Tempus et Momentum, Spatium et Punctum, Terminus et Terminatum, etsi non sint Homogenea, sunt tamen **homogona**, dum unum in alterum continua mutatione abire potest.

Locum qui alteri loco inesse dicitur, Homogonum intelligimus, quod si ejus sit pars aut parti aequalis, non tantum homogonus sed et homogeneus erit. Angulus etsi ad punctum sit, non tamen est in puncto, alioqui in puncto magnitudo intelligeretur.

Si pars unius sit aequalis alteri toti, illud vocatur Minus, hoc Majus.

Itaque Totum est majus parte. Sit totum A, pars B, dico A esse majus quam B, quia pars ipsius A (nempe B) aequatur toti B. Res etiam Syllogismo exponi potest, cujus Major propositio est definitio, Minor propositio est identica:

Quicquid ipsius A parti aequale est, id ipso A minus est, ex definitione,

B est aequale parti ipsius A, nempe sibi, ex hypothesi,

ergo B est minus ipso A.

Unde videmus demonstrationes ultimum resolvi in duo indemonstrabilia: Definitiones seu ideas, et propositiones primitivas, nempe identicas, qualis haec est B est B, unumquodque sibi ipsi aequale est, aliaeque hujusmodi infinitae.

Motus est mutatio situs.

Movetur, in quo est mutatio situs, et simul ratio mutationis.

Mobile est homogonum extenso, nam et punctum mobile intelligitur.

Via est locus continuus successivus rei mobilis.

Vestigium est locus rei mobilis, quem aliquo momento occupat. Hinc vestigium termini est sectio viae quam terminus describit, cum scilicet mobile per sua vestigia non incedit.

Mobile per sua vestigia incedere dicitur, cum quodvis ejus punctum extra terminum in locum alterius puncti ejusdem mobilis continuo succedit.

Quodsi Mobile sic moveri non ponatur, tunc Linea est via puncti.

Superficies est via Lineae.

Amplum vel Spatium vel ut vulgo solidum est via superficiei.

Magnitudines viarum quibus punctum lineam, linea superficiem, superficies amplum describit, vocantur longitudo, latitudo, profunditas. Vocantur dimensiones, et in Geometria ostenditur non nisi tres dari.

Latitudinem habet, cujus datur sectio extensa, seu quod extenso terminatur.

Profunditatem habet, quod extensum non terminat, seu quod sectio extensi esse non potest, in profundo scilicet est plus aliquid quam quod terminus esse possit.

Linea est ultimum terminans extensum.

Amplum est ultimum Terminatum extensum.

Similitudo vel dissimilitudo in amplo seu spatio cognoscitur ratione terminorum, itaque amplum, cum plus aliquid sit quam quod terminus esse possit, intus ubique simile est. Amplaque quorum omnimodae extremitates coincidunt, congruunt, assimilantur, sunt coincidentia, congruentia, similia. Idem est in plano, quod est superficies intus uniformis vel sibi similis, et in recta, quae est linea intus sibi similis.

Omnimoda extremitas in Extensis latitudinem habentibus Ambitus appellari potest. Sic ambitus circuli est peripheria, ambitus sphaerae est superficies sphaerica.

Punctum (spatii scilicet) est locus simplicissimus, seu locus nullius alterius loci.

Spatium absolutum est locus plenissimus seu locus omnium locorum.

Ex uno puncto nihil prosultat.

Ex duobus punctis prosultat aliquid novi, nempe punctum quodvis sui ad ea situs unicum, horumque omnium locus, id est recta quae per duo puncta proposita transit.

Ex tribus punctis prosultat planum, id est locus omnium punctorum sui ad tria puncta non in eandem rectam cadentia situs unicorum.

Ex quatuor punctis non in idem planum cadentibus prosultat Spatium absolutum. Nam quodvis punctum sui ad quatuor puncta in idem planum non cadentia situs unicum est.

Prosultandi vocabulo utor ad ideam indicandam novam, dum ex quibusdam positis aliquid aliud determinatur eo ipso quod suae ad ipsa relationis unicum est. Relatio autem hic intelligitur situs.

Tempus in infinitum continuari potest. Cum enim totum tempus sit simile parti, habebit se ad aliud tempus, ut pars se habet ad ipsum, et ita in alio majore tempore continuari intelligitur.

Similiter et spatium solidum seu amplitudo continuari in infinitum potest, quandoquidem ejus pars sumi potest similis toti. Et hinc planum quoque et recta continuantur in infinitum. Eodem modo ostenditur, spatium velut rectam, itemque tempus, et in universum continuum in infinitum subdividi posse. Nam in recta et in tempore pars est similis toti atque adeo in eadem ratione secari potest, qua totum, et licet sint extensa, in quibus pars non est similis toti, possunt tamen transformari in talia, et in eadem ratione secari, in qua ea, in quae transformantur.

Sequitur etiam ex his, quovis motu posse assumi celeriorem et tardiorem in data ratione: radio enim rigido circa centrum acto motus punctorum sunt ut distantiae eorum a centro, itaque celeritates variari possunt ut rectae.

Aestimatio magnitudinum duplex est, imperfecta et perfecta; imperfecta, cum aliquid majus minusve altero dicimus, quamvis non sint homogenea, nec habeant proportionem inter se, quemadmodum si quis diceret, Lineam esse majorem puncto, aut superficiem linea. Et tali modo Euclides dixit, Angulum contactus esse minorem quovis rectilineo, etsi revera nulla inter hos toto genere diversos sit comparatio, quin nec homogenea sunt, nec continua mutatione ab uno in alterum transiri potest. In aestimationibus perfectis inter homogenea obtinet haec regula, ut transeundo continue ab uno extremo ad aliud, transeatur per omnia intermedia; sed non obtinet in imperfectis, quia quod medium dicitur heterogeneum est, itaque transeundo continue ab angulo acuto dato ad angulum rectum non transitur per Angulum semicirculi seu radii ad circumferentiam, etsi is angulo recto minor, et quovis acuto major dicatur, id Majus enim hic sumitur improprie pro eo quod intra alterum cadit.

Plures secundum quantitatem dantur relationes; sic duae rectae possunt eam habere Relationem inter se, ut summa earum aequetur constanti rectae. Et infinita possunt dari paria rectarum

hanc relationem inter se habentia, nempe x et y, ita ut sit $x+y=a$, si verb. gr. a sit ut 10, possunt x et y esse ut 1 et 9, ut 2 et 8, ut 3 et 7, ut 4 et 6, ut 5 et 5, ut 6 et 4, ut 7 et 3, ut 8 et 2, ut 9 et 1. Sed possunt etiam infiniti sumi fracti infra 10, qui satisfaciunt. Sic datur relatio talis inter duas rectas x et y, ut quadrata earum simul sumta aequentur quadrato dato rectae a, ita fiet $xx+yy=aa$: et talium etiam dari possunt paria infinita, et haec est in Circulo relatio sinus complementi ad sinum vel contra, nam uno posito x, alter est y, radius autem est a. Et tales relationes possunt fingi infinitae, tot quot species linearum in plano describi possunt. Veluti si x sint abscissae ex recta directrice, y erunt ordinatae inter se parallelae ad abscissas applicatae, quae terminantur in Linea.

Sed omnium Relationum simplicissima est, quae dicitur Ratio vel Proportio, eaque est Relatio duarum quantitatum homogenearum, quae ex ipsis solis oritur sine tertio homogeneo assumto. Veluti si sit y ad x ut numerus ad unitatem seu $y=nx$, quo casu x positis abscissis, y ordinatis, locus est recta, locus inquam seu Linea quam ordinatae terminantur. Ex quo etiam patet, si esset aequatio localis cujuscunque gradus velut $lx^3+my^3+nxxy+pxyy=0$, ubi l, m, n, p sint meri numeri, locum ad quem sit aequatio fore rectam et datam esse rationem ipsarum x et y.

Sint datae duae rectae, quae inter se comparentur utcunque. Verb. gr. detrahatur minor ex majore, quoties fieri potest, et residuum rursus ex minore, et ita porro residuum ex illo quod quoties fieri potest est detractum, donec vel sequatur exhaustio, ultimo subtrahendo existente communi Mensura, si quantitates sunt commensurabiles, vel habeatur lex progressionis in infinitum, si sint incommensurabiles. Et eadem erit series numerorum Quotientium, cum eadem est proportio. Nempe si sit a ad b ut

$$l+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\text{etc.}}}}$$

ad unitatem, erit l, m, n, p etc. series numerorum quotientium. Verb. gr. si a sit 17 et b sit 5, series tantum constabit ex tribus l, m, n, qui numeri erunt 3, 2, 2. Si a et b sint partes rectae extrema et media ratione sectae, erit a major ad b minorem, ut $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}$ ad unitatem; quotientes erunt unitates, et series eorum ibit in infinitum. Sic a et b quaecunque rectae erunt ad se invicem ut $\frac{l}{1} + \frac{m}{2} + \frac{n}{4} + \frac{p}{8} + \frac{q}{16} + \text{etc.}$ ad 1, posito l, m, n, p, q etc. esse 0 vel 1, quae series vel finitur vel periodica est, cum numeri sunt commensurabiles.

Ex his sequitur, lineas similes esse in ratione rectarum Homologarum, superficies similes ut rectarum homologarum quadrata, solida similia ut eorum cubos. Sint duo Extensa similia A et L, et homologa homogenea et B et M. Quia A cum B seu A; B simile est ipsi L cum M seu L; M, erit ratio A ad B eadem quae L ad M. alioqui ipsum A; L ab ipso B; M aliter quam per compraesentiam distingui posset; prodibunt enim alii numeri rationem exprimentes. Ergo permutando erit A ad L ut B ad M, ut ponebatur. Sic ostendetur circulos esse ut quadrata diametrorum, sphaeras ut cubos diametrorum. Circuli (sphaerae) erunt A et L, quadrata homologa (cubi homologi) B et M.

Ex his manifestum est, N u m e r u m in genere integrum, fractum, rationalem, surdum, ordinalium, transcendentem generali notione definiri posse, ut sit id quod homogeneum est Unitati, seu quod se habet ad Unitatem, ut recta ad rectam. Manifestum est etiam, si Ratio a ad b consideretur ut numerus qui sit ad Unitatem, ut recta a ad rectam b, fore Rationem ipsam homogeneam Unitati; Unitatem autem repraesentare Rationem aequalitatis.

Notandum est etiam, totam doctrinam Algebraicam esse applicationem ad quantitates Artis Combinatoriae, seu doctrinae de Formis abstractae animo, quae est Characteristica in universum, et ad Metaphysicam pertinet. Sic productum multiplicatione $a + b + c +$ etc. per $l + m + n +$ etc. nihil aliud est quam summa omnium binionum ex diversi ordinis literis, et productum ex tribus ordinibus invicem ductis, $a + b + c +$ etc. in $l + m + n +$ etc. in $s + t + v +$ etc. fore summam omnium ternionum ex diversi ordinis literis; et ex aliis operationibus aliae prodeunt formae.

Hinc in calculo non tantum lex homogeneorum, sed et justi-

tiae utiliter observatur, ut quae eodem modo se habent in datis vel assumtis, etiam eodem modo se habeant in quaesitis vel provenientibus, et qua commode licet inter operandum eodem modo tractentur; et generaliter judicandum est, datis ordinate procedentibus etiam quaesita procedere ordinate. Hinc etiam sequitur L e x C o n t i n u i t a t i s a me primum prolata, qua fit ut lex quiescentium sit quasi species legis in motu existentium, lex aequalium quasi species legis inaequalium, ut lex Curvilineorum est quasi species legis rectilineorum, quod semper locum habet, quoties genus in quasi-speciem oppositam desinit. Et hic pertinet illa ratiocinatio quam Geometrae dudum admirati sunt, qua ex eo quod quid ponitur esse, directe probatur id non esse, vel contra, vel qua quod velut species assumitur, oppositum seu disparatum reperitur. Idque continui privilegium est; C o n t i n u i t a s autem in tempore, extensione, qualitatibus, motibus, omnique n a t u r a e t r a n s i t u reperitur, qui nunquam fit per saltum.

Situs quaedam coexistendi relatio est inter plura, eaque cognoscitur per alia coexistentia, intermedia, id est quae ad priora simpliciorem habent coexistendi relationem.

Coexistere autem cognoscimus non ea tantum quae simul percipiuntur, sed etiam quae successive percipimus, modo ponatur durante transitu a perceptione unius ad perceptionem alterius aut non interiisse prius, aut non natum esse posterius. Ex illa hypothesi sequitur nunc ambo coexistere, cum posterius attigimus; ex hac sequitur ambo extitisse cum prius disereremus.

Est autem in percipiendi transitu quidam ordo, dum ab uno ad aliud per alia transitur. Atque hoc v i a dici potest. Sed hic ordo cum variari possit infinitis modis, necesse est unum esse simplicissimum, qui scilicet sit secundum ipsam rei naturam procedendo per determinata intermedia, id est per ea quae se habent ad utrumque extremum quam simplicissime. Id enim nisi esset, nullus esset ordo, nulla discernendi ratio in coexistentia rerum, cum a dato ad datum per quodvis iri possit. Atque haec est via minima ab uno ad aliud, cujus magnitudo d i s t a n t i a appellatur.

Haec ut melius intelligantur, nunc quidem abstrahemus animum ab his quae in singulis spectari possunt, de quorum distantia agitur: ita considerabimus ea, tanquam in singulis plura spectanda non essent, seu considerabimus ea tanquam Puncta. Nam punctum est, in quo nihil aliud ei coexistens ponitur, ita ut quicquid in ipso est, ipsum sit.

Ita via puncti erit linea, quae utique latitudinem non habebit, quia sectio ejus quae in puncto fit longitudinem non habet.

Ex uno puncto dato nihil determinatur praeterea. Sed duobus datis punctis determinatur via ab uno ad aliud simplicissima, quam appellamus Rectam.

(1) Hinc sequitur primo, rectam esse minimam a puncto ad punctum, seu magnitudinem ejus esse punctorum distantiam.

(2) Secundo, rectam esse inter sua extrema aequabilem. Neque enim aliquid assumitur, unde reddi possit ratio varietatis.

(3) Itaque oportet, ut unus locus puncti in ea moti ab altero discerni non possit seposito respectu ad extrema. Hinc et pars rectae recta est, itaque intus ubique sibi similis est, nec duae partes discerni possunt inter se, cum suis extremis discerni non possint.

(4) Sequitur etiam, extremis positis similibus aut congruis aut coincidentibus, ipsas rectas similes, congruas aut coincidentes esse. Extrema autem semper sunt similia. Itaque rectae duae quaevis sunt similes, et pars etiam toti.

(5) Tertio ex definitione sequitur, procedere rectam per puncta suae relationis unica ad duo puncta data, quae ratio est maxime determinata. Oportet autem talia dari, alioqui ex duobus datis nihil resultaret novi determinati. Et si daretur aliud punctum eodem modo se habens ad A et B simul sumta ut propositum, nulla esset ratio cur via illa simplicissima determinata per unum potius quam per aliud procederet. Patet etiam hoc ex praecedente, quia dum ostendimus extremis datis rectam esse determinatam seu extremis coincidentibus coincidere rectas.

(6) Quarto sequitur, rectam in omnes plagas se habere eodem modo nec concavum habere et convexum ut curvam, cum ex duobus punctis assumtis A et B nulla ratio diversitatis reddi possit.

(7) Et proinde, si duo assumantur puncta quaecunque extra rectam L et M quae se eodem modo habeant ad duo puncta rectae collective, seu ita ut L se habeat ad A et B, ut M se habet ad A et B, etiam eodem modo se habebunt ad totam rectam, seu L se habebit ad rectam per A, B, ut M se ad eam habet.

(8) Manifestum etiam est, rectam rigidam seu cujus puncta

non mutant situm inter se, duobus in ea punctis manentibus immotis moveri non posse, alioqui enim plura darentur puncta eodem modo se habentia ad duo puncta immota, nempe tam punctum in quo fuit punctum mobile, quam illud ad quod est translatum.

(9) Sequitur vicissim, alia omnia puncta, quae in rectam per A et B transeuntem non cadunt seu quae ipsis A et B non sunt in directum, mobilia esse situ ad A et B servato, ipsis A et B manentibus immotis, cum recta sit locus omnium punctorum unice se habentium ad A et B; caetera ergo variari possunt et quidem in omnes partes, cum recta eodem modo se habeat in omnes partes.

(10) Itaque si Extensum rigidum moveatur duobus punctis manentibus immotis, omnia puncta ejus quiescentia cadent in rectam per puncta immota transeuntem, quodvis punctum mobile describet circulum circa eandem rectam velut axem.

Datis tribus punctis in eandem Rectam non cadentibus, quod inde determinatur est planum. Sint puncta A, B, C non cadentia in eandem rectam, ex A, B punctis determinatur recta per A et B, ex C et B punctis determinatur recta per C et B. Ex quovis puncto rectae per A et B, conjuncto cum quovis puncto rectae per C et B, nova determinatur recta, et proinde datis A, B, C, determinantur rectae infinitae quarum locus vocatur planum.

(1) Itaque primo planum est minimum inter sua extrema. Ambitus enim ejus non constat recta, quia recta spatium non claudit, alioqui pars rectae foret dissimilis toti. Ergo ambitu dato dantur tria puncta in eandem rectam non cadentia, ergo ex solo ambitu dato determinatur planum interceptum. Ergo est minimum.

(2) Secundo planum est aequabile inter sua extrema, quia nulla ratio varietatis ex hac origine ejus deduci potest.

(3) Unde sequitur, planum intus esse sibi simile, ita quod in eo movetur punctum, locum in quo est ab alio loco non distinguit nisi respectu ad extrema. Nec pars plani a parte nisi per extrema discerni potest.

(4) Sequitur et porro, plana quorum ambitus sunt similes aut congrui aut coincidentes, ipsa similia aut congrua aut coincidentia esse.

(5) Tertio ex definitione plani patet esse locum omnium punctorum ad tria data puncta unicorum.

(6) Quarto sequitur planum utrinque se habere eodem modo, adeoque nec concavum habere neque convexum.

(7) Atque adeo puncto se habenti utcunque ad A, B, C simul vel ad planum ex his determinatum, respondens aliud punctum dari posse eodem modo se habens ad tria haec puncta simul sumta, cum nulla sit ratio diversitatis.

(8) Planum autem est latitudine praeditum, nam per lineam rectam secari potest, per bina data ejus puncta transeuntem. Itaque sectio ejus longitudinem habet, cujus autem sectio habet longitudinem, id ipsum habet latitudinem.

Datis quatuor punctis in idem planum non cadentibus resultat profundum, seu id in quo sumi potest aliquid quod Terminus non est, seu quod non potest ei esse commune cum altero nisi pro parte in ipsum immerso.

Sunto quatuor puncta A, B, C, D (fig. 1). Hinc dantur sex rectae AB, AC, AD, BC, BD, CD; sed sufficiunt AB, AC, AD, nam tres reliquae ex his nascuntur. Prosultantibus his tribus rectis, prosultant et omnia earum puncta, et rectae conjungentes duo quaevis diversarum rectarum puncta, locusque adeo harum rectarum omnium. Porro habemus et quatuor plana per A, B, C, per A, B, D, per A, C, D, per B, C, D, quorum duo quaevis sectionem habent rectam communem; verb. gr. plana per A, B, C et per B, C, D habent communem sectionem rectam per B, C. Haec quatuor plana claudent spatium quatuor Triangulis planis ABC, ABD, ACD, BCD, quae spatii ambitum facient. Et recta quaevis EF, duo puncta E et F duorum planorum ABC, BCD conjungens, habet omnia puncta ut G intra hoc spatium, ita ut ex puncto G rectae extremis interjecto nulla recta educi possit, quae non in ambitum cadat. Claudunt autem spatium quae ambitum constituunt plenum, nempe talem, ut linea quaecunque ducta in parte ambitus, ubi pervenit ad ejus partis extremum, continuari possit in alia ambitus parte Ex. gr. recta AL in parte Ambitus ABC ducta, ubi pervenit ad extremum ejus L, continuari non posset in alia ambitus parte, si abesset triangulum BCD, quod cum caeteris tribus ABC, ABD, ACD spatii claudendi opus absolvit. Ponatur illa recta produci quantum opus est ad punctum H, quod magis absit a puncto G, quam omnia puncta triangulorum ABC, ABD, ACD, BCD. Ex puncto H agantur normales in quatuor plana et itidem ex puncto G, reperietur aliquod ex his planis planum, respectu cujus nor-

males amborum non sint ad easdem partes; aliquod ex his planis debet GK secare in triangulo cujus planum est continuatio; dico rectam GH si opus productam cadere in aliquod ex his planis. Sumatur aliud quodcunque punctum H, ajo rectam GH productam si opus occurrere uni triangulorum quatuor ut ipsi ABD in K, planum per E, F, H secabit plana ABD, ACD, BCD, quae tres rectae constituent triangulum cujus duo latera cadent in duo ex triangulis tribus dictis, et punctum G intra hoc triangulum cadet. Recta ergo quaecunque transiens per G alterutrum ex illis duobus lateribus secabtt, ergo et recta GH, ergo recta GH occurrit uni ex triangulis ABD, ACD, BCD in K. Eodem modo ostendetur, et alio extremo occurrere uni ex aliis tribus triangulis. Sed brevius rem ostendemus.

IV.

INITIA MATHEMATICA.

DE QUANTITATE.

Determinantia sunt, quae simul non nisi uni soli competunt, ut duo extrema A, B (fig. 2) non nisi uni competunt rectae.

Coincidentia sunt, quae plane eadem sunt tantumque denominatione differunt, ut via ab A ad B a via a B ad A.

Congrua sunt, quae si diversa sunt, non nisi respectu ad externa discerni possunt, ut quadrata C et D (fig. 3), nempe quod eodem tempore sunt in diverso loco vel situ, vel quod unum C est in materia aurea, alterum D in argentea. Ita congruunt libra auri et libra plumbi; dies hodiernus et hesternus. Punctum quodlibet congruit cuilibet alteri, ut et instans instanti.

Aequalia sunt quae vel congruunt (exempli gratia (fig. 4) triangula EFH, EFG, IKL, LMI, GNE, item rectangula EFGN et

IKLM) vel per transformationem congrua reddi possunt (ut triangulum HEG rectangulo IKLM, quia parte ipsius HEG, nempe EFH, transposita in GNE, quod fieri potest quia congruunt, tunc HEG transformatum erit in FGEN congruum ipsi IKLM; itaque HEG et IKLM aequalia dicentur). Itaque definiri possunt Aequalia, quae resolvi possunt in suas partes diversas singulas singulis alterius congruentes.

Similia sunt, in quibus per se singulatim consideratis inveniri non potest quo discernantur, ut duo sphaerae vel circuli (vel duo cubi aut duo quadrata perfecta) A et B (fig. 5). Ut si solus oculus sine aliis membris fingatur nunc esse intra sphaeram A, nunc intra sphaeram B, non poterit eas discernere; sed poterit si ambas simul spectet, vel si secum membra alia corporis aliamve mensuram introrsum afferat, quam nunc uni nunc alteri applicet. Itaque ad similia discernenda opus est vel compraesentia eorum inter se, vel tertii cum singulis successive. [At in dissimilibus aliqua partium proportio notata in uno, quae non notatur in altero, sufficit ad discernendum sigillatim, de quo postea pluribus].

Homogenea sunt, quae aut similia sunt aut similia transformatione reddi possunt. Duae rectae sunt homogeneae, quia similes; sed recta et arcus circuli homogeneae res sunt, quia circulus in rectam extendi potest. Homogenea etiam definire possumus, quae in aliquo conveniant, et in quo conveniunt alia quae in uno quoque eorum indefinite assumi possunt.

Si plura sint ut A vel B et unum C (fig 6) sintque in aliquo convenientia et in his homogeneum insit ipsis A et B commune, omnia vero in ipsis homogenea sint ipsi C communia; tunc illa plura dicentur partes integrantes, unum illud dicetur totum.

Minus est quod alterius (Majoris) parti aequale est.

Quantitas est id quod rei competit, quatenus habet omnes suas partes, sive ob quod alteri (homogeneae cuicunque) aequalis major aut minor dici sive comparari potest. Quantitas rei ex. gr. areae ABCD (fig. 7) exprimitur per numerum ex. gr. quaternarium, posito aliam rem ut pedem quadratum AEFG sumtum esse pro Mensura primaria seu Unitate reali. Est enim ABCD quatuor pedum quadratorum. Si vero alia assumeretur unitas AHIK, quae est quadratum semipedis AH, quantitas areae ABCD esset 16. Itaque pro eadem quantitate diversus proveniet numerus, prout assumitur unitas. Et proinde quantitas non est numerus definitus, sed materiale numeri seu numerus indefinitus, assumta certa mensura definiendus. Quantitates ergo exprimuntur vel numeris definitis, ut 1, 2, vel indefinitis seu literis aliisve characteribus a, b, ☉, ☽.

Numerus est homogeneum Unitatis adeoque comparari cum unitate eique addi adimique potest. Estque vel aggregatum unitatum qui dicitur integer, ut 2 (seu $1+1$), item 3, 4 (seu $2+1$ sive $1+1+1$), vel aggregatum partium aliquotarum unitatis, qui dicitur Fractus, ut si unitas ex. gr. pes AB sit divisus in quatuor partes, tunc res ut linea BH, quae habet tres quartas pedis seu ter $\frac{1}{4}$, ita exprimetur $\frac{3}{4}$, isque fractus interdum reduci potest ad integrum, ut AB sive 2 est quater AH seu 4 dimidiae sive $\frac{4}{2}$; vel denique numerus est alio quodam modo per relationem ad unitatem determinatus, quae quidem relationes possunt esse infinitae, sed maxime solennes sunt per radices. Nempe sit numerus 4 (pro quadrato ABCD), quaeritur ejus radix quadrata (seu latus AB) id est numerus qui per se ipsum multiplicatus facit 4; is numerus erit 2, itaque cum 2.2 sive aa sit 4, $\sqrt{4}$ ($\sqrt{aa}$) est 2 (a). Atque hoc casu radix reduci potest ad numerum communem seu rationalem. Sed interdum haec reductio non succedit. Ex. gr. quaeritur numerus, qui per se ipsum multiplicatus faciat 2, is neque est integer (alioqui enim, cum necessaria sit minor quam 2, foret unitas, at unitas per se multiplicata facit 1), neque est fractus, quia omnis fractus per se ipsum multiplicatus producit alium fractum, ut $\frac{3}{2}$ producit $\frac{9}{4}$ sive $2+\frac{1}{4}$; itaque non est numerus nisi irrationalis ut vocant, sive potius ineffabilis, ἄλογος, surdus, qui sic scribitur $\sqrt{2}$, vel $\sqrt{q\,2}$, vel $\sqrt[2]{2}$, id est radix quadratica de 2; posito enim hunc numerum esse y, tunc ejus quadratum yy sive y^2 erit 2. Et ut appareat, hunc numerum esse in rerum natura, ducatur (fig. 8) AF diagonalis quadrati AEFG. Sit AG 1, nempe unus pes, cujus quadratum est 1 (nempe ipsum spatium AEFG seu unus pes quadratus), tunc ipsa AF, quam vocabimus y, erit $\sqrt{2}$; nam ejus quadratum yy, AFBM est 2 (nempe duplus pes quadratus), est enim quadratum AFBM duplum quadrati AEFG, nam dimidium ejus triangulum AFB toti AEFG aequale est. Cum ergo numerum definierimus homogeneum unitati, utique debet aliquis esse numerus, cujus ea sit relatio ad unitatem, quae est rectae AF ad rectam AG, sive posito AG esse 1, debet esse numerus quo exprimatur quantitas ipsius AF qui dicetur esse $\sqrt{2}$; AB autem erit 2.

Itaque si sit Scala AB divisa in partes aequales duas, quatuor, octo, sedecim etc. atque ita porro subdivisa quantum libuerit, huic scalae utique recta quaelibet ipsa scala minor applicari adeoque numeris explicari potest, et quidem vel exacte, vel propemodum exacte quidem, quando scilicet incipiens ab initio scalae A incidit in aliquod punctum divisionis L, ut AL, cujus proinde numerus in partibus scalae habetur. Ex. gr. AE existente 1, tunc AL erit $\frac{3}{4}$, et tunc recta AL est scalae commensurabilis, id est datur earum mensura communis seu recta AN ($\frac{1}{4}$), quae repetita tam scalam AB quam rectam AL efficit seu metitur. Propemodum vero numeris recta scalae applicata explicari potest, quando non incidit in punctum divisionis, quantumvis scala subdividatur et quocunque modo instituatur divisio. Et talis recta ut AF est cum scala incommensurabilis, adeoque numeris rationalibus sive effabilibus explicari nequit, nisi propemodum. Quoniam tamen necesse est, ut AF scalae applicata seu translata in AP incidat saltem inter duo divisionis puncta, uti certe incidit inter 11 et 12, posito scalam AB in sedecim partes aequales esse divisam, quarum quaelibet est pars octava unitatis vel pedis AE, hinc si AG vel AE latus quadrati sit pes, tunc diagonalis AF vel AP incidet inter $\frac{12}{8}$ (sive $\frac{3}{2}$) et $\frac{11}{8}$ pedis, adeoque si ipsi AF sive $\sqrt{2}$ vel y attribuas $\frac{3}{2}$, nimium, si $\frac{11}{8}$, parum tribues (nam quadratum a $\frac{3}{2}$ est $\frac{9}{4}$, id est plus quam $\frac{8}{4}$ seu 2 seu yy, et quadratum ab $\frac{11}{8}$ est $\frac{121}{64}$, quod est minus quam $\frac{128}{64}$ seu 2), error tamen erit minor una parte minima, in quam hoc loco unitas in scala divisa est, id est minor quam $\frac{1}{8}$. Et $\frac{1}{8}$ sive AQ erit propemodum mensura communis unitatis sive etiam scalae et ipsius AF. Et quanto magis subdivisa erit scala, eo minor erit error adeoque erit tam parvus quam quis velit, sive minor reddi potest quovis errore assignabili. Itaque AF et AG etsi sint incommensurabiles, sunt tamen homogeneae seu comparabiles, et inveniri potest mensura communis tam prope exacta, ut error seu residuum sit minus data quantitate. Atque hoc est fundamentum appropinquationum, et computandarum Tabularum, itemque Logisticae binariae vel sexagenariae vel etiam decimalis, si quidem scala in decem partes dividatur et earum quaelibet in alias decem subdividatur, idque quantumlibet continuetur. Etsi enim scalae instrumentis satis sub-

dividi non semper possint, mente tamen sive calculo ad summam exactitudinem, quae quidem in praxi optari possit, procedi potest. Quod quomodo fiat, infra apparebit.

Dimensiones sunt quantitates diversae (interdum heterogeneae) quae in se invicem duci intelliguntur, ita scilicet ut una tota applicetur cuilibet parti alterius. Exempli causa (fig. 9) ex ductu latitudinis AB duorum pollicum in longitudinem BC trium pollicum linearium (ita ut anguli A, B, C, e, f semper congruant seu iidem sint, qui dicuntur recti, qui est simplicissimus lineam rectam in rectam ducendi modus) fit rectangulum ABC, quod est duarum dimensionum, et sex pollicum sed quadratorum. Ex ductu longitudinis CB, 2, latitudinis BA, 3, altitudinis AD, 4 in se invicem fit rectangulum solidum CBAD (fig. 10), quod est trium dimensionum seu viginti quatuor pollicum cubicorum ($2 \frown$ in $3 \frown$ in 4); cuilibet enim ex baseos ABC sex quadratillis seu pollicibus quadratis (ut quadratillo AEF) insistunt quatuor cubuli seu unitates cubicae sive pollices cubici (nempe columna seu prisma FEAD ex quatuor pedibus cubicis sibi impositis constans). Nec vero putandum, ut hactenus crediderunt, dimensionem spectari in solis figuris, adeoque rem altioris gradus seu plurium dimensionum quam trium dimensionum esse imaginariam. Etsi enim spatium per se habeat tantum tres dimensiones, corpus tamen potest habere multo plures, ex. gr. duo corpora, unum aureum, alterum argenteum, habent praeter considerationem molis seu spatii, quod occupant, etiam considerationem gravitatis specificae, quae in qualibet parte molis spectatur. Ita gravitate specifica pollicis cubici argenti posita ut 55, auri ut 99 unciarum (ea enim fere proportio est), erit pondus solidi CBAD, si aureum sit, $2 \frown 3 \frown 4 \frown 99$ (seu $24 \frown 99$ sive) 2376 unciarum; sin argenteum sit solidum, erit unciarum $2 \frown 3 \frown 4 \frown 55$ seu ($24 \frown 55$) 1320 unciarum. Itaque pondera ita sunt quatuor dimensionum, ex ductu scilicet molis seu spatii tridimensi in corpus ipsum seu pondus. Potest etiam praeter pondus mortuum accedere impetus ex descensu gravis aliquamdiu continuatus; unde nascitur percussio, quae est quinque dimensionum, ex mole tridimensa, corporis ponderositate et tempore lapsus in se invicem ductis. Ita si una ulna quadrata panni valeat tres nummos imperiales, duae ulnae valebunt bis tres imperiales seu sex. Et pretium hoc est duarum dimensionum, quod si idem pannus sit quatuor ulnas latus, erit pretium ejus 2. 3. 4 seu 24 imperialium, adeoque trium dimensionum ex ductu in se invicem longitudinis, latitudinis, pretiositatis, id est pretiositatis seu bonitatis intrinsecae in quantitatem seu bonitatem extrinsecam. Ita pretium aggeris est quatuor dimensionum; spectatur enim in eo longitudo quae sit pedum 100, latitudo 12, altitudo 20, et firmitas seu bonitas intrinseca sit talis, ut pes cubicus valeat decem nummos, erit valor ejus 100 12 20 10 nummorum seu 240000, ut proinde ductus dimensionis in dimensionem sit exhibitio realis multiplicationis mentalis.

Ex his definitionibus sequentia Axiomata duci possunt.

Quae iisdem (vel coincidentibus) determinantur (eodem scilicet modo), coincidunt. Ut coincidunt duae rectae, quarum duo extrema coincidunt.

Quae coincidunt, ea multo magis congruunt, seu idem congruit sibi.

Quae congruentibus determinantur (eodem scilicet modo), congrua sunt. Ut quia triangulum datur, datis tribus lateribus, hinc si tria trianguli latera respondentia respondentibus congruant, congruent triangula.

Quae congruunt, ea multo magis aequalia sunt.

Aequalia eadem sumta mensura eodem numero exprimuntur, sive ejusdem sunt quantitatis; cum enim inter se congrua reddi possint, eidem mensurae primariae, seu unitati eodem modo repetitae, eodem modo congruere poterunt. Unde idem prodit numerus. Aequalia eodem modo secundum quantitatem tractata exhibent aequalia.

Similia similiter tractata exhibent similia. Quae similiter similibus determinantur, similia sunt. Determinari autem intelligo iis conditionibus designari quae simul non nisi in unum cadere possunt. Itaque quod ita determinatur, id plane exhibetur.

Similia et aequalia simul sunt congrua. Nihil enim superest quo discerni possint, sive sigillatim sive simul spectentur, nisi referantur ad externa, ut locum et tempus aliaque accidentia.

Ratio non est nisi inter homogenea; patet ex definitione. Quorum utrum altero majus, minus aut aequale est, homogenea sunt. De aequalibus manifestum est, possunt enim congrua reddi, adeoque et similia. Minus quoque majori homogeneum, quia ejus parti aequale adeoque homogeneum est, pars autem est homogenea toti. Atque ideo non dicemus lineam minorem superficie, aut ejus partem, nec angulum contactus partem rectilinei, aut eo minorem.

Si quis tamen partem latius sumat, pro omni quod quantitatem habet et quantitatem habenti inest, poterit dicere, lineam esse superficie minorem.

Pars minor est toto. Est enim aequalis parti ejus, nempe sibi ipsi.

Totum est aequale omnibus partibus integrantibus, coincidunt enim; vel certe si conjungantur, quia totum componunt, coincidentia reddentur, adeoque et congruent.

Pars partis est pars totius. Adeoque minus minore est minus majore. Nam parti minoris aequale est; ergo et parti majoris, parti scilicet partis majoris.

Duo homogenea habent communem mensuram quantumvis exacte propinquam. Ostendimus supra, cum scalam explicaremus. Si duorum homogeneorum unum altero neque majus neque minus est, erit aequale. In scala supra posita (fig. 8) comparentur AG et AE, appliceturque AG ipsi scalae, et puncto A manente, incidet punctum G inter B et A, posito AG esse minus quam AB. Ponamus jam demonstrari posse quod recta AG translata in AB, manente puncto A, punctum G neque incidat intra E et B, neque inter A et E, id est quod AG nec sit major nec minor quam AE, utique punctum G incidet in ipsum punctum E, adeoque AG erit ipsi AE aequalis. Quod de duabus rectis, idem demonstrari potest de omnibus homogeneis, nam omnia possunt reddi similia, et ubi similia reddita sunt, si nec magnitudine differunt, nullo modo per se discerni poterunt, sed congrua erunt, adeoque cum congrua reddi possint, aequalia sunt.

DE MAGNITUDINE ET MENSURA.

(1) Magnitudo est, quod in re exprimitur per numerum partium, congruentium rei datae, quae Mensura appellatur.

Scholium. Exempli causa lineae magnitudo exprimitur numero pedum vel pollicum, id est partium quarum quaelibet congruit pedi vel pollici in aliqua materia (velut orichalco aut ligno) reapse dato. Sic orgyiae magnitudo (quantum homo brachia extendere potest) ad certum aliquid (velut per aversionem) designandum censetur exprimi numero sex pedum, vel septuaginta duorum pollicum, quia pes duodecim pollicum habetur. Cubiti magnitudo est unius et dimidii pedis, vel unius pedis et sex pollicum, vel octodecim pollicum. Ponimus autem pedis vel pollicis magnitudinem reapse in organo datam esse. Unde patet quoque, eandem ejusdem rei magnitudinem diversis numeris exprimi, prout variatur mensura, imo interdum diversas mensuras conjungi inter se, ut cum cubitus simul designatur per pedem et pollices.

(2) *Homogenea* sunt, quorum magnitudines numeris exprimi possunt eandem assumendo pro omnibus mensuram tanquam unitatem.

Scholium. Ita si pes sit ut unitas, erit pollex ut $\frac{1}{12}$, cubitus ut $\frac{3}{2}$, orgyia ut 6. Sin pollex sit ut unitas, erit pes ut 12, cubitus ut 18, et orgyia 72. Et hoc modo lineae rectae cujusque longitudo exprimi potest numero quidem integro, si mensura aliquoties detracta, verbi gratia pede ter detracto, restet nihil, ita enim recta tripedalis erit. Sed si mensura vel pede quoties fieri potest detracto restet aliquid, ad id quoque mensurandum sumi poterit certa pars pedis, exempli causa decima, quae rursus quoties fieri potest detrahetur ab hoc residuo; exempli causa vicibus septem et pede assumto pro unitate, numerus quantitatis detractae erit fractus 3 et $\frac{7}{10}$ vel $\frac{37}{10}$. Et hoc modo si res mensuranda ita sit exhausta ut restet nihil, is numerus rei respondebit, magnitudinemque ejus exprimet. Sin adhuc supersit aliquid, tunc vel possumus iterum novam assumere mensurae partem, veluti centesimam, eamque detrahere quoties fieri potest; et si *error* centesima parte minor nobis satis magni momenti non videatur, contenti possumus esse hac per mensuram et mensurae decimas vel centesimas *appropinquatione*, alioqui ad millesimas et ultra progressuri. Solemus autem in praxi adhibere *scalam*, id est constantem quandam mensurae divisionem in orichalco aut alia durabili materia factam, et quidem per decimas et decimas decimarum seu centesimas et millesimas et porro, quoniam hoc modo fractiones decimaliter expressae tractari possunt instar integrorum, qui nobis decadica progressione, id est per unitates, decades, centenarios, millenarios, myriades etc. exhiberi solent; ita Ludolphus de Colonia calculo longe producto invenit, diametro circuli existente 1, circumferentiam esse

$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000}$ vel (quod in

decimalibus licet) conjungendo statim in unam fractionem $\frac{3141592}{1000000}$ etc. usque ad ...... sedem. Sed quoniam appropinquationes hujusmodi, etsi praxi vulgari sufficientes, nullam dant exactam magnitudinis quaesitae cognitionem, ideoque in scientifico progressu tamdiu pergimus, donec appareat series progrediendi in infinitum; et huic fini non adhibemus indistincte decimales, aut alias quaslibet scalae constantes divisiones, sed accommodamus fractiones ad rei naturam, ut scilicet facilius ad legem progressus perveniamus. Atque ita a me repertum est, si diameter sit $\frac{1}{8}$, circumferentiam fore $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \frac{1}{195}$ et ita porro in infinitum, posito fractionum numeratorem esse unitatem, sed denominatores esse qui fiunt ex duobus imparibus 1 et 3, 5 et 7, 9 et 11, 13 et 15, 17 et 19, et ita porro, invicem multiplicatis. Et ea ratione non tantum omnes appropinquationes continuando dabiles simul exprimuntur, sed etiam fieri potest ut error minor sit quovis dato, nam ostendi potest, si circumferentiam dicatur esse $\frac{1}{3}$, errorem fore minorem quam $\frac{1}{5}$; si dicatur esse $\frac{1}{3} + \frac{1}{35}$, errorem minorem fore quam $\frac{1}{9}$; si dicatur esse $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{195}$, errorem fore minorem quam $\frac{1}{13}$, et ita porro, priorem semper ex imparium proximorum combinatione sumendo. Tota autem series infinita exacte naturam circuli exprimit. Sed hoc nos *rationibus* ex intima natura circuli consecuti sumus; *organice* autem magnitudo circumferentiae circuli vel alterius lineae curvae per filum obtineri potest, curvae lineae rigidae accommodatum et deinde in rectam extensum et scalae applicatum, vel dum curva linea rigida volvitur in plano, quanquam provolutio illa ad securitatem filo vel catena regenda sit, ne tractio ei misceatur. Motu etiam res obtinetur, dum duo mobilia velocitatis uniformis percurrunt rectam et curvam, nam erunt lineae iisdem temporibus absolutae ut mobilium velocitates. Quodsi res mensuranda sit superficies, pro mensura poterit alia assumi superficies, verbi gratia pes quadratus qui vel cujus determinatae partes a plana superficie quoties fieri poterit detrahentur: quodsi superficies plana non sit, videndum an commode transformari possit in planam. Pro solidi mensura aliud assumetur solidum, veluti pes cubicus, eodemque modo procedetur. Comparari etiam solidorum magnitudines poterunt immergendo in liquorem, et mensurando quantum ille in vase attollatur; sed et ponderando, si ambo ex eadem materia elaborentur, idemque et ad lineas et superficies suo quodam modo potest transferri. Atque ita Galilaeus Cycloidis dimensionem ponderibus investigavit, etsi veram dimensionem scientifica deinde ab aliis ratione repertam hac methodo non fuerit consecutus. Motu etiam superficies et solida interdum commode mensurantur, tanquam vestigia lineae aut superficiei. Generaliter autem omnis aestimatio ex nostra magnitudinis definitione ad mensurae cujusdam repetitionem numeris expressam redit, aut ad numerum rei ascribendum, posito rei alteri datae ascribi unitatem. Eaque ratione etiam non tantum extensiones et difusiones partium extra parte, ut in spatio et tempore, sed etiam intensiones seu gradus qualitatum actionumque, jura etiam, valores, verisimilitudines, perfectiones aliaque inextensa ad numeros revocantur, reperta scilicet mensura cui aut cujus partibus aliquotis congruant, quae in re mensuranda reperiuntur, sed cujus aut cujus partium aliquotarum repetitione magnitudo aestimanda formetur. Quae consideratio quanti sit momenti, et quam in ea consistat vis verae Matheseos Universalis seu artis aestimandi in universum, in Dynamicis nostris speciminibus est ostensum.

(3) *Commensurabilia* sunt inter se, quorum reperiri potest una mensura communis exhauriens, cujus repetitione magnitudines eorum constituantur; sin minus, *incommensurabilia* vocantur, et numerus ei, quod cum mensura pro unitate assumta incommensurabile est, assignandus vocatur *surdus* vel irrationalis; sin commensurabilis sit unitati, *rationalis* appellatur.

Scholium. Si nempe mensuram vel partes aliquotas mensuram sua repetitione constituentes quoties fieri potest detrahendo perveniatur ad exhaustionem, semper haberi potest communis mensura repetitione constituens. Nam tota magnitudo mensuranda exprimitur vel integris vel composito ex integris et fractis. Jam fraçti quotcunque reduci possunt ad communem divisorem, atque ita ad communem mensuram. Esto numerus inventus magnitudinem quaesitam lineae exprimens $2+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$, reducendo ad communem denominatorem fiet $\frac{17}{6}$; itaque si pes sit 1 vel $\frac{6}{6}$, utique communis mensura rei aestimatae et pedis erit $\frac{1}{6}$, quae quantitas in re aestimata continetur decies septies, in pede sexies. Sed si sexta pars pedis seu bipollicaris linea assumatur pro unitate seu mensura, erit pes ut 6, linea vero aestimanda ut 17, adeoque pes et linea commensurabiles erunt. Sed si fractiones procedant in infinitum, nec in unum numerum assignabilem integrum vel fractum summando colligi possint, magnitudo aestimanda erit ei, cui

unitatem assignavimus, vel *partibus* ejus *aliquotis* (hoc est repetendo eam conficientibus) incommensurabilis. Veluti si linea sit quae constet uno pede et duabus decimis pedis et tribus centesimis et quatuor millesimis, et quinque 10000mis, et sic in infinitum, ita ut pede posito ut 1, linea sit ut
$\frac{1}{1}+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{6}{100000}+\frac{7}{1000000}$ etc. vel $\frac{1234567}{1000000}$ etc. vel more decimalium 1.234567 etc. Ita enim nunquam exhaurietur linea quae mensuranda est, et tamen vera ejus magnitudo exacte expressa habetur. Quotiescunque enim numerus est rationalis, ut vocant, seu unitati commensurabilis, toties decimalibus expressus periodo constat, ita ut characteres iidem semper recurrant in infinitum, ut suo loco ostendemus; quod hoc loco non fieri constructio ipsa ostendit. Porro communem mensuram investigandi haec ratio prodita est a Mathematicis, uti suo loco exponemus, ut a majore detrahatur minus quoties fieri potest, Residuum deinde rursus quoties fieri potest ab ipso Minore antea detracto detrahatur, et secundum Residuum a secundo detracto seu primo residuo, et a secundo Residuo similiter tertium; ita necessario vel ad exhaustionem devenietur, eritque ultimum detractum exhauriens ipsa maxima communis mensura toties in prima magnitudine seu comparatarum majore contenta, quoties unitas in producto ex omnibus quotientibus invicem multiplicatis inest; vel si residua supersint in infinitum, incommensurabiles erunt duae primae quantitates, quemadmodum et residua omnia; sed ipsa series quotientium si certa lege constet, qui exprimunt quoties quivis minor a praecedente detrahi possit, comparationem scientificam duarum magnitudinem dabit. Interim fictione quadam possumus concipere, omnes quantitates homogeneas esse velut commensurabiles inter se, fingendo scilicet elementum aliquod infinitesimum vel infinite parvum. Tali fictione constat calculus Logarithmorum, certo aliquo Elemento Logarithmico constituto. Similis fictio locum habet in Geometria, rem concipiendo perinde ac si omnes lineae constarent ex infinitis numero lineolis rectis infinite parvis, et ita perinde ac si lineae curvae essent polygona infinitorum laterum, vel perinde ac si superficies constarent ex infinitis facieculis planis, id est perinde ac si solida concava vel convexa omnia essent polyhedra hedrarum infinitae exiguitatis. Eodem modo fingi potest, omnia solida constare ex corpusculis elementaribus aequalibus infinitis numero et magnitudine infinite parvis. Et haec fic-

tio nullum potest afferre errorem, quia (si rite procedas ex hypothesi) error nunquam fit major particulis aliquot elementaribus, qui nullam cum toto comparationem habet, de quo nostra incomparabilium Lemmata videantur. Unde si pro particulis elementaribus fictitiis seu infinite parvis assumamus veras assignabiles quantumlibet parvas, ostendi potest, errorem qui in ratiocinando admissus videri possit, minorem esse quovis dato errore, id est nullum assignari posse. Licet autem ad commensurabilitatis imitationem concipi possit, infinitesimalia illa seu infinite parva elementa aequalia esse inter se, interdum tamen fingi praestat alia procedere ratione utili ad ratiocinationem juvandam. Quae melius apparebunt ex parte illa interiore Doctrinae magnitudinum seu Matheseos Universalis, qua nempe continetur Scientia infiniti.

DE RATIONE ET PROPORTIONE.

Duarum rerum Ratio inter se habebitur, habita forma comparationis earum secundum quantitatem, et contra. Hinc etsi ambarum quantitates sint incognitae, potest tamen ratio earum esse cognita; licet enim ignorem exempli causa, quot sint nasi aut quot sint oculi in hac civitate, scio tamen numerum nasorum bis repetendum esse ut fiat numerus oculorum.

Comparare duas res secundum quantitatem est quaerere modum inveniendi quantitatem unius ex data sola quantitate alterius. Hic enim finis est comparationis duarum rerum, ut postea sufficiat saltem unam in promptu habere et comparationis meminisse; ita sensu unius et memoria alterius tantum efficimus, quantum sensu utriusque, minore autem pretio constat memoria quam sensus, quia memoria etiam absentium est.

Itaque rationem duarum rerum inter se habere, idem est quod habere modum cognoscendi unam ex data altera sola. Equidem si summam duarum quantitatum sciamus, vel etiam differentiam, etiam unam ex alia cognita invenimus, sed non sola; tria enim occurrunt homogenea, duae scilicet quantitates, v. g. lineae AB et BC (fig. 11) et earum summa (vel differentia) AC et duas noscere necesse est ad inveniendam tertiam. In ratione vero solum-

modo unam noscere opus est ad inveniendam alteram. Ratio enim ipsa, quam praeterea nosse oportet, non est linea. Itaque si cognoscatur linea D (fig. 12) et praetera ratio ejus ad lineam E (ut si sciatur esse duplam ipsius D), scietur etiam ipsa E.

Quaeritur jam quomodo duas quantitates, quas nunc habemus praesentes, ita possimus comparare, ut postea sufficiat alteram solam praesentem habere, et modi comparationis ad alteram quoque cognoscendam meminisse. Hoc fiet dupliciter, vel nulla nova quantitate homogenea assumta, vel assumta quidem nova ad comparationem, neglecta tamen postquam absoluta est comparatio. Quando nulla nova quantitas assumitur, tunc comparatio duarum quantitatum fit, si consideremus unam esse minorem altera, vel ambas esse aequales. Si ambae sunt aequales, nihil ultra quaeritur, modus enim inventus est habendi unam habita altera. Si sunt inaequales, tunc minor aequalis est parti majoris, ex definitione majoris et minoris. Conferatur ergo minor DG (fig. 13) primum parti EH majoris E sibi aequali, deinde et reliquae HF, et quoniam reliqua pars HF iterum vel minor vel major est, ideo si major est HF, iterum DG parti ejus HL aequalis erit, et si pars reliqua secunda LF adhuc major est quam DG, tunc DG iterum parti ejus LM aequalis erit, et ita porro continuabitur, donec reliqua vel sit nulla vel sit minor quam DG, quod tandem fieri necesse est, siquidem EF finita est, alioqui enim semper ab ea detrahi posset DG adeoque DG inesset ipsi EF infinities, id est ipsa EF infinita contra hypothesin. Porro nulla quidem erit pars reliqua, quando F incidit in M, seu quando EH, HL, LM vel LF ipsi DG aequantur; adeoque minor quantitas DG dicitur mensura majoris, seu dicitur majorem EF metiri sive repetendo efficere, portio autem ut EH majoris aequalis minoris DG dicitur majoris pars aliquota (nempe tertia vel quarta pro numero repetitionum), et major EF vel EM dicitur multiplex minoris DG secundum numerum repetitionum qui dicitur Quotiens. Si vero pars reliqua tandem fiat minor detrahendo, sive si detracta aliquoties DG vel aequali ejus, ab EF restet MF minor quam DG, tunc DG dicetur Mensura falsa ipsius EF, etsi sit mensura vera ipsius EM, et pars reliqua MF, minor quam Mensura, dicitur Residuum, numerus vero repetitionum Quotiens falsus.

Notandus est ergo quotiens sive verus sive falsus, ut notetur forma comparationis, hoc loco ternarius, quia ter DG aequalis est EM. Sed quia superest adhuc residuum MF, eo casu quotientem notari non sufficit, divisa est enim major EF in duas partes EM et MF, illam quam minor DG metitur, et cujus comparatio cum minore constat ex quotiente, sed residuum MF cum sit nova quantitas homogenea, iterum comparanda est cum reliquis DG et EM. Sufficit autem comparari cum DG, quia si comparata sit cum mensura ipsius EM, satis comparata erit cum ipsa; itaque eodem modo comparetur residuum MF cum Mensura DG, ut Mensura cum quantitate mensurata EF. Et si quidem in secunda hac comparatione ipsius MF cum DG nullum esset residuum, tunc MF esset mensura ipsius DG, ergo erit maxima communis mensura sui ipsius et DG, non potest enim dari major mensura ipsius MF quam ipsa MF. Iam maxima communis mensura terminorum comparationis hujus, MF et DG, est maxima communis mensura terminorum comparationis praecedentis DG et EF. Ea vocetur P, jam si N major quam P mensura ipsarum DG et EF communis, ea foret mensura ipsius EF. Est autem eadem N et mensura ipsius DG ex hypothesi, ergo et ipsius EM (multiplae ipsius EF). Jam mensura totius et unius partis est mensura reliquae partis, ergo N mensura totius EF ex hypothesi, et partis EM per ostensa, erit et mensura ipsius MF; est vero et ipsius DG per hypothesin, ergo N est communis mensura et ipsarum MF, DG, contra hypothesin. Quoniam ergo continuatis hoc modo comparationibus, maxima communis mensura terminorum unius comparationis eadem est quae praecedentis, et praecedentis quae antepraecedentis, et ita porro, erit eadem maxima communis mensura omnium, adeoque primae quae ultimae comparationis. Itaque si continuentur comparationes residuorum cum mensuris, donec nullum supersit residuum; residuum autem ultimum seu quod nullum amplius relinquit residuum, sit maxima communis mensura suae comparationis per superiora; ideo residuum ultimum erit maxima mensura communis terminorum ab initio comparandorum; quotientes autem omnium comparationum ordine notati dabunt formam comparationis. Ita ratio numerorum 63 et 49, itemque 72 et 56 seu forma comparationis eadem est, quia eadem utrobique series quotientium prodit, nempe 1, 3, 2; unde ea est ratio inter 63 et 49 quae inter 72 et 56.

Quodsi semper supersit residuum, tunc duae quantitates sunt incommensurabiles, nec aliter hac methodo notari potest forma

comparationis, quam si constet quotientium progressio in infinitum. Unde si sit recta in extrema et media ratione secta, ut vocat Euclides, sive si quantitas AB (fig. 14) sit divisa in duas partes, ut eadem sit ratio minoris AC ad majorem CB, quae est partis majoris CB ad totam BA, tunc progressio quotientium in comparatione partium duarum BC, CA, vel partis CB cum toto AB, erit 1, 1, 1, 1, 1, 1 etc. in infinitum. Nam compendii causa AB appellatur a, et BC vocetur b. Iam b sive BC plus quam semel ab a sive AB detrahi non potest (nam CB major dimidia AB). Eodem modo residuum AC a subtracta BC nisi semel subtrahi non potest, est enim AC ad BC ut BC ad AB, restabitque BD. Jam recta BC in puncto D rursus extrema et media ratione secta est, est enim CD (sive AC) ad CB ut CB ad AB, quae AB in puncto C extrema et media ratione secta est. Atque ita porro: quare semper residuum non nisi semel detrahi poterit, in infinitum. Hanc sectionem vocant divinam, et quoniam perpetuis illis residuorum subtractionibus semel factis oriuntur termini sequentes:

$$a \mid b \mid a - b \mid - a + 2b \mid + 2a - 3b \mid - 3a + 5b \mid + 5a - 8b$$

qui continuari possunt in infinitum. Si notetur numeros sic progredi:

$$\frac{1}{1} \urcorner \frac{2}{1} \urcorner \frac{3}{2} \urcorner \frac{5}{3} \urcorner \frac{8}{5} \urcorner \frac{13}{8} \urcorner^{21} \text{ etc.}$$

seu antepenultimum additum penultimo facere ultimum, hinc patet 1a majorem quam b (ob terminum a − b), et 1a minorem quam 2b (ob terminum − a + 2b, ubi a 2b detrahitur a), et 3a majorem quam 3b (ob terminum 2a − 3b, ubi a 2a detrahitur 3b) et 3a minorem quam 5b (ob terminum − 3a + 5b, ubi a 5b detrahitur 3a) et ita porro. Hinc patet, si a sit 1, tunc b fore minorem quam 1; et si a sit 2, b fore majorem quam 1; et si a sit 3, b fore minorem quam 2; et si a sit 5, b fore majorem quam 3; et si a sit 8, b fore minorem quam 5, et ita porro in infinitum. Eaque hujus progressionis pariter et sectionis divinae proprietas jam apud autores habetur, nec dubito, quin haec comparandi methodus reddi generalior magnosque in contemplando usus habere possit. Finis tamen hujusmodi comparationis non est investigatio seriei quotientium, licet contenti ea esse cogamur quoties quantitates sunt incommensurabiles, sed potius investigatio communis mensurae; hac enim habita, duobus tantum numeris (loco seriei quotientium) res absolvitur, numeris scilicet secundum quos communis mensura metitur, tam unam quam alteram quantitatum comparandarum.