Communi igitur mensura habita, perfecte nota est ratio duarum rerum. Si (fig. 15) una A (exempli gratia) expressa sit per mensuram quinquies sumtam seu 5 pollices, altera B per mensuram ter sumtam seu tres pollices; qua ratione licet tertium quiddam extrinsecum assumtum sit, ipsa scilicet mensura, tamen (praeterquam quod ex comparatione duarum quantitatum per se inventa est) sciendum est, numeris istis semel habitis tertiam illam quantitatem seu mensuram posse eliminari, ita ut nulla amplius pollicis vel alterius mensurae mentione sit opus; quoniam enim supra ostendimus rationem duarum quantitatum ideo quaeri, ut una sola habita inveniri possit alia, ideo habebitur numerus quo exprimitur una quantitas, posito alteram sumi pro unitate. Itaque A continebit quinque tertias ipsius B, et contra B continebit tres quintas ipsius A, seu B erit ad A ut sunt tres quintae ad quinque quintas seu ad unitatem, et A erit ad B ut sunt quinque tertiae ad tres tertias seu ad unitatem. Patet etiam, quantitatem ipsius A seu numerum ejus indefinitum, divisum per quantitatem ipsius B seu numerum ejus indefinitum, idem exhibere quod numerus 5 divisus per numerum 3. Quaecunque enim denique unitas assumatur, sive pes sive pollex, ad numeros illos indefinitos definiendos, utique semper eadem numerorum provenientium ratio esse debet, quoniam perfectae duarum quantitatum expressiones eandem habent formam comparationis, quam habent ipsae quantitates, ut si A sit 5 pedum, et B trium pedum, utique ratio erit quae 5 ad 3. Sed si assumantur pollices, quorum duodecim ingrediunter pedem, erit A 60 pollicum, et B 36 pollicum; eadem autem est ratio 60 ad 36 quae 5 ad 3, et dividendo 60 per 36, idem prodit quod dividendo 5 per 3, nempe $1+\frac{2}{3}$. Itaque patet, rationem duarum quantitatum A et B cognitam esse, si cognoscatur $\frac{A}{B}$ seu proveniens ex divisione A per B; et si duae rationes sint eaedem, etiam haec provenientia divisionis eadem esse. His omnibus enim forma comparationis duarum quantitatum cognoscitur. Unde patet etiam, Aequimultiplorum eandem esse rationem, nempe quinquies duodecim esse ad ter duodecim ut 5 ad 3.

Si vero nulla sit Mensura communis exacta duarum quantitatum, nihilominus eodem modo tractari poterunt; numeri enim reperiri poterunt, rationem earum sive exacte sive quam proxime exprimentes, licet illi numeri exacti sint incommensurabiles inter

se, adeoque vel alteruter vel etiam uterque sit incommensurabilis unitati. Quoniam enim numerus est homogeneum unitatis, quemadmodum linea recta lineae rectae, hinc aliqua recta sumta pro unitate, necesse est aliquem numerum respondere alteri rectae, qui erit surdus, si quidem duae quantitates sunt incommensurabiles. Numeri autem surdi exprimuntur per radices, tam puras quam affectas, variosque alios calculandi modos, quibus effici potest quantitas rationalis interventu surdae; itaque surdae determinantur per quantitates rationales quas efficiunt, sive per relationes quas ad rationales habent. Ita numerus qui per se ipsum multiplicatus exhibeat 2, neque integer est, neque fractus, ut supra ostendimus, sed ita scribitur: $\sqrt[2]{2}$ vel rq2, isque tum in lineis exhiberi tum etiam quam proxime per rationales exprimi potest. Ita si quantitas extrema et media ratione secanda sit, tunc pars ejus major $\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$ dimidia radix quadrata quinarii demta dimidia unitate, adeoque major a toto 1 subtrahatur, restabit minor $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ seu tres dimidiae demta dimidia radice quadrata quinarii, debet enim esse $\overset{\text{totum}}{1}$ ad $\overset{\text{majorem}}{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}$ ut $\overset{\text{major}}{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}$ ad $\overset{\text{minorem}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}}$, seu 2 ad $\sqrt{5}-1$ ut $\sqrt{5}-1$ ad $3-\sqrt{5}$, seu $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ aequ. $\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}$ quod et verum est, nam aequimultiplorum eadem ratio, hinc $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ aequal. $\frac{2\frown\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1,\frown\sqrt{5}-1}$ seu $\frac{2\sqrt{5}-2}{6-2\sqrt{5}}$ seu $\frac{\sqrt{5}\quad 1}{3\cdot\sqrt{5}}$. Itaque quoniam totum extrema et media ratione secandum a est datum, alterutra autem partium est quaesita (inventa enim una habetur altera, quia est totius et alterius differentia), hinc si invenerimus, a posita unitate, valorem majoris b esse $\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$ seu $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ sive a esse ad b ut $\sqrt{5}-1$ est ad 2, nihil amplius quaerimus. Unde manifestum est, quando quaeritur ratio a ad b, et a est data, b quaesita, nihil aliud quaeri quam valorem seu numerum ipsius b, posito a esse unitatem, sive duos numeros (integros, fractos aut surdos nil refert) qui eandem habeant formam comparationis sive rationem quam habent a et b. Modum autem inveniendi hos numeros surdos suo loco trademus, hoc uno tantum annotato, methodum quidem comparationis per se quae in continua divisione seu subtractione possibili residuorum consistit, utilem esse quidem ad inveniendas communes mensuras, adeoque et valores exactos terminorum comparandorum quando sunt commensurabiles; sed quando sunt incommensurabiles, non nisi per maximas ambages ducere posse ad numeros veros surdos, qui tamen ex conditionibus problematis alia ratione facile inveniuntur, quod in exemplo praesenti ostendam. Totum a (AB) est ad partem majorem b (BC) ut pars major b (BC) ad minorem a—b (AC); quoniam autem habitis quatuor proportionalibus terminis a, b, b, a—b, factum ex duobus mediis bb aequatur facto ex duobus extremis aa—ab, de quo suo loco. Habemus ergo proportionem transmutatam in aequationem aa—ab aequ. bb seu bb + ab aequ. aa, et quoniam a est cognita, b incognita, habemus bb quadratum ipsius incognitae b una cum ab facto ex ductu cognitae a in incognitam b, aequale ipsi aa quadrato cognitae, quae aequatio dicitur affecta; si enim solum b fuisset cognito aequale, aequatio fuisset simplex. Si quadratum ipsius b nempe bb (vel cubus b^3 aliave potentia) fuisset reperta aequalis cuidam cognitae, tunc aequatio esset quidem exaltata ad aliquem gradum, attamen pura, ut si fuisset bb (vel b^2) aequ. a, tunc extrahendo utrobique radicem quadratam habuissemus b aequ. $\sqrt[2]{a}$, et ita jam inventus fuisset numerus surdus exprimens valorem ipsius incognitae b per cognitam a, adeoque b facta esset cognita. Sed quia hoc loco est bb + ab aequ. aa, arte perveniendum est ad extractionem radicis. Quaerenda est ergo cognita quantitas, quae ipsi incognitae bb + ab adjecta faciat formulam, ex qua extrahi possit radix; talis est $\frac{aa}{4}$ seu quarta pars ipsius aa (quae secundum regulam in Algebra praescriptam in omni hujusmodi exemplo facile invenitur) et habetur bb + ab + $\frac{aa}{4}$ aequ. (aa + $\frac{aa}{4}$ seu) $\frac{5aa}{4}$; adjecta enim utrobique quantitate $\frac{aa}{4}$ manet aequalitas. Extrahendo ergo radicem quadratam ab utraque parte, fiet b + $\frac{1}{2}$a aequ. $\frac{1}{2}a\sqrt{5}$, nam b + $\frac{1}{2}$a multipl. per se ipsum dat bb + ab + $\frac{aa}{4}$, ut patet in schemate adjecto*) et $\frac{1}{2}$a $\sqrt{5}$ multipl. per se ipsum dat $\frac{5aa}{4}$ (quia

*)
$$
\begin{array}{rl}
 & b + \tfrac{1}{2}a \\
 & b + \tfrac{1}{2}a \\ \hline
 & + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}aa \\
 + bb + \tfrac{1}{2}ab & \\ \hline
 bb + ab & + \tfrac{1}{4}aa
\end{array}
$$

$\frac{1}{2}$a per $\frac{1}{2}$a dat $\frac{1}{4}$aa, et $\sqrt{5}$ per $\sqrt{5}$ dat 5). Ita quantitas incognita b a quadrato depressa est ad simplicem formam seu primum gradum; quoniam ergo b + $\frac{1}{2}$a aequ. $\frac{1}{2}a\sqrt{5}$, hinc utrobique auferendo $\frac{1}{2}$a, fiet b aequal. $\frac{1}{2}a\sqrt{5} - \frac{1}{2}a$ sive b est ad a ut $\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ est ad 1. Tantum ergo ad habendum valorem ipsius b ex data a quaeritur $\sqrt{5}$, quae sane in lineis accurate exhiberi potest. Sit enim triangulum rectangulum BAD (fig. 16), cujus latus minus BA sit 1, medium AD, 2, tunc maximum BD erit $\sqrt{5}$. Nam quadratum ipsius 1 seu BA est 1, ipsius AD seu 2 est 4; jam quadratum hypotenusae BD aequale est duobus laterum quadratis per inventum Pythagorae; ergo 1 + 4 seu 5 ipsa hypotenusa erit latus hujus quadrati seu $\sqrt{5}$. Si jam igitur recta AB seu 1 extrema et media ratione secanda sit, sumatur dimidium ipsius BD nempe BE, quod erit $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, et ab eo detrahatur EF (aequalis ipsi BG, dimidiae ipsius AB unitatis, adeoque $\frac{1}{2}$), restabit BF aequal. $\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, quae per calculum praecedentem erit major pars rectae AB proposito modo secandae. Sumta ergo BC aequal. BF, erit recta AB secta in duas partes BC, CA sic, ut minor CA sit ad majorem BC ut est major pars BC ad totam AB, quae constructio per calculum inventa consentit cum ea, quam exhibuit Euclides in undecima sexti juncta 30ma secundi Elementorum, ubi etiam triangulo rectangulo, cujus unum latus circa rectum alterius duplum est, utitur.

Quomodo autem aliae omnes quantitates vel rationales vel surdae lineis exhiberi possint, suo loco ostendetur; sed quando numeri quaeruntur, sciendum est eos exhiberi posse vel propemodum, nempe per appropinquationem, si inter appropinquandum alicubi subsistatur, vel exacte per seriem infinitam, si investigetur ipsa appropinquationum progressio. Cum enim hoc modo exprimantur omnes appropinquationes simul, manifestum est rem ipsam de qua agitur exacte exprimi, cum enim in singulis error fiat semper minor ac minor, adeo ut exhiberi possit minor data quavis quantitate, in omnibus tandem erit nullus. Ita in recta extrema et media ratione secanda quotientes omnes simul exprimamus hoc modo:

$$\frac{b}{a} \text{ aequ. } \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}}} \text{ aequ. } \odot$$

seu b aequ. $\odot$, posito a esse 1
BC AB

AC autem seu pars minor erit $1-\odot$ seu $1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{ etc.}}}$

Ex hac autem aequatione inter $\frac{b}{a}$ et seriem infinitam $\odot$ elici possunt appropinquationes semper accuratiores, prout longius progredimur. Nempe si ponatur $\frac{b}{a}$ aequ. $\frac{1}{1}$ posito a aequ. 1, fiet b aequ. 1, qui valor est justo major; proximum est ut, a existente 1, sit b aequ. $\frac{1}{1+\frac{1}{1}}$ aequ. $\frac{1}{2}$, qui valor est justo minor; hinc b aequ.

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}} \text{ aequ. } \frac{1}{1+\frac{1}{2}} \text{ aequ. } \frac{2}{3}$$ justo major; inde b aequ.

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}} \text{ aequ. } \frac{3}{5}$$ justo minor; hinc b aequ.

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}} \text{ aequ. } \frac{5}{8}$$ justo major, prodeuntibus ordine numeris illis supra positis 2, 3, 5, 8, 13 etc. Unde cum $\frac{1}{1}$ sit major quam b et $\frac{1}{2}$ minor quam b, hinc sumendo alterutrum pro vero, error erit minor quam differentia inter $\frac{1}{1}$ et $\frac{1}{2}$ seu minor quam $\frac{1}{2}$, et cum $\frac{2}{3}$ sit major et $\frac{3}{5}$ minor quam b, error his assumtis erit minor quam $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}$ seu quam $\frac{1}{15}$, et ita porro, et ob $\frac{5}{8}-\frac{8}{13}$ erit error minor quam $\frac{1}{104}$, et ita poterit esse minor dato quovis numero. Series autem ista

1 1 2 3 5 8 13 21 34

hanc habet proprietatem notabilem, quod terminus ultimus unitate minutus aequalis est omnibus praecedentibus praeter penultimum

(5 - 1 aequ. 1 + 1 + 2, et 8 — 1 aequ. 1 + 1 + 2 + 3, et 13 — 1 aequ. 1 + 1 + 2 + 3 + 5), et quod, ut in progressione geometrica factum ab extremis aequatur facto a mediis, ita si quatuor hujus termini sumantur ut 2, 3, 5, 8, factum ab extremis 2.8 nempe 16 et factum a mediis 3.5 nempe 15 differt unitate. Imo si tres sumantur 5, 8, 13, factum ab extremis $5\frown 13$ seu 65 differt unitate a quadrato mediae $8\frown 8$ seu 64.

V.

MATHESIS UNIVERSALIS.

Praefatio.

Nisi in re tot jam ingeniis trita multa nova et ad perfectionem artis necessaria dicenda haberem, totiusque scientiae longe diversam a receptis notionibus ideam animo concepissem, nollem ab aliis bene dicta necquicquam retractare. Et sane constitueram initio solam tradere Scientiam infiniti, quae Matheseos Generalis pars est altior et ad naturam rerum penitius noscendam inprimis prodest, quod nulla ejus Elementa extarent egoque ipse novum in ea tractandi calculi genus protulissem approbatum insignibus Viris, quo pars quoque Geometriae Algebram transcendens facta est magis analytica; sed postea mecum ipse reputavi, ne communem quidem Logisticam, quae Algebrae nomine venit, a suis fontibus peti, neque aestimandi modum in universum satis nosci, unde saepe gravissimi errores sunt nati, qualis illorum est qui naturam virium motricium per gradus velocitatum ejusdem corporis metiuntur, ut suo loco constabit. Sed neque quantitatis aut relationis inter quantitates in universum, imo quod mirum videri queat, neque simplicissimae relationum speciei, hoc est ratio-

[Scopus operis tum ad promovendam ipsam Scientiam Mathematicam Generalem artemque in ea inveniendi, tum ad juvandos scientiae candidatos, ut filum quoddam habeant in labyrintho.]

nis ac proportionis naturam satis explicatam haberi, atque ex his causis potissimum factum esse notabam, ut plerique Vietam et Cartesium exscribere contenti nec totius scientiae vim complexi, pomoeria ejus proferre non tentarint. Oportet enim etiam incognitarum regionum praejudicatam quandam notitiam haberi, ut in novas terras expeditiones fiant. Itaque qui supra veteres notiones mentem non attollunt neque in ulteriora prospiciunt, ne suspicione quidem novarum rerum ducuntur. Cui malo inprimis occurrunt illae Scientiarum delineationes, quibus etiam desiderata attinguntur, sed quibus abstinent autores qui videri volunt omnia praestitisse, quod in Cartesio non reprehenderem ob maxima Viri merita, nisi viderem magno Scientiarum detrimento hanc inanem fiduciam in magistrum progressus ingeniorum stitisse. Videbam etiam hujus studii candidatos fortuna magis quam methodo proficere, et cum nihil aliud hic tradi debeat, quam Logica Mathematica, id est ars judicandi atque inveniendi circa quantitates, a plerisque tamen non satis logice, id est cum ratione, tractari calculum algebraicum, quod perinde est atque in labyrintho sine filo versari. Neque enim arbitror satis explicari solere constantem modum Geometrica traducendi in calculum, aut vicissim a calculo redeundi ad constructiones; unde fit ut aestuent tirones nec satis habeant quo se vertant, et ad vulgaris Geometriae vitium redeant ut a casu pendere cogantur, magistris ipsis plerumque more artificum magis in consuetudine longae praxeos artem positam habentibus quam in regulis certis, quas tradere aliis possint. Praeterea considerabam tractatum quidem egregie fuisse, inde ab Euclide, de iis quae eandem habent rationem, sed novam latissimi usus doctrinam superesse de his quae eandem relationem habent. Naturam quoque serierum seu progressionum (quibus loca respondent in Geometria) magis fuisse libatam quam expositam. Ac ne quid nunc dicam de modo solvendi problemata in rationalibus aut in integris (quod magis ad arithmeticam spectare censetur), ubi hactenus fere per tentamenta processum est. Inter ipsius Algebrae desiderata semper habui Tabulas quasdam ac velut series Theorematum sive Canonum, qui si conditi haberentur semel in universum, magno ac taedioso calculandi atque semper in novis exemplis idem saxum volvendi onere nos levarent, praeterquam quod mirifice augerent scientiam et rationem darent multa praevidendi primo aspectu, quae nunc ipso calculi exitu sera sapientia discimus. Sed est in eam rem opus novis qui-

busdam ex Speciosa illa Generali repetitis artibus, quam et Combinatoriam vocare possis, non quantitatibus alligatam, sed in universum rerum formas seu qualitates tractantem, quando et quantitatum notitiam per qualitates ac similitudines ipsius Geometriae exemplo dirigi necesse est. Ipsa quoque Logica, hoc est generalissima Ars cogitandi, nova nobis subsidia suppeditare debet tum pro inventione universalium ex specialibus et inductione quadam scientifica, tum pro nova quadam Analysi gradaria, ubi vulgaris illa per saltum incedens difficultatem habet, ut alia taceam verae ac realis Logicae parum vulgo cognitae arcana. Quemadmodum autem Logistica vel Generalis de Magnitudine Scientia (cujus pars Algebra est) Speciosae Generali et ipsi postremo Logicae subordinata est, ita vicissim sub se habet Arithmeticam et Geometriam et Mechanicen et Scientias quae mistae Matheseos appellantur. Nam numeri definiti Arithmeticae sequuntur leges numerorum indefinitorum quos Algebra tractat et ipsos suos ex ea operationum canones petunt. Et in Geometria omnis puncti situs magnitudine quarundam rectarum determinatur. Et certis punctis definitis per rectas habentur Loca magis composita punctorum infinitorum eandem legem subeuntium, lineae et superficies, quibus figurae planae vel solidae terminantur, ac corpora denique ipsa. Vicissim locorum compositorum concursu simpliciora definiuntur.

Motus ipse quatenus a causae et potentiae consideratione abstrahitur, Geometricae est tractationis; nam lineae, imo et figurae omnes sunt motuum vestigia, et constituta lege motus, tempus, velocitatem, viam definire, rem purae Geometriae esse censeo. Sed Dynamicen quae tractat de Viribus motricibus corporumque conflictu, altius aliquid spirare, et sua quaedam principia petere comperi ex Metaphysica, cujus est dispicere de causis et de viribus atque actionibus substantiarum in universum, neque enim ista (quemadmodum res matheseos) imaginando consequare. Astronomiam nihil aliud esse quam situum et motuum repraesentationem manifestum est. Optica

[De usu hujus Scientiae, ut qui ejus praecepta teneat, ipse per se facilius invenire possit, quae in Geometria et Mechanica et Mathesi mista traduntur, paucis tantum privatis cujusque scientiae ad hanc subalternae principiis cognitis. Quod nunc magis locum habet, ex quo novum Calculi Algebram Transcendentis hoc primum libro explicati genus ipsa infiniti scientia subiit, quae partem hujus nostrae facit et ad majoris momenti problemata adhiberi debet.]

et Musica praeter physicas quasdam hypotheses experimento comprobatas mera sunt Arithmeticae et Geometriae specimina. Et in universum natura corporum quatenus cognoscitur, Mechanicas Leges subit, itaque physica, quatenus absolvit munus suum, redit ad Mechanicen; vicissim Mechanica tota ad Geometricas aequationes reducitur accedente propemodum solo illo ex Metaphysicis altiore principio quod nuper introduximus de aequalitate causae plenae integrique effectus. Geometria ipsa postremo ad calculum, hoc est ad nostram scientiam revocari potest, cujus praecepta praesentis operis materia erunt. Hujus igitur scientiae praeceptis cognitis, saltem quousque ea hactenus promota est, eousque asserere licet, unumquemque subordinatas illas scientias per se consequi posse, paucis tantum cujusque scientiae privatis principiis memoriae prius mandatis, ita ut magno numero propositionum onerare ingenium necesse non sit. Quae praestare cum hic ostendatur, non temere dicemus Mathesin universalem hoc loco tradi. Nam et in ipsa Geometria, qui pauca theoremata situs tenuerit et calculo recte uti sciverit, calculo consequetur omnia quae apud Euclidem et Apollonium et similes extant, idque partim jam tum ex Vietae et Cartesii inventis. Cum vero nec ista longe satis porrigantur, et praeterea Geometria quaedam sublimior quam nemo fere Veterum praeter Archimedem tractavit, hactenus calculi leges respuerit, imo a calculi autoribus diserte fuerit exclusa, quasi Mechanicum esset quicquid Algebram non patitur, nos huic errori (si quid judico) succurrentes novo calculi genere Scientiam infiniti instruximus, non per series tantum, sed et per summas differentiasque varii gradus, id est per quantitates conflatas et conflantia infinitis replicationibus continui elementa. Ita nunc tandem effecisse videmur, ut quicquid Geometria figuris exhibere potest, nos calculo vel algebraico vel certe nostro isto gradus aequationum algebraicarum omnes transcendente consequamur, ut jam demum asseri possit, totam Geometriam et quicquid in natura et arte leges Geometricas accepit, huic scientiae obsequi. Quod experientia ipsa confirmat, quando methodo nostra expedita sunt nuper quae prius summorum virorum conatus repulere.

MATHESEOS UNIVERSALIS

PARS PRIOR.

De Terminis incomplexis.

(1) *Mathesis universalis* est scientia de quantitate in universum, seu de ratione aestimandi, adeoque limites designandi, intra quos aliquid cadat. Et quoniam omnis creatura limites habet, hinc dici potest, ut Metaphysica est scientia rerum generalis, ita Mathesin universalem esse scientiam creaturarum generalem. Duasque habet partes: scientiam finiti (quae Algebrae nomine venit priorque exponetur), et scientiam infiniti, ubi interventu infiniti finitum determinatur.

(2) Quia autem omnis *quantitas* determinari potest per Numerum partium congruentium inter se seu repetitionem *mensurae*, hinc fit ut mathesis universalis simul sit scientia de Mensurae repetitione seu de Numero, unde et generali *calculi* nomine venire solet.

(3) Agitur autem tam de numero certo seu speciali quem tractat *Arithmetica*, quam de numero incerto et generali quem exponit *Logistica*, ut quidam vocant, quam aliqui speciosam, alii denique Algebram appellant. Nam a, b, c; y, x nihil aliud sunt in calculo quam Numeri, ut $a+b=x$ significat $2+3=5$ vel $1+7=8$, vel aliquid simile.

(4) Quodsi de lineis vel aliis rebus invicem addendis agatur, nihilominus tamen non nisi numerorum additio est, nam per lineas, quatenus in iis quantitas consideratur, intelligitur numerus aliquis mensurae veluti pedum. V. g. cum in unum addo a et b ad faciendum $a+b$ seu x, posito a esse lineam unius pedis et b duorum pedum, idem est dicere ex $a+b$ fieri x, quam dicere ex $1+2$ fieri 3 seu ex uno pede et duobus pedibus simul sumtis fieri tres pedes.

(5) Hinc patet, Arithmeticam et Algebram aut Logisticam παραλλήλως tractari posse, imo debere, cum eadem sit objecti natura eaedemque operationes, tantumque interesse quod in Arithmetica sunt numeri speciales, in Logistica vero Numeri generales vel indefiniti.

Et cum ii qui ad Algebram discendam accedunt, jam intelligere soleant Arithmeticam, hinc commode uti possumus praeceptis Arithmeticae ad Algebram translatis. Quemadmodum qui linguam aliquam jam tenet, Grammatica ejus mutatis mutandis utiliter ad alias linguas, praesertim cognatas discendas uti potest.

(6) Praeterea notandum est, omnes scientias a materia sensibili abstractas seu mere rationales habere aliquid analogum logicae, eoque magis quo magis sunt abstractae seu viciniores Logicae, ita ut quasi Logicae quaedam utentes, ut vulgo loquuntur, censeri possint. Quid enim aliud agunt, quam quod rationes generales inducunt in materiam?

Et quemadmodum multi Logicam illustrare tentaverunt similitudine computi ipseque Aristoteles in Analyticis Mathematico more locutus est, ita vicissim et multo quidem rectius Mathesis praesertim universalis, adeoque Arithmetica et Algebra tractari possunt per modum Logicae, tanquam si essent Logica Mathematica, ut ita in effectu coincidat Mathesis universalis sive Logistica et Logica Mathematicorum; unde et Logistica nostra nomine Analyseos Mathematicae passim venit.

(7) In Logica autem sunt Notiones, Propositiones, Argumentationes, Methodi. Idem est in Analysi Mathematica, ubi sunt quantitates, veritates de quantitatibus enuntiatae (aequationes, majoritates, minoritates, analogiae etc.), argumentationes (nempe operationes calculi) et denique methodi seu processus quibus utimur ad quaesitum investigandum.

(8) Porro ut Notiones in Logicis sunt vel Categorematicae vel Syncategorematicae, verb. gr. Homo aut equus est notio categorematica, sed particula et in termino isto: homo et equus, est syncategorematica; ita similiter in Mathesi universali notionibus categorematicis respondent quantitates seu Numeri quae quive designantur notis primariis: 1, 2, 3; a, b, x. Sed notionibus syncategorematicis respondent notae secundariae, et ut ita dicam, connotationes, veluti signa vincula aliaeve notae relationum inter quantitates.

(9) Signa κατ' ἐξοχὴν vocari solent $+$ plus. et $-$ minus, quae sunt notae additionis et subtractionis; ita $2+3$ facit 5, et $5-3$ facit 2; $a+b=c$, $c-b=a$.

(10) Notae multiplicationis sunt $\frown$ vel punctum; interdum etiam simplex ascriptio. $2\frown 3$ vel 2.3 significat bis tria seu 6, ut ex $a\frown b$ simplici ascriptione fit $ab=e$.

Notae divisionis $\frac{a}{b}$ vel $a:b$.

Sic $3\frown 5$ vel 3.5 mihi significant ter quinque seu 15. Et $15:3$ mihi significat 15 divis. per 3 seu 5.

(11) Nota comprehensionis seu vinculum, ut $\overline{a+b}.c$, significat $a+b$ multiplicari per c, seu fieri $ac+bc$; nam si scripsissemus $a+bc$ longe aliud prodiisset.

Pro vinculo praesertim repetito saepe utor commatibus iisque repetitis; sic $a+b,:,c+d$ mihi significat $a+b$ dividi debere per $c+d$. Sic $\surd,,a+b,:,c+d,,:,l+m$ mihi significat radicem ex fractione facta divisione ipsius $a+b$ per $c+d$, debere dividi per $l+m$. Quod et sic notare possem $\sqrt{a+b,:,c+d,:,l+m}$; vulgo vero sic notaretur $\dfrac{\sqrt{\dfrac{a+b}{c+d}}}{l+m}$, quod inter alia incommoda nimis spatii in pagina occupat. Utor et interdum parenthesibus, verbi gratia $(a+b)c$, item $\surd((a+b):(c+d)):(l+m)$. qua ratione in valde compositis optime tolluntur aequivocationes. Sed et solis intervallis majoribus minoribusque designari posset, quaenam in unum complexum sint conjungenda, dictae tamen designationes sufficiunt.

(12) Est et nota potentiae, seu ductus in se ipsum; $\boxed{2}\overline{a+b}$ significat quadratum ipsius $a+b$, et $\boxed{3}\overline{a+b}$ significat ejus cubum, $\boxed{4}$ biquadratum, $\boxed{5}$ surdesolidum, $\boxed{6}$ quadratocubum, et ita porro, ubi 2, 3 etc. sunt exponentes. Quanquam et saepe sic solummodo scribo exponentem supra ponendo $\overline{a+b}^2$ vel $\overline{a+b}^3$. Quidam solent exponentem scribere non supra, sed simpliciter post quantitatem per potentias exaltandam, ex. gr. a2 idem ipsis est quod aa vel quod a^2; sed cum saepe in calculo numeri ipsi pro literis adhibeantur, nascitur hinc aequivocatio, ut alia taceam incommoda.

(13) Reciprocum ipsius potentiae est Radix, cujus nota est $\surd$, id est r cum productione, ut $\sqrt{ab}$, $\sqrt{aa+ab}$, id est radix quadrata educta ex ab, vel ex aa et ab. $\sqrt[3]{}$ est radix cubica, $\sqrt[4]{}$ est biquadritica, $\sqrt[5]{}$ surdesolida, $\sqrt[6]{}$ quadrato-cubica, et ita porro. Reciprocatio inter potentiam et radicem sic intelligitur in exemplo $\sqrt[2]{9}=3$ et vicissim $9=\boxed{2}\,3$ vel $9=3^2$ vel $9=3.3$.

(14) Nota aequalitatis solet esse $=$, ut $a=b$. Cartesius adhibet $\propto$, credo a litera initiali aequalitatis nempe æ.

(15) Nota majoritat $\ulcorner$, ut $5 \ulcorner 3$ significat 5 esse majus quam 3.

Nota minoritatis $\urcorner$ ut $3 \urcorner 5$ seu 3 esse minus quam 5.

(16) Nota differentiae a Cartesio et Schotenio adhiberi solet $=$, ut $a=b$ significat ipsis differentiam inter a et b, sive excessum ejus quod inter haec duo est majus, cum scilicet ignoramus adhuc utrum sit majus. Verum deprehendi, non esse opus peculiari signo differentiae, sed id contineri sub signis ambiguitatis quae a me sunt uberius exculta.

Itaque differentia inter a et b nihil aliud est, quam alterum horum $+a-b$ vel $+b-a$ seu $-a+b$, unde a me scribi sic solet $\pm a \mp b$, modo intelligatur id quod majus est ex duobus affici signo $+$, alterum verum signo $-$.

Datur et ambiguitas major et quidem triplex, ut si sit $+a+b$, quod significat vel summam vel differentiam, cum scili-
$+ \quad -$
$- \quad -$
cet duas quantitates in unam componendam conjungendas constat, nec tamen adhuc determinatur utrum id sit faciendum per additionem an per subtractionem; et si per subtractionem, quodnam duorum sit subtrahendum ab altero.

Notae quoque peculiares rationis et proportionis adhiberi solent. Sic quidam solent per $a \div b \because c \div d$ significare, eandem esse rationem seu proportionem ipsius a ad b, quae est ipsius c ad d. Sed ego deprehendi regulariter non esse opus in calculo peculiaribus signis pro rationibus et proportionibus, earumque analogiis seu proportionalitatibus, sed pro ratione sive proportione sufficere signum divisionis, et pro analogia seu proportionum coincidentia sufficere signum aequalitatis. Itaque rationem seu proportionem ipsius a ad ipsum b sic scribo: $a:b$ seu $\frac{a}{b}$, quasi de divisione ipsius a per b ageretur.

Et analogiam seu duarum proportionum aequalitatem sive convenientiam designo per aequalitatem duarum divisionum seu fractionum. Et cum designo, eandem esse rationem a ad b quae est c ad d, sufficit scribere $a:b = c:d$ seu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Etsi enim in se et formaliter alia sit proportionis quam divisionis natura, attamen quia posito $a \div b \because c \div d$, semper est $a:b = c:d$, et vicissim hoc posito sequitur illud; hinc ne superfluas notas adhibeam, ipsam rationem et proportionem statim hoc modo in calculum traduco, praesertim cum infra appariturum sit, omnes Euclideas de Rationibus et

Proportionibus consequentias ex hoc notandi modo sponte nasci, nec opus esse peculiaribus regulis vel praeceptis.

Praeter notationem proportionis et rationis adhibeo etiam interdum notam Relationis in genere. Est enim proportio tantum relationis species, eaque simplicissima. Sed relationes adhuc variari possunt modis innumerabilibus, ex. gr. cum dato sinu recto et sinu verso detur radius, hinc intelligi potest relatio quaedam inter radium r, sinum s, et sinum versum v, quam sic designo $r;\tilde{s};v$, et si esset $r;\tilde{s};v$ eadem cum $m;\tilde{n};p$ seu $r;\tilde{s};v \sim m;\tilde{n};p$, id mihi significaret, etiam m, n, p se habere ut radium, sinum et sinum versum.

Unde praeter notam aequalitatis habeo et notam similitudinis $\sim$, qua et usus sum in exemplo proxime praecedente. Sic si sit $aa-bb=cc$ et $ll-mm$ nn, tunc dico esse $a;\tilde{b};c \sim l;\tilde{m};n$ seu relationem inter a, b, c eandem esse respective (seu eodem ordine servato) cum relatione inter l, m, n.

Habeo et notam coincidentiae ∞ seu identitatis. Exempli gratia sit $aax^2+2abx+bb \infty lx^2+mx+n$, hoc mihi non tantum significat aequalitatem inter has duas formulas (quemadmodum si scripsissem $aax^2+2abx+bb = lxx+mx+n$), sed significat etiam coincidentiam, adeoque aequalitatem singulorum terminorum, adeoque erit $l=aa$ et $m=2ab$ et $n=bb$. Itaque quod vulgo vocant comparationem aequationum, revera est identificatio quaedam seu coincidentia.

Quemadmodum etiam $+$ est nota conjunctiva seu cumulationis et respondet τῷ et, ut $a+b$ id est a+b simul, ita datur quoque nota disjunctiva seu alternationis quae respondet τῷ vel, sic $a \hat{v} b$ mihi significat a vel b. Idque et in calculo usum habet, nam si sit $xx+ab=\overline{a+b}x$, erit $x=a \hat{v} b$ seu x significabit vel a vel b, habebitque adeo valorem ambiguum. Ex. causa si sit $xx+6=5x$, potest x esse 2, sed tamen potest etiam x esse 3. Nam si x sit 2, tunc ex $xx+6=5x$ fiet $4+6=10$; et si x sit 3, tunc ex $xx+6=5x$ fit $9+6=15$. Plures autem incognitae hujus valores seu praesentis aequationis radices dari non possunt, ut suo loco patebit.

Hinc usum quoque habent signa ambigua, et suo loco patebit, ambiguitatem in calculo esse fontem irrationalitatis; itaque cum scribo $x=3+\sqrt{4}$, tunc id potest explicari tam per $3+\sqrt{4}$ seu $3+2$

seu 5, quam per $3-\sqrt{4}$ seu $3-2$ seu 1, adeoque erit $x=5\,\hat{v}\,1$. Nam ut tollamus irrationalitatem, sit $x-3=\sqrt{4}$; ergo $xx-6x+9=4$ seu $xx-6x+5=0$ seu $xx+5=6x$, ubi patet satisfacere tam 5 quam 1. Nam si x valeat 5, fiet $25+5=30$; sin x valeat 1, fit $1+5=6$.

Introduxi et novum genus notandi pro calculo differentiali et summatorio. Sit enim series repraesentata per figuram adjectam (fig. 17) ubi abscissae AB, nempe A_1B, A_2B, A_3B etc. significant locum in serie seu numeros ordinales, sed ordinatae BC, uti ${}_1B_1C$, ${}_2B_2C$, ${}_3B_3C$ etc. significant ipsos terminos seriei. Jam AB seu abscissam quamcunque generali appellatione vocemus x, et BC quamcunque seu ordinatam ipsi x respondentem vocemus y si placet, adeo, ut si x sit A_2B, respondens ei y futura sit ${}_2B_2C$. His positis jam porro possumus considerare incrementa quaedam seu differentias tam in abscissis proximis quam in ordinatis. Ex. g. differentia inter duas proximas abscissas A_1B et A_2B est ${}_1B_2B$ seu ${}_1C_2D$, et differentia inter duas proximas ordinatas ${}_1B_1C$ et ${}_2B_2C$ est ${}_2D_2C$. Similiterque differentia inter duas alias proximas abscissas A_3B et A_4B est ${}_3B_4B$ seu ${}_3C_4D$. Et differentia inter duas iis respondentes proximas ordinatas ${}_3B_3C$ et ${}_4B_4C$ est ${}_4D_4C$. Quemadmodum autem quamlibet abscissam velut A_1B, A_2B, A_3B, A_4B etc. generali appellatione vocavimus x, et quamlibet ordinatam velut ${}_1B_1C$, ${}_2B_2C$, ${}_3B_3C$, ${}_4B_4C$ generali appellatione vocavimus y; ita quodlibet incrementum vel elementum abscissae (quo scilicet sequens supra praecedentem crescit) velut ${}_1B_2B$, ${}_2B_3B$, ${}_3B_4B$ generali appellatione vocabimus dx, id est differentiam duarum proximarum x; et similiter quodlibet elementum vel incrementum ordinatae (quo scilicet sequens supra praecedentem crescit) velut ${}_1D_1C$, ${}_2D_2C$, ${}_3D_3C$, ${}_4D_4C$ generali appellatione vocabimus dy, id est differentiam duarum proximarum y.

Adhibuimus etiam notam pro summis; nam si quaelibet harum ${}_1D_1C$, ${}_2D_2C$, ${}_3D_3C$, ${}_4D_4C$ vocetur v, summa omnium (id est ${}_1D_1C+{}_2D_2C+{}_3D_3C+{}_4D_4C$) id est ${}_4B_4C$ a me per compendium vocabitur $\int v$. Hinc patet, ut reciprocae sunt additio et subtractio, tum multiplicatio et divisio, itemque potentia et radix, ita et reciprocas inter se esse summas et differentias. Nam in schemate praecedenti quamlibet ex dictis ${}_1D_1C$, ${}_2D_2C$, ${}_3D_3C$, ${}_4D_4C$ vocavimus v, ita ut v sit DC; sed easdem etiam vocavimus dy, referendo ad ipsas y seu BC, quarum sunt incrementa. Habemus ergo $dy=v$

et vicissim $\int v=y$. Nam summae omnium v vel omnium DC, inde ab initio aequantur ultimae y (seu ${}_1D_1C+{}_2D_2C+{}_3D_3C+{}_4D_4C={}_4CB_4C$); quia ergo $\int v=y$, et $v=dy$, fiet $\int dy=y$ seu summa differentiarum inter ipsas y reddit ipsum terminum y, prorsus ut in potentiis et radicibus $\boxed{2}\,\overline{\sqrt[2]{3}}=3$.

Cum vero ipsae DC seu v sive dy non minus progressionem vel incrementa aut decrementa differentiasque adeo suas habeant, quam ipsae y, hinc oriuntur differentiae differentiarum seu ddy. Imo dantur et differentiae tertiae, et ita porro, quoad usque est opus.

Reperi autem summatorium calculum imprimis pertinere ad figurarum quadraturas, differentialem vero ad tangentes vel directiones, et differentio-differentialem ad oscula seu flexiones; de quibus omnibus suo loco clariores notiones habebuntur.

Hactenus de Connotationibus seu notis secundariis quibus in calculo utimur; sed nunc ipsae quantitates notis istis vel primariis solis cum simplices sunt, vel primariis et secundariis simul designandae uberius a nobis exponi debent.

Quantitas designari potest litera, ut a, b, item numero vel vero, ut 3 (ternarius), vel fictitio, ut si 13 mihi non significet tredecim, sed potius quantitatem collocatam in formula prima 1, loco tertio 3, quam designo per 13. Unde patet, ne hoc quidem indifferens esse, quam notam simplicem primariam assumere velimus. Qua ratione ingentem Speciosae defectum suppleo, quod nempe assumtae vulgo notae, scilicet literae a, b etc. non satis significant ipsarum quantitatum inter se ordinem et relationem; ita in progressu calculi non apparent pulchrae illae harmoniae, legesque ac theoremata, quae primo statim aspectu designantur, si ordo quidam certus et regularis in notando servetur. Exempli causa si vulgari more cx^3+bx^2+qx+r multiplicetur per gx^2+px+e,

$$\text{productum erit}\left(\begin{array}{l} cgx^5+bgx^4+qgx^3+rgx^2 \\ \qquad +cpx^4+bpx^3+qpx^2+rpx \\ \qquad\qquad +cex^3+bex^2+qex+re \end{array}\right)$$

sed si $10x^3+11x^2+12x+13$ multiplicemus per $20x^2+21x+22$, ubi nulla nota sine ratione assumta est, nihilque est in assumtis, quod non exprimatur et discriminetur in notis, etiam progressus egregie in producto apparebit. Nempe per notam dextram numeri distinguimus coefficientes formulae primae a cofficientibus formulae secundae; per notam vero sinistram distinguimus sedem in quavis formula, seu cujusnam potentiae sit coefficiens; sic 21 intelligimus esse in formula secunda coefficientem ipsius x^1 seu x, et 12 intelligimus esse in formula prima coefficientem ipsius x^2.

Jam $10x^3+11x^2$ etc. in $20x^2+21x$ etc.

$$\begin{array}{llll} \text{dat } 10.20x^5+11.20x^4+12.20x^3+13.20xx & & & \\ \quad +10.21x^4 & 11.21x^3 & 12.21xx+13.21x & \\ & 10.22x^3 & 11.22xx & 12.22x+13.22, \end{array}$$

ubi patet in producto esse omnes combinationes possibiles certa lege atque ordine factas. Nempe in quovis membro coefficientis producti est binio, seu combinatio duorum numerorum fictitiorum. In qualibet harum binionum notae sinistrae sunt eaedem et eodem modo collocatae, nempe 1 et 2 veluti 10.20, aut 11.20, aut 10.21, et ita porro. In omnibus binionibus seu membris coefficientis ejusdem potentiae ipsius x, summa notarum dextrarum conficit idem, nempe numerum qui additus exponenti potentiae dat exponentem summum 5. Veluti coefficiens ipsius x^2 constat ex tribus membris, $13.20+12.21+11.22$, ubi patet $3+0$, itemque $2+1$, itemque $1+2$ facere semper idem nempe numerum 3, qui additus ad 2 (exponentem ipsius x^2) possit facere 5. Unde patet etiam, quot possibilia sint membra cujuscunque coefficientis, tot scilicet quot modis numerus 3 ex binis inferioribus 0, 1, 2 componi potest, et quot cujusque compositionis sunt transpositiones possibiles, veluti $1+2$ et $2+1$ sunt una quidem compositio, sed variant transpositione. Patet etiam hinc, productum hic scribi posse sine calculo, theorematibus hujus modi semel constitutis. Exempli gratiâ pro termino x primum scribemus

13. et mox supplendo fiet	13.2 et denique absolvendo	$13.20x^2$
12.	12.2	12.21 ..
11.	11.2	11.22 ..
10.	10.2	10.23 ..

Et ita ex primo membro cujusque coefficientis dato (quod determinatur ab ipso potentiae ipsius x gradu) patet reliqua quoque cum sua serie determinari.

Et haec majoris adhuc usus sunt, cum tres vel plures formulae invicem duci debent; nam si adhibeamus notationem regularem et accuratam, non vero ut vulgo arbitrariam, saepe praevidere possumus quid sit proditurum; et semper certa quaedam theo-

remata apta eruimus, facileque etiam errores procavemus aut emendamus.

Hinc etiam prodit ignorata hactenus vel neglecta sub-ordinatio Algebrae ad artem Combinatoriam, seu Algebrae Speciosae ad Speciosam generalem, seu scientiae de formulis quantitatem significantibus ad doctrinam de formulis, seu ordinis, similitudinis, relationis etc. expressionibus in universum, vel scientiae generalis de quantitate âd scientiam generalem de qualitate, ut adeo speciosa nostra Mathematica nihil aliud sit quam specimen illustre Artis Combinatoriae seu speciosae generalis.

Unde patet quoque, quam imperfecta hactenus fuerit Algebra, cum ne modus quidem simplices terminos exprimendi bene fuerit constitutus, ut taceam tot alios in Connotationibus defectus hic suppletos, et alias supplendos. Quemadmodum et ostendam, Arithmeticae notas, quantum ad Theoriam, hactenus male fuisse constitutas, ita scilicet ut relatio numerorum inter se atque ordo non apparuerit, eaque ratione factum est, ut magna verae Arithmeticae pars hactenus sit ignorata, quod in scientia maxime facili et maxime usuali mirum videri possit.

Quantitates quae notantur per literas vel numeros vel alias notas, sunt vel abstractae, vel concretae. Abstractae sunt numeri, vel etiam rationes, quas ipsas (quemadmodum supra dictum) ut numeros tractos concipio. Quantitates concretae possunt esse lineae, figurae, solida, tempora, motus, vires, soni, lux, et omnia denique, in quibus ejusdem mensurae repetitio intelligi potest; de quibus alias pluribus, ut applicatio Calculi generalis ad Geometriam, Dynamicen, Astronomiam, Physicam et alias scientias melius appareat.

Quantitates exprimuntur vel per notam simplicem, modo dicto, velut per a, b numerum; vel per plures notas inter se conjunctas, modum formandi quantitates designantes.

Prima formatio est per signum +, ut si ex a et b conjunctis per additionem seu simul sumtis fiat $a+b$, vel $a+b+c$, vel $a+b+c+d$. Fieri autem potest, ut quae hoc modo simul adduntur, habeant quandam relationem inter se, ex quibus simplicissima est, si coincidant; ut si a et b coincidant fit $a+b$ idem quod $a+a$, vel idem quod 2a, et $a+b+c$ idem quod $a+a+a$ seu idem quod 3a. Ex quo etiam apparet, quomodo Multiplicatio sit additio quaedam repetita. Et porro, cum habemus 2a, vel 3a, vel generaliter ma, vel am, rursus considerare licebit, ipsum numerum m posse aequalem esse numero a, et ex am fiet aa; unde jam nascitur Potentia, eodem in se multiplicato.

Habent autem potentiae suos gradus, nempe si a multiplices per a fit aa seu a^2 seu quadratum; si aa rursus multiplices per a, fit aaa seu a^3 seu cubus.

Tabula potentiarum: a^0 est unitas, a^1 seu a est latus seu quantitas, a^2 est quadratum, a^3 cubus, a^4 biquadratum, a^5 surdesolidum primum, a^6 (seu $a^{2\cdot3}$) quadrati-cubus, a^7 surdebisolidum seu surdesolidum secundum (nomine surdesolidi vocando omnem potentiam cujus exponens est numerus primitivus supra 3), a^8 seu $a^{2\cdot2\cdot2}$ triquadratum, a^9 seu $a^{3\cdot3}$ bicubus, a^{10} seu $a^{2\cdot5}$ quadrati surdesolidum, a^{11} surdetrisolidum seu surdesolidum tertium, a^{12} seu $a^{2.2.3}$ biquadrati cubus. Sic $a^{3\cdot3\cdot3}$ seu a^{27} erit tricubus, et $a^{5\cdot5}$, seu a^{25} erit bisurdesolidum, et a^{125} seu $a^{5\cdot5\cdot5}$ erit trisurdesolidum. Et in universum denominationes designant resolutionem exponentis in suos primitivos.

Quemadmodum porro potentiae nascuntur ex ductis invicem aequalibus, ita si diversae literae vel notae simplices ducantur, oriuntur quae vocare licet rectangula, quoniam in Geometria ab seu multiplicatio a per b repraesentatur optime per rectangulum planum (fig. 18); et abc, seu multiplicatio a per b et producti rursus per c repraesentatur per rectangulum solidum.

Imo etsi in Geometria non dentur nisi tres dimensiones, tamen in rerum natura dantur plures. Sint enim duo rectangula solida abc et lmn (fig. 19), prius ex auro, posterius ex argento, et pondus auri ad pondus argenti sit ut d ad p; patet pondus rectanguli solidi prioris ad pondus rectanguli solidi posterioris fore ut abcd ad lmnp, adeoque etsi spatia non sint nisi trium dimensionum, pondera tamen esse quatuor dimensionum. Quodsi impetus, motus, vires horumque varios gradus aut varias species adjungamus, possunt dimensiones multiplicari in infinitum.

Habemus ergo rectangula haec: birectangulum ab, trirectangulum abc, quadrirectangulum abcd, et ita porro.

Eadem exprimi possunt per combinationes. Nam ab est binio duorum, abc est ternio trium, abcd est quaternio quatuor talium: quae quidem combinatio, cum numerus combinandorum coincidit cum exponente combinationis, non nisi unica est. Alias sunt plures, exempli causa, rerum trium a, b, c sunt biniones tres, nempe ab, ac, bc; rerum quatuor a, b, c, d sunt biniones sex,

nempe ab, ac, ad, bc, bd, cd; terniones quatuor abc, abd, acd, bcd; sed de his suo loco.

Cum vero potentiae simplices sint formae ex iisdem sive aequalibus invicem ductis, et rectangula seu combinationes simplices sint formae ex diversis invicem ductis, superest jam ut eas formas seu combinationes spectemus, in quibus partim sunt eaedem literae, partim diversae, quas compositas vocare licet.

Et hae quidem formae variant, pro gradibus: in primo gradu nihil aliud habemus quam unam formam, a vel b etc.

In secundo gradu sunt formae duae: quadratum et binio seu birectangulum aa et ab.

In tertio gradu sunt formae tres: a^3, a^2b, abc, nempe praeter cubum a^3, et trirectangulum vel ternionem abc, occurrit a^2b (vel quod quoad formam eodem redit ab^2) quod possis appellare quadrato-simplex.

In quarto gradu sunt formae: a^4 (biquadratum), a^3b (cubo simplex), a^2b^2 (bibinio), a^2bc (quadratobinum), abcd (quaternio).

In quinto gradu sunt formae: a^5 (surdesolidum), a^4b (biquadrato simplex), a^3b^2 (cuboquadratum), a^3bc (cubobinum), a^2b^2c (bibinio simplex), a^2bcd (quadratotrinum). abcde quinio.

In sexto gradu sunt formae: a^6 (quadraticubus), a^5b (surdesolido simplex), a^4b^2 (biquadratoquadratum), a^4bc (biquadratobinum), a^3b^3 (tribinio), a^3b^2c (cubo-quadrato simplex) a^3bcd (cuboternum), $a^2b^2c^2$ (biternio), a^2b^2cd (bibinobinum), a^2bcde (quadrato quaternum), abcdef (senio).

In septimo gradu sunt formae: a^7 (surdesolidum secundum), a^6b (quadratocubo-simplex), a^5b^2 (surdesolido quadratum), a^5bc (surdesolido binum), a^4b^3 (biquadrato cubus), a^4b^2c (biquadratoquadrato simplex), a^4bcd (biquadrato ternum), a^3b^3c (tribino simplex), $a^3b^2c^2$ (cubobibinum), a^3b^2cd (cuboquadrato binum), a^3bcde (cubo quaternum), $a^2b^2c^2d$ biterno simplex), a^2b^2cde (bibino ternum), a^2bcdef (quadrato quinum) abcdefg (septenio). Atque ita porro ad gradum octavum, nonum et sequentes pergi posset, si esset opus; sed non est necesse his multum morari, etsi libare nonnihil prosit.

Notandum etiam, quadraticubum mihi significare a^6 seu $a^{2\cdot3}$, nempe quia exponens hujus potentiae 6 est productus ex 2 exponente quadrati et 3 exponente cubi, ubi semper in denominando incipio a numero producente minore. Sed cubo-quadratus, cum scilicet a majore incipio, longe aliud mihi designat, nempe formam productam ex cubo unius literae in quadratum alterius literae, ut a^3b^2, vel b^3a^2, vel quod idem est a^2b^3, ubi in denominando incipio ab altiore; quod observandum est ad aequivocationes evitandas. Itaque quadraticubo-quadratum mihi significabit a^6b^2, et quadraticubo-quadraticubus significat a^6b^6, quod etiam efferri potest sebinio, et quadraticubo-cuboquadratus significat $a^6b^3c^2$.

Ubi etiam notandum, quae sunt ejusdem literae connecti per genitivum, quae diversae per dativum; sic quadraticubus est a^6 seu $a^{2\cdot 3}$; nam revera est quadrati a^2 cubus, quia si a^2 ter in se cubice ducatur fit a^6; sed dativus significat transitum a litera in literam, ut cuboquadratus significat a^3b^2, seu cubum ab uno ductum in quadratum ab alio. Licet autem, observato hoc discrimine inter genitivum et dativum, minus sit necessarium observare quid sit praeponendum aut postponendum; nam quadraticubus seu cubus a quadrato idem est quod cubiquadratus seu quadratus a cubo; et quadrato cubus b^2a^3, id est ductum a quadrato alicujus literae b in cubum alterius literae a, idem est quod cubo quadratus a^3b^2, id est cubus alicujus literae a in quadratum alterius b; malo tamen majoris lucis causa praeter distinctionem genitivi et dativi adhibere distinctionem ordinis, ut in exprimendo exponente unius literae praeponam exponentis factores seu productores minores, sed ut in exprimendo combinationes potentiarum a diversis literis praeponam exponentem potentiae altioris.

Denique notandum est, quasdam formas servare legem justitiae, ita ut quaelibet in iis litera se habeat eodem modo, ut fit in rectangulis seu combinationibus simplicibus, nempe binionibus ab, ternionibus abc, quaternionibus abcd, et in harum potentiis seu bibinionibus a^2b^2, tribinionibus a^3b^3 etc., biternionibus $a^2b^2c^2$, triternionibus $a^3b^3c^3$ etc., biquaternionibus $a^2b^2c^2d^2$, triquaternionibus $a^3b^3c^3d^3$ etc., et ita porro.

Ceterae formae leges justitiae non observant nisi plures similes addantur inter se, ex. gr. quadrato simplex a^2b aliter tractat a quam b: si tamen in unum addantur $a^2b + ab^2$, corrigitur injustitia, et in formula hac composita ambae literae aequali jure utuntur.

Atque haec vel ideo praenotare operae pretium est, quoniam ut suo loco patebit, justitia (quemadmodum et pietas) ad omnia utilis est, ut etiam in calculo Algebraico ejus simulacrum prosit.

Expositis jam formis simplicibus, considerandum nunc est, posse inde oriri formulas compositas ex. gr. $x + y$, vel $x^2 + y^2$, vel $x^3 + x^2y$, vel $x + y + xx + xy$, vel $2x + 3y$, aliisque modis innumerabilibus. Duae autem sunt leges quae in hac compositione observari vel violari possunt: una est Lex Homogeneorum, quam tulit Vieta, altera est Lex Justitiae, quam ego introduxi.

Lex Homogeneorum est, ut quae in unum componuntur, sint ejusdem gradus, ex. gr. $x + y$, vel $x^2 + y^2$, vel $xx + 2xy$, vel $2xx + 3yy$, posito 2 et 3 esse numeros, hi enim in lege Homogeneorum nihil mutant. Sed si in unum addantur diversi gradus quantitates, tunc violata intelligitur lex Homogeneorum, ut si fiat $x + y + 2xx + 3xy$.

Et quidem si de numeris vel quantitate mere abstracta agatur, impune lex homogeneorum violari potest; ex. causa $6 + 15 + 8 = 27$, ubi faciendo $2 = a$, et $3 = b$, et $5 = c$ fiet $ab + bc + a^3 = b^3$, quod verum est, etsi lex homogeneorum non observetur, seu etsi rectangula plana $ab + bc$ addantur cubo a^3.

Sed cum numeri applicantur rebus, hoc non licet, neque enim addi possunt in Geometria rectangula plana ab et bc ad cubum a^3, neque licet comparationem instituere inter rectangulum solidum spatiale seu simplex διάσημα trium dimensionum, et inter corpus aliquod grave, quod est quatuor dimensionum, ut paulo ante est explicatum.

Interim licet etiam in rebus ipsis recedere a lege homogeneorum, saltem in speciem, subintelligendo aliquam quantitatem pro unitate assumtam, ex. gr. $ab + bc + a^3 = b^3$ significabit, 6 pedes cubicos una cum 15 pedibus cubicis et cubo duorum pedum simul aequari cubo trium pedum; seu unitatem 1 adhibendo $1ab + 1bc + a^3 = b^3$, id est rectangulum solidum 1ab seu ab (quia unitas non multiplicat) cujus altitudo unius pedis (1), latitudo duorum (a), longitudo trium (b) producunt sex pedes cubicos una cum rectangulo solido 1ac seu ac, cujus altitudo unius pedis (1), latitudo duorum 2(a) et longitudo 5(c) producunt 15 pedes cubicos, una cum a^3 cubo duorum pedum seu 8 pedibus cubicis aequari b^3 cubo trium pedum seu 27 pedibus cubicis.

Etsi autem Cartesius soleat non raro studio violare legem homogeneorum introductione unitatis, ego tamen ejus rei non magnum usum reperio, et malo cum Vieta, quoad commode licet, etiam in ipsis numeris legem homogeneorum sequi, quia ita sponte naturae nascitur calculus, maximeque id consentit ordini rerum, erroresque etiam facilius evitantur, cum lex homogeneorum inter examina sit calculi.

Habeo et novam homogeneorum Legem a me introductam pro calculo differentiali et summatorio, ubi praeter potentias et formas paulo ante positas occurrunt differentiae. Ex. causa addx homogenea est cum dxdx, seu quadratum differentiae primi gradus homogeneum est cum rectangulo ex differentia secundi gradus ducta in quantitatem ordinariam facto. Et hanc in rem regulam assignavi generalem, sed cui hoc loco immorari nolo, quia ista profundiora nondum satis intelligi possunt initio hujus tractationis.

Porro lex justitiae etsi minus necessaria sit quam lex homogeneorum, tamen non minus est utilis; non tantum enim inservit ad calculi examen ulterius et exquisitius, erroresque alias facile irrepentes praecavet, sed etiam modum ostendit, id quod de una quantitate per calculum venati sumus, de alia statim scribendi sine calculo, ex principio similitudinis seu ejusdem relationis. Est autem lex justitiae vel communis omnibus literis calculi propositi, vel tantum quibusdam inter se, et aliis rursus inter se. Communis omnibus literis est in formula qualis $x^3+y^3+z^3+2x^2y+2x^2z+2xy^2+2xz^2+2y^2z+2yz^2+5xyz$, ubi soleo magno calculi fructu compendiis uti in scribendo, nam hanc formulam breviter ita exprimo: $x^3+2x^2y+5xyz$, ubi per x^3 intelligo omnes cubos ex literis x, y, z, per x^2y omnes quadrato simplices ex iisdem, et ita porro in aliis. Unde multa generalissima theoremata condi possunt, quae locum habent quantuscunque sit numerus literarum, ex. gr. cubus de $x+y+z+\omega$ etc. seu compendiose cubus ipsius x est $x^3+3x^2y+6xyz$. Unde in specie explicando in quatuor literis cubus ab $x+y+z+\omega$ est

x^3 +	$3x^2y$ +	$6xyz$
y^3	$3xy^2$	$6xy\omega$
z^3	$3x^2z$	$6xz\omega$
ω^3	$3xz^2$	$6yz\omega$
	$3x^2\omega$	
	$3x\omega^2$	
	$3y^2z$	
	$3yz^2$	
	$3y^2\omega$	
	$3y\omega^2$	
	$3z^2\omega$	
	$3z\omega^2$	

Unde si plures essent literae, verb. gr. sex, septem, decem etc., immensa orietur moles membrorum, quae tamen omnis hac brevi formula $\boxed{3}\,x = x^3+3x^2y+6xyz$ sufficienter exprimitur, beneficio justitiae inter literas observatae.

Interdum lex justitiae propria observatur inter literas quasdam, et rursus alia propria inter alias quasdam literas in calculo occurrentes, ut si sit $\left.\begin{matrix}+a\\b\end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix}+a\\b\end{matrix}\right\} y^3+abxy$, patet x et y servare justitiam inter se, item a et b etiam servare justitiam inter se, etsi a et x (v. gr.) inter se justitiam non servent.

Aequationes vero, ut id obiter addam, etsi non sit plane hujus loci, duobus modis justitiam servant, uno: si omnibus quantitatibus ab una parte positis et nihilo posito in altera, oritur formula observans justitiam, quae formula est nihilo aequalis; altero modo observatur justitia in aequatione, si quidem aequatione ad formulam redacta ambae literae non tractantur actu ipso eodem modo, quod tamen de una nunc factum est, fieri potest de altera, et vice versa, quod contingit simplice mutatione signorum. Ita si sit $xx+yy=0$, inter x et y perfecte lex justitiae observatur; sed si sit $xx+x=yy+y$, tunc redacta aequatione ad formulam fit $\begin{matrix}+xx+x\\-yy-y\end{matrix}=0$, ubi aliter tractatur x quam y, revera tamen ambae literae pari jure utuntur lege justitiae non nisi in speciem violata, quoniam pari jure (mutatis signis) facere licet $\begin{matrix}+yy+y\\-xx-x\end{matrix}=0$, quemadmodum si ex priore $xx+yy=aa$ faciamus $xx=aa-yy$, lex justitiae etiam in speciem tantum violatur.

Caeterum etsi hactenus quantitates earumque formas simpliciores vel etiam formulas magis compositas tantum formaverimus explicate, seu actu ipso, possunt tamen et formari implicite seu *indicative*; nam saepe cum formulae sunt in se invicem ducendae, praesertim ubi sunt magis compositae, ductum illum non actu ipso peragimus (quod quomodo fieri debeat, pertinet ad explicationem operationum), sed tantum faciendum esse indicamus. Veluti si a idem sit quod $x+y$, et b idem sit quod $x-y$, erit ab idem quod $x+y,\ x-y$ seu $\overline{x+y}.\overline{x-y}$ seu $(x+y)\,(x-y)$. Imo si essent tres vel plures formulae, idem locum habet, ut si latera trianguli sint x, y, z, et a sit $+x+y-z$, et b sit $+x-y+z$, et ipa c sit $-x+y+z$, et f sit $+x+y+z$, ita ut tres priores sint excessus duorum laterum super tertium, quarta quantitas sit summa, reperietur, quartam radicis quadraticae ex quatuor invicem ductis seu $\frac{1}{4}\sqrt{abcf}$ dare aream trianguli ex datis tribus lateribus x, y, z, ut constat.

Hactenus non nisi additione, eaque aequalium, seu multiplicatione, eaque per aequalia seu potentia, et horum inter se combinationibus usi sumus, id est calculo directe progressivo, qui quidem semper succedit: nunc tempus est, ut admoneamus dari calculum regressivum, eumque non semper esse in potestate, et hic calculus est pro contrariis additionis, multiplicationis et excitationis potentiarum, nempe pro subtractione, divisione et radicum extractione. Scilicet quodvis licet addere cuivis, quidvis licet multiplicare per quodvis, et ab uno quoque datam potentiam excitare licet; sed non licet vicissim subtrahere quodvis a quovis, nec dividere quidvis per quodvis, nec extrahere quamvis radicem ex dato. Non licet, inquam, scilicet ut Numeri tales inde prodeant, quales hactenus tractavimus, integri scilicet, qui constent ex progrediente mensurae repetitione. Nam non licet subtrahere majus a minore, nec exacte dividere numeros multos v. g. primitivos, nec exacte extrahere radices, nisi ex certis numeris per multiplicationem in se invicem conflatis. Prodeunt tamen succedanea; nempe cum subtractio irrita est, numeri prodeunt negativi; cum divisio irrita est, numeri fracti; cum extractio irrita est, numeri surdi. Idemque est de quantitatibus, quod de numeris. Haec succedanea vere satisfaciunt et exacte, exhiberique etiam in natura actu ipso possunt.

Dantur et quantitates transcendentes, ipsis ut ita dicam surdis surdiores, quae tamen in Geometria et natura actu ipso exhibentur; sed de his suo loco clarius dicemus.

Dantur et quantitates inassignabiles, eaeque vel infinitae, vel infinite parvae seu infinitesimae, eaeque rursum varii gradus. Quae etsi per se non prosint, prosunt tamen non raro ad quantitates assignabiles per inassignabilium ambages inveniendas; et omnino in omni transcendentia intervenit aliqua consideratio infiniti aut infinitesimi.

Et generaliter, ut etiam initio notatum est, Mathesin universalem seu speciosam in duas partes dispesco, unam Algebraicam quae tractat de quantitate finita per finitas investigata, alteram transcendentem, quae tractat de quantitate finita quidem investiganda, sed interventu infinitarum, etsi postremo infinitae illae vel inassignabiles evanescant.

Itaque Matheseos universalis pars superior revera nihil aliud est quam Scientia infiniti, quatenus ad inveniendas finitas quantitates prodest. Unde merito visa est viris ingeniosis aliquid mirabilius, et ut sic dicam divinius in se habere. Et cum inter potissima Matheseos universalis superioris instrumenta sit calculus differentialis a me introductus, de quo suo loco, saltem id nunc notabimus, differentiationem esse etiam operationem progressivam, adeoque semper succedentem, sed summationem esse operationem quandam regressivam quae non est semper in potestate.

Omnes tamen operationes regressivae seu coarctatae semper fieri possunt indicative, per notam scilicet suam propriam, etsi non semper explicate vel actu ipso. Sic a—b significat ab a debere subtrahi b. Similiter $\frac{a}{b}$, vel ut ego scribo, a:b significat a dividi debere per b. Et $\sqrt[2]{ab}$ significat radicem quadratam extrahi debere ex ab.

Utrum vero res per Calculum exacte fieri queat, an vero tantum organice per Geometriam et Naturam, tum demum apparebit, cum accedet literarum explicatio per numeros speciales. Ex. gr. si a sit 2 et b sit 8, ab erit 16, et succedet extractio, scilicet $\sqrt{ab}$ seu $\sqrt{16}$ idem est quod 4; sed si a sit 2 et b sit 3, ab erit 6, et $\sqrt{ab}$ erit idem quod $\sqrt{6}$, quo casu exacta extractio non succedit.

Interdum operatio explicata, ubi non prorsus succedit, saltem tamen proficit ad majorem simplicitatem. Sic si sit a—b, et ponatur a=b−c, patet a—b fore idem quod —c, nam fit a—b idem, quod b−c−b seu (b)—c(−b) seu —c, destructis scilicet destruendis quod circulis illis vel inclusionibus noto. Et soleo diversas destructiones diversis distincte notatis inclusionibus designare. Ut si sit a idem quod b—c, et l idem quod m—n, et proponatur a+l—b—m, ex hoc fiet (b)—c(+m)—n(—b)(—m), id est —c—n.

Idem est in divisione. Sit enim proposita fractio a:b seu $\frac{a}{b}$, ut vulgo designant; sit b=ac, fiet a:b=1:c, seu a:b=a:ac, seu 1(a):(a)c seu =1:c.

Sed et in extractionibus saepe per explicationem pervenitur si non ad sublationem omnimodam surdae per extractionem perfec-