resolvendo in primitivos, fiet 2.2, itaque 4 partim continetur in 2, partim in 6 hoc modo $\frac{2\,.\,6}{2\,.\,2}$, nam unum 2 continetur in uno confactore (2), alterum in altero confactore (6).

(45) Hinc si potentia sit divisibilis per aliquem primitivum, latus erit divisibile per eundem, ex. gr. 6^3 sive 216 dividi potest per 3, ergo cum ejus confactores sint 6, 6, 6, ideo unus ex ipsis, nempe (cum sint aequales assumti) ipsum latus 6 etiam dividi poterit per 3.

(46) Numerus divisibilis per plures primitivos divisibilis est per factum ex omnibus. Ut si numerus 30 divisibilis sit per 2 et 3, necessario divisibilis erit per 6. Necesse est ut enim in resolutione secundum modum artic. 42 appareant ambo, itaque comparebit 2, 3, nempe 30 est 2.3.5.

(47) Si plura aequimultipla additione vel subtractione conjunguntur, compositum cum ipsis aequimultiplum erit, vel quod idem est si plures quantitates divisibiles per eundem numerum conjungantur in eandem formulam, composita formula erit divisibilis per eundem, ex. gr. si conjungantur 6 et 9, ambo divisibiles per 3, compositum 15 erit etiam divisibile per 3. $bc+cc$ (seu

$\overline{b+c}c$ seu ec) utique divisibile est per c, fiet enim $\frac{bc+cc}{c}$ aequ. $b+c$ aequ. e. Similiter: 15 - 9 (seu 6) dividi poterit per 3, quia tam 15, quam 9 dividi potest per 3. Ita $ec-c^2$ (seu $\underbrace{\overline{e-c}}_{b}c$ seu bc) dividi potest per c, fiet enim $\frac{ec-cc}{c}$ aequ. $e-c$ aequ. b, sive $\frac{ec}{c}$ erit integer, et $\frac{cc}{c}$ est integer, ergo $\frac{ec-cc}{c}$ est integer, quae omnia patent ex artic. 35, nam c supra et infra se mutuo tollunt.

(48) Hinc si tota formula divisibilis sit per aliquem numerum et pars per eundem, reliqua pars etiam per eum divisibilis erit. Ita sit 12 aequ. $l+b$, is numerus 12 totus dividi potest per b sive per 2 (per hypothesin) et pars ejus b dividi etiam potest per b (per artic. 38), ajo alteram partem l etiam per b dividi posse. Nam 12 divisib. per b [sive $\frac{12}{b}$ est integer], item b divisibilis per b [seu $\frac{b}{b}$ est integer, ergo $\frac{12}{b}-\frac{b}{b}$, erit $\frac{12-b}{b}$ etiam integer] seu $12-b$ erit exacte divisibilis per b, per artic. 47. Jam $12-b$ $(12-2)$ est aequ. l (10) (quia 12 aequ. $l+b$, ergo subtrahendo utrobique b fit $12-b$ aequ. $l+\underbrace{b-b}_{0}$ aequ. l). Ergo si $12-b$ divisib. per b, etiam aequalis ei l per b divisibilis erit, quod ostendendum erat. Similiter sit 24 aequ. $3l-f$ $(3.10-6)$, $\frac{24}{3}$ aequ. 8 seu $\frac{24}{3}$ est integer, ergo et $\frac{3l}{3}$ est integer, nempe l, ergo et $\frac{f}{3}$ est integer, seu quia tota formula $3l-f$ seu 24 dividi potest per 3, et $3l$ etiam, sequitur et f dividi posse per 3, nam quia 24 aequ. $3l-f$, ergo $24+f$ (aequ. $3l-f+f$) aequ. $3l$, ergo $(24)+f$ (-24) aequ. $3l-24$; jam $3l$ divisib. per 3, et 24 etiam, ergo per artic. 47 composita formula $3l-24$ seu f divisib. per 3. Hae propositiones sunt principium divisionum, quae in numeris compositis per partes peraguntur.

Hinc e converso, si una pars formulae per aliquam quantitatem vel numerum sit divisibilis, altera vero pars integrans (seu reliquum totam formulam absolvens) per eum divisibilis non sit, tunc ipsa formula per eum divisibilis non erit. Ita 19 non potest dividi per 3, nam discerpi potest in duas partes 18 et 1 (quia 18+1 aequ. 19) quarum una 18 dividi potest per 3, altera vero 1 minime.

(49) Duo numeri integri per eundem divisibiles dicuntur habere c o m m u n e m M e n s u r a m, id est communem divisorem, ut bc et cc sive 6 et 9 communem habent divisorem c sive 3. Si vero nullum habeant communem divisorem, dicuntur esse p r i m i i n t e r s e. Divisor autem exactus merito dicitur mensura, ut 2 est mensura numeri 6, quia aliquoties (nempe ter) repetitus numerus numerum 6 exacte metitur, nullumque residuum relinquit. Ideo 6 et 4 dicuntur habere communem mensuram 2.

(50) Si numerus divisibilis sit per alium, aliquis confactorum numeri dividendi habebit communem mensuram cum divisore. Ita numerus 60 dividi potest per 15, ergo aliquis ex duobus ejus confactoribus vel condivisoribus, nempe 2,30, communem habebit divisorem cum 15. Nam 2.30 resolvi poterit ad modum artic. 41 et 42 ut divisores omnes appareant, nempe inter caeteros etiam 3.5 seu 15. Jam 2 nec in 3 nec in 5 resolvi potest, ergo necesse est 30 ita resolvi posse; itaque 30 et 15 habent communem divisorem 3, imo et communem divisorem 5, quin imo 30 et 15 habebunt communem divisorem 15, nam 30 per 15 dat 2, et 15 per 15 dat 1. Scilicet 60 est 2.30 vel 2.2.3.5 sive $2^2.3.5$. Similiter quia 60 dividi potest per 3 (fit enim $60 \smile 3$ aequ. 20), necesse est unum saltem ex duobus confactoribus 2 et 30 habere communem divisorem cum 3, et vero 2 non habet, ideo necesse est, ut 3 et 30 sint condivisibiles, quod et verum est, nam tam 3 quam 30 dividi possunt per eundem 3. Ita quia $3 \frown 20$ aequ. 60 et 60 dividi potest per 30, patet hoc loco non alterutrum tantum, sed utrumque tam 3 quam 20 ipsi 30 condivisibilem, nam 3 et 30 dividi possunt per 3, et 20 et 30 dividi possunt per 10. Et generaliter ista patent ex habita forma qua numerus 60 per primitivos exprimitur, ut 60 aequ. $2^2.3.5$ seu 2.2.3.5, quomodocunque enim conjungantur isti factores simplicissimi 2.2.3.5 in confactores compositos, nempe in duos confactores 12 (id est 2.2.3) et 5, item 20 (2.2.5) et 3, item 30 (2.3.5) et 2, item 4 (2.2) et 15 (3.5), item 6 (2.3) et 10 (2.5), et in tres 4 (2.2) 3 et 5, item 6 (2.3) 2 et 5, item 10 (2.5) 2 et 3, item 15 (3.5) et 2 et 2, et denique in quatuor 2.3.4.5; patet quemlibet factorem vel esse primitivorum unum, vel ex parte eorum invicem ductorum fieri; adeoque

divisores ejus esse partem divisorum numeri seu latere in confactoribus simul sumtis, et quidem vel totum in uno confactorum, vel pro parte in uno, pro parte in altero.

(51) Hinc si potentia sit divisibilis per aliquem numerum, necesse est latus et divisorem habere mensuram communem, ut si $b^2c^2d^2$, nullus potest assumi divisor, qui non contineat aliquam ex literis b vel c vel d, itaque habebit literam cum latere bcd communem.

(52) Numerus divisibilis per plures primos inter se, divisibilis est per factum ex omnibus, ut numerus divisibilis per 5 et 6 et 7, divisibilis est per 210 seu 5.6.7. Nam divisibilis est per 5 et per 6, sed quia 5 nihil continet commune cum 6, nihil contribuit ad hoc, ut numerus sit divisibilis per 6; ideo alterum ab altero separatum est, et si divisus sit per 5, adhuc dividi poterit per 6; idemque est de 7. Itaque numerus divisibilis per 5 et 6 et 7 necessario erit 5.6.7. Sed secus est in numero divisibili per 4 et 6, exempl. gr. 36; is enim non est necessario divisibilis per 24, sed solum per $\overbrace{2.\underbrace{3.3}_{6}}^{4}$ seu per 12, quia 2 est communis mensura numerorum 4 et 6.

(53) Si a numero aliquo diminuendo 21 subtrahatur numerus ut 15, et residuum 6 habeat communem divisorem cum subtracto 15, tunc subtractus 15 habebit eundem communem divisorem cum diminuendo 21. Nam in literis, sit 21—ce aequ. cb, ergo 21 aequ. cb+ce, ergo 21 id est cb+ce habet divisorem c, eundem quem habet ce.

(54) Si a numero aliquo dividendo 56 subtrahatur divisor 12, quoties fieri potest, et sit residuus 8, tunc 4 maxima communis mensura divisoris 12 et residui 8 erit maxima communis mensura divisoris 12 et dividendi 56. In literis, sit divisor x et quotiens 4 (quoties scilicet x subtrahi potest a dividendo), residuus h, dividendus 56, utique erit 56 aequ. 4x+h. Ponamus jam x et h habere maximum communem divisorem d, et esse x aequ. cd, et h aequ. bd, fiet 56 aequ. 4cd+bd. Jam duorum numerorum 4cd+bd et cd maximus communis divisor est d, quoniam si major aliquis sumatur divisor ipsius 4cd, nempe m, is non erit divisor ipsius bd (alioqui 4cd et bd haberent communem divisorem m majorem quam d contra hypothesin, posuimus enim d esse