Leibnizens
gesammelte Werke

aus den Handschriften

der Königlichen Bibliothek zu Hannover

herausgegeben

von

Georg Heinrich Pertz.

Dritte Folge

Mathematik.

Siebenter Band.

HALLE,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1863.

Leibnizens
mathematische Schriften

herausgegeben

von

C. I. Gerhardt.

Zweite Abtheilung.

Die mathematischen Abhandlungen Leibnizens enthaltend.

Band III.

HALLE,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1863.

Inhalt.

Seite

Initia mathematica. Mathesis universalis. Arithmetica. Algebraica.

I. Praefatio Clavis mathematicae arcanae (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) 9
II. Inventorium mathematicum. Praefatio. (Aus d. Manuscript. der Königl Biblioth. zu Hannover) 13
III. Initia rerum mathematicarum metaphysica (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) 17
IV. Initia mathematica. De Quantitate. De Magnitudine et Mensura. De Ratione et Proportione. (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) 29
V. Mathesis universalis (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) 49
VI. Prima calculi magnitudinum elementa demonstrata in additione et subtractione, usuque pro ipsis signorum + et — (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) 77
VII. Conspectus calculi (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) 83
VIII. De primitivis et divisoribus ex Tabula combinatoria (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) 101
IX. Exercitium ad promovendam scientiam numerorum (Aus dem Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover). 114
X. Observation nouvelle de la manière d'essayer si un nombre est primitif. Aus einem Briefe Leibnizens an den Herausgeber des Journals des Sçavans. Février 1678. (Journ. des Sçavans de l'an. 1678) 119
XI. Invenire triangulum rectangulum in numeris cujus area sit quadrabilis (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) . . . 120
XII. Meditatio juridico-mathematica de interusurio simplice (Act. Erudit. Lips. an. 1682) 125
XIII. De reditibus ad vitam (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) 133
XIV. De resolutionibus aequationum cubicarum triradicalium, de radicibus realibus, quae interventu imaginariarum exprimuntur, deque sexta quadam operatione arithmetica (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover). 138
XV. Nova Algebrae promotio (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) 154

Seite

XVI. De condendis Tabulis algebraicis, et de lege divisionum (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) 189
XVII. Divisiones formularum reperire (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) 198
XVIII. De ortu, progressu et natura Algebrae, nonnullisque aliorum et propriis circa eam inventis (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. z. Hann.) 203
XIX. Remarque sur un endroit des Nouveaux Elémens d'Algèbre de Mr. Ozanam (Journ. des Sçavans de l'an. 1703) 216
XX. Monitum de characteribus algebraicis (Miscellan. Berolin. Tom. I.) . 218
XXI. Explication de l'arithmétique binaire, qui se sert des seuls caractères 0 et 1, avec des remarques sur son utilité, et sur ce qu'elle donne le sens des anciennes figures Chinoises de Fohy (Mémoir. de l'Acad. des Sciences an. 1703) 223
XXII. De dyadicis (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) 228
XXIII. Demonstratio, quod columnae serierum exhibentium potestates ab arithmeticis aut numeros ex his conflatos sint periodicae (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) 235
XXIV. Zwei Briefe Leibnizens an Joh. Ch. Schulenburg (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) 238

Geometrica.

I. De constructione (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zn Hannover) 249
II. Specimen Geometriae luciferae (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) 260
III. Ohne Ueberschrift, einen analytischen Beweis des Pythagorischen Lehrsatzes enthaltend (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. z. Hannover) 299
IV. Epistola ad Virum celeberrimum, Antonium Magliabeccium, ubi occasione quorundam problematum a Batavis Florentiam missorum de usu Analyseos Veterum linearis et imperfectione Analyseos per Algebram hodiernae disseritur, novumque Trigonometriae sine Tabulis inventum attingitur (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) . 301
V. Dissertatio exoterica de statu praesenti et incrementis novissimis deque usu Geometriae (Aus d. Manuscript. d. Königl. Biblioth. z. Hannover) 316
VI. Meditatio nova de natura Anguli contactus et osculi, horumque usu in practica Mathesi ad figuras faciliores succedaneas difficilioribus substituendas (Act. Erudit. Lips. an. 1686) 326
VII. De Lineis Opticis, et alia (Act. Erudit. Lips. an. 1689) 329
VIII. Generalia de Natura linearum, Anguloque contactus et osculi, provolutionibus, aliisque cognatis, et eorum usibus nonnullis (Act. Erudit. Lips. an. 1692) 331
IX. De novo usu Centri gravitatis ad dimensiones et speciatim pro areis inter curvas parallelas descriptas seu rectangulis curvilineis, ubi et de parallelis in universum (Act. Erudit. Lips. an. 1695) 337
X. De lineae super linea incessu, ejusque tribus speciebus, motu radente, motu provolutionis, et composito ex ambobus (Act. Erudit. Lips. an. 1706) 339
XI. Additio G. G. L. ostendens explanationem superficiei conoidalis cujuscunque, et speciatim explanationem superficiei Coni scaleni, ita ut ipsi vel ejus portioni cuicunque exhibeatur rectangulum aequale, interventu extensionis in rectam curvae, per Geometriam ordinariam construendae (Miscell. Berolinens. Tom. III.) 345

Leibniz an den Freiherrn von Bodenhausen (Aus d. Manuscript. der Königl. Biblioth. zu Hannover) 349

INITIA MATHEMATICA.

MATHESIS UNIVERSALIS.

ARITHMETICA. ALGEBRAICA.

In Betreff des vorliegenden Bandes ist die Bemerkung vorauszuschicken, dass die bisherige Anordnung der Abhandlungen nach der Zeit ihrer Abfassung aufgegeben werden musste, insofern von den noch unedirten der Termin ihrer Entstehung nicht immer genau sich ermitteln liess. Es wurde deshalb auf die Verwandtschaft des Inhalts Rücksicht genommen, und es sind diejenigen, die ihrem Inhalt nach übereinstimmen, zusammengestellt. —

Je tiefer Leibniz in die einzelnen mathematischen Disciplinen eindrang, um so mehr überzeugte er sich, dass ein Aufbau derselben von den ersten Principien an nöthig sei. Dies erfordere nicht nur die Wissenschaft selbst, indem dadurch zugleich an ihrer Vervollkommnung gearbeitet werde, besonders aber sei es für diejenigen von der höchsten Wichtigkeit, die selbstständig in die Wissenschaft einzudringen wünschten, insofern sie kennen lernten, wie nach und nach der Fortschritt von dem Einfachsten zu dem Schwierigeren geschehe; auch erhielten sie so eine Anleitung, aus eigener Kraft neue Wahrheiten zu finden. Es ist namentlich das Letztere, die Erfindungskunst (ars inveniendi), der Leibniz an vielen Stellen seiner Schriften das höchste Lob spendet; er preist sie als das Wichtigste, wonach der Mensch streben müsse, denn von ihrer Vervollkommnung hängt das wahre Glück der menschlichen Gesellschaft ab. Dieser Gedanke beseelte ihn, den Meister in dieser Kunst, sein ganzes Leben hindurch. Unter seinen Papieren befinden sich mehrere Entwürfe mit den Aufschriften: Clavis mathematica arcana, Inventorium mathematicum, Thesaurus mathematicus, worin er die mathematischen Wissenschaften auf solche Weise zu behandeln beabsichtigte. Leibniz hat in den Jahren der rüstigsten Kraft daran gearbeitet, namentlich nachdem er die Principien der höheren Analysis gefunden; sie verdienen hier eine Stelle, um Leibnizens Thätigkeit auf dem Gebiet der Mathematik vollständig kennen zu lernen. Von diesen Entwürfen sind die einen für Anfänger geschrieben, die in die Wissenschaft einzudringen wünschen; andere für die, welche die Mathematik wissenschaftlich fördern wollen. Die Bruchstücke, die unter num. I. bis VI. mitgetheilt werden, geben ein Bild, wie Leibniz den hier besprochenen Gedanken zu verwirklichen gedachte.

Was nun zunächst die Arithmetik und Algebra betrifft, so waren Leibnizens erste wissenschaftliche Studien besonders diesen Gebieten zugewandt. Von seiner Jugendschrift, der Dissertatio de Arte Combinatoria, ist bereits die Rede gewesen. Ferner geht aus den Anfängen seiner Correspondenzen mit Oldenburg und mit Hugens hervor, dass er sich in der ersten Zeit seines Pariser Aufenthalts mit der Summation von Zahlreihen mittelst der Differenzen und mit der Theorie der algebraischen Gleichungen beschäftigte. Nur das Wenigste davon hat er selbst veröffentlicht, bei weitem das Meiste liegt in seinen hinterlassenen Papieren, zum Theil unvollendet und zum Druck nicht geeignet, vergraben. Auch die Eigenschaften der Zahlen entgingen seiner Aufmerksamkeit nicht; eine Notiz darüber ist aus einem Briefe Leibnizens an den Herausgeber des Journal des Savans 1678 bekannt gemacht worden. Von den dieses Gebiet betreffenden Untersuchungen, die in seinem Nachlass vorhanden sind, mögen nur die folgenden hier eine Stelle finden: De primitivis et divisoribus ex tabula combinatoria; Exercitium ad promovendam scientiam numerorum; Invenire triangulum rectangulum, cujus area sit quadratus.

Mit diesen arithmetischen Untersuchungen gingen algebraische Studien Hand in Hand. Bombelli's Algebra diente anfangs als Führer; aber seinem Grundsatz getreu, mit dem Erlernen einer Wissenschaft zugleich auch ihre Erweiterung anzustreben, gelang es Leibniz zuerst in der Auflösung der cubischen Gleichungen mittelst der Cardanischen Formel den sogenannten casus irreducibilis zu beseitigen.*) Besonders aber warf er sich mit der ganzen Kraft jugendlicher Energie auf das berüchtigte Problem, die allgemeine Auflösung der Gleichungen zu finden. Die ersten Versuche dazu

*) Siehe die Correspondenz mit Hugens Bd. II. S. 11 ff. — Die diesen Gegenstand betreffende, bisher unedirte Abhandlung Leibnizens ist in diesem Bande abgedruckt.

geschahen bereits um die Zeit, als Leibniz und Tschirnhaus zu Paris gemeinsam arbeiteten. Sie führten nicht zum Ziele, da sie im Wesentlichen darin bestanden, die auf die höchste Potenz folgenden Potenzen der Unbekannten aus der Gleichung wegzuschaffen. Dass es unmöglich sei, auf diesem Wege das Problem zu lösen, erkannte Leibniz sehr bald, und er tadelte Tschirnhaus, als dieser seine ebenfalls darauf basirte Methode in den Actis Eruditorum 1683 veröffentlichte.*) Da die Schwierigkeiten hauptsächlich darin bestanden, dass die für die Coefficienten erhaltenen Ausdrücke in Betreff ihrer Entstehung und Zusammensetzung sich schwer übersehen liessen und vorhandene Rechnungsfehler nur mit Mühe aufgefunden werden konnten, so meinte Leibniz in dieser Hinsicht Abhülfe zu schaffen, wenn er eine andere Bezeichnung der Coefficienten als die übliche durch Buchstaben einführte. Er drückte deshalb die Coefficienten durch fingirte Zahlen aus, so dass z. B. in den Gleichungen

$$10 + 11x + 12y = 0$$
$$20 + 21x + 22y = 0$$
$$30 + 31x + 32y = 0$$

von den fingirten Zahlen 10, 11, 12, 20, 21, 22, 30, 31, 32 jede Ziffer rechts anzeigte, zu welcher der Unbekannten sie gehöre, und jede Ziffer links, in welcher Gleichung, ob in der ersten, zweiten, dritten sie ursprünglich vorkomme. Dadurch wurde es Leibniz zunächst möglich, einen Canon für die Elimination der Unbekannten aus Gleichungen, die den ersten Grad nicht übersteigen, aufzustellen, welchen er sofort auf zwei Gleichungen von höheren Graden, die nur eine Unbekannte enthalten, ausdehnte. Er selbst spricht sich darüber auf einem Zettel, der vielleicht unmittelbar nach der Entdeckung geschrieben ist, folgendermassen aus:

Inveni Canonem pro tollendis incognitis quotcunque aequationes non nisi simplici gradu ingredientibus, ponendo aequationum numerum excedere unitate numerum incognitarum. Id ita habet.

Fiant omnes combinationes possibiles literarum coefficientium, ita ut nunquam concurrant plures coefficientes ejusdem incognitae et ejusdem aequationis. Hae combinationes affectae signis,

*) Siehe die Correspondenz mit Tschirnhaus Bd. IV.

ut mox sequetur, componantur simul, compositumque aequatum nihilo dabit aequationem omnibus incognitis carentem.

Lexsignorum haec est. Uni ex combinationibus assignetur signum pro arbitrio, et caeterae combinationes quae ab hac differunt coefficientibus duabus, quatuor, sex etc., habebunt signum oppositum ipsius signo; quae vero ab hac differunt coefficientibus tribus, quinque, septem etc., habebunt signum idem cum ipsius signo.

Ex. gr. sit $10 + 11x + 12y = 0$, $20 + 21x + 22y = 0$, $30 + 31x + 32y = 0$, fiet

$$\left.\begin{array}{r} +10.21.32 \\ -10.22.31 \\ -11.20.32 \\ +11.22.30 \\ +12.20.31 \\ -12.21.30 \end{array}\right\} = 0$$

Coefficientibus eas literas computo, quae sunt nullius incognitarum, ut 10, 20, 30.

Ope hujus Canonis inveniri poterit alius Canon pro tollenda communi incognita ex duabus aequationibus gradus cujuscunque. Sunto aequationes binae ejusdem gradus: $10 + 11x + 12xx + 13x^3 + 14x^4 = 0$, et $20 + 21x + 22xx + 23x^3 + 24x^4 = 0$. Multiplicetur unaquaeque per formulam assumtitiam uno gradu inferiorem, producta ambo componantur in unam aequationem, cujus quilibet terminus sit aequalis nihilo, habemus tot aequationes quot incognitas assumtitias, quae sunt formularum assumtitiarum coefficientes, et unam aequationem praeterea; incognitae autem assumtitiae in simplice gradu consistunt. Itaque canon superior applicari potest. Quodsi duae aequationes literam communem tollendam habentes non sint ejusdem gradus, coefficientes graduum superiorum in aequatione inferiore erunt aequales nihilo.

Veniamus ad exemplum:

$$10 + 11x + 12xx = 0 \text{ multiplicetur per } 30 + 31x$$
$$20 + 21x + 22xx = 0 \text{ multiplicetur per } 40 + 41x,$$

ubi 12, 22, 31 poni possunt $= 1$ et $41 = -1$. Compositum ex duobus productis erit:

$$\left.\begin{array}{llll} 10.30 + 11.30x + 12.30xx & & & \\ \phantom{10.30 +{}} 10.31.. & 11.31.. & + 12.31x^3 & \\ 20.40 + 21.40.. + 22.40.. & & & \\ \phantom{20.40 +{}} 20.41.. & 21.41.. & + 22.41.. & \end{array}\right\} = 0$$

ubi ut destruatur x, fient aequationes tres:

$$10.30 + 20.40 = 0,\ \left.\begin{array}{r} 11.30 + 10.31 \\ 21.40 + 20.41 \end{array}\right\} = 0,\ \left.\begin{array}{r} 12.30 + 11.31 \\ 22.40 + 21.41 \end{array}\right\} = 0$$

nam quarta $12.31 + 22.41 = 0$ per se patet, posito $12, 31, 22 = 1$, et $41 = -1$. Harum trium aequationum ope tolli possunt incognitae assumtitiae 30 et 40;

coefficientes ipsius 30 sunt 10, 11, 12
40 sunt 20, 21, 22
neutrius nempe ipsius 1
coefficientes sunt 0, 10—20, 11—21
seu compendio 0, 51, 52

Habemus combinationes cum suis signis debitis et ex iis aequationem incognitis assumtitiis pariter ac litera x carentem

$$\left.\begin{array}{r} +10.21.52 - 10.22.51 \\ -11.20.52 + 12.20.51 \end{array}\right\} = 0,$$ ubi 12 et $22 = 1$, et $51 = 10 - 20$, et $52 = 11 - 21$.

Unde fiet

$$\left.\begin{array}{r} +10.11.21 - 10.10.22 \\ -10.21.21 + 10.20.22 \\ -11.11.20 + 10.12.20 \\ +11.20.21 - 12.20.20 \end{array}\right\} = 0$$

Von dieser Coefficientenbezeichnung, die zuerst in einem Manuscript aus dem Jahre 1678 vorkommt*), so wie von der dadurch

---

*) Unter den Leibnizischen Manuscripten findet sich das folgende, datirt: Junii 1678, mit der Aufschrift: *Specimen Analyseos novae, qua errores vitantur, animus quasi manu ducitur et facile progressiones inveniuntur.*

Pro literis numeros adhibeo, quoniam ita perpetuo singulis ut ita dicam passibus promotis instituere possum examen per abjectionem novenarii vel etiam summationem. Examen per novenarium sufficit adhiberi continuo, examen autem exactius per summationem satis est singulis stationibus adhiberi. Praeterea adhibitis numeris in proclivi mihi est inter ipsas quantitates sive characteres ordines atque relationes varios exacte exprimere, ita ut statim primo adspectu in progressu appareat, quaenam litera cognita ad quam incognitam pertinuerit aut quam ejus potentiam affecerit, quod in numeris exactissime assequi licet, in literis non item. Haec observatio omnium, quae de calculo fieri possunt, maximi momenti est: ita facile et velut sponte sua se detegunt praeclara theoremata et progressiones, ita ut pleraque sine calculo scribi possint, initiis tantum praelibatis. Sane si quis in exemplo praesenti, datis quatuor literis totidemque aequationibus simplicibus plenis, valorem unius ex ipsis quaerat et literas indistincte gewonnenen bemerkenswerthen Entdeckung hat Leibniz in seinen Untersuchungen, besonders in der Behandlung von Problemen aus der höheren Analysis den ausgedehntesten Gebrauch gemacht; die mathematischen Manuscripte aus der spätern Zeit seines Lebens zeigen zahlreiche Spuren davon. Er selbst hat ausser der ziemlich kurzen Notiz am Schlusse seiner Vertheidigung gegen Fatio's Angriffe nichts darüber veröffentlicht; dagegen hat er in seinen Correspondenzen nicht selten darauf hingewiesen und zu ihrer Vervollkommnung, die ihm ganz besonders am Herzen lag, aufgefordert, vielleicht am ausführlichsten in seinen Briefen an den Marquis de l'Hospital (Bd. II. S. 238 ff.)

Es ist bereits an einem andern Orte darauf aufmerksam gemacht worden, dass wegen des Obigen Leibniz berechtigt ist, auf die erste Entdeckung der in neuester Zeit so wichtig gewordenen Lehre von den Determinanten Anspruch zu machen. Er hat ferner zuerst die Regel gefunden, die um die Mitte der vorigen Jahrhunderts von Cramer bekannt gemacht wurde und nach ihm benannt wird; desgleichen hat er zuerst für einzelne Fälle das Eliminationsverfahren zur Anwendung gebracht, das um ein Jahrhundert später Bezout als ein allgemeines aufstellte. —

Durch eben jene Coefficientenbezeichnung wurde Leibniz höchst wahrscheinlich darauf geführt, dass jede ganze Zahl durch zwei Zahlzeichen ausgedrückt werden könnte; es wäre demnach seine Dyadik lediglich als ein Corollarium jenes Verfahrens zu betrachten.

---

ut solent assumat a, b, x, y etc. ut lubet, confusionem experietur horribilem et laborem immensum, cum nostro more res nullo pene negotio peragatur, ut patebit. Artis ergo characteristicae haec summa regula est, ut characteres omnia exprimant quae in re designata latent, quod numeris ob eorum copiam et calculandi facilitatem optime fiet. Item et in Geometria magni usus est ad situs exprimendos.

I.

PRAEFATIO CLAVIS MATHEMATICAE ARCANAE.

Quoniam interest generis humani artem inveniendi mathematicam hactenus in arcano habitam aut ignoratam perfici atque inter eruditos vulgarem reddi, ut pluribus hoc organo instructis junctisque multorum operis inventa vitae utilia augeantur, ideo libellum hunc ita scribere constitui, ut solus sufficiat ad scientiam mathematicam a primis Elementis ad intima usque arcana intelligendam, et si occasio detur proprio cujusque studio in immensum provehendam. Scio multos esse mathematicae rei amatores, sed in principiis haerere, quia a nemine recte ducuntur. Horum bonae voluntati succurrendum existimavi. Itaque ita scripsi, ut semper videant discentes rationem eorum quae discunt, imo ut ipsa etiam inventorum origo appareat, ac ut perinde omnia intelligant ac si omnia per se invenissent ipsi. Diligentia atque animi attentione opus esse quisque facile judicabit, jucundius tamen aut brevius ista hactenus tractata esse non puto. Nihil enim affero, quin usum quoque ejus monstrem, quod maxime illi desiderant, qui vitae potius quam scholae discunt. Memoria quoque nulla ratione magis juvatur, quam si quis rationes praeceptorum teneat; ita enim quae memoria elapsa sunt, facile meditando eruuntur.

Porro ingentes esse utilitates disciplinarum mathematicarum experimento publico constat; sciunt enim omnes, quanti sit rerum pretia numeris aestimare, agros ac solida liquidaque metiri, tempora et astrorum cursus cognoscere instrumentis, locum ubi agas in longinquis navigationibus et medio mari vel abditis terrae cavernis indicare posse, firmas commodasque substructiones moliri quibus ab aëris hominumque injuriis defendamur, certis quibusdam instrumentis in sentiendo juvari et in agendo dirigi, vires denique nostras machinis in immensum augere. Magna haec sunt, sed majora supersunt, in quibus humano generi mathematica scientia prodesse posset, si satis sciremus Dei beneficiis uti. Usus autem illi etsi nondum experimento sint comprobati, satis tamen agnoscentur ab his qui mecum cogitabunt, physicam nihil aliud esse quam Geometriam materiae applicatam, et posse a nobis tot experimenta sumi circa naturam, imo jam in promtu esse, ut credam sufficientia jam data haberi ad corporum multorum texturas interiores cognoscendas maximo generis humani bono, si sanitatis nostrae curam gerere vellemus, et si geometrae exhaustis artis suae praeceptis jam serio in natura explicanda laborarent, tandemque tot praeclaris experimentis in unum congestis uterentur. Quod nisi faciunt, peribit nobis laborum nostrorum fructus, quos post multa secula vix denique percipiet posteritas.

Haec cum mecum cogitarem attentius, observavi in geometriae applicatione ad naturam aut mechanicam occurrere plerumque problemata longe diversa ab his quae vulgo considerant geometrae, planeque per algebram intractabilia. Unde non nisi maximos geometras in hoc genere specimina alicujus momenti dedisse videbam, caeteris velut a limine repulsis. Agnito ergo algebrae defectu, cogitavi de vera Analysi Mathematica, sive via certa ac determinata, per quam semper ad propositum pervenire possemus. Hanc tandem assecutus mihi videor, quae algebram hodie receptam infinitis transcendit modis; docet enim solvere problemata, quae neque plana neque solida aut supersolida sunt, sed proprie nullius certi sunt gradus, proinde a me *transcendentia* appellantur, qualia sunt potissima atque utilissima quaeque. Quare qui algebram quidvis praestare posse putat, aut inconsiderate loquitur aut problemata majoris momenti tractare non est expertus.

Hanc ergo artem in Mathematicis inveniendi generalem publicare constitui boni publici amore; gloriae enim fortasse meae magis velificarer, si speciminibus editis methodum supprimerem. Sed supersunt mihi longe majora, et generis humani interest, ut geometrae, quod supra dixi, exhaustis artis suae praeceptis, jam serio cogitent de applicatione ejus ad naturam, ubi si methodum a me hic praescriptam et exemplis illustratam sequentur, non dubito quin

detecturi sint non pauca quae nunc ingenio humano impenetrabilia habentur. Tempus credo veniet, nec opinor longe abest, et hoc libello meo fortasse accelerabitur, quo omnis mathematica doctrina non minus vulgata erit inter eruditos, quam nunc arithmetica communis est inter plebejos, nec amplius de geometria (nisi exercendi tironum ingenii causa) sed de usu ejus laborabitur. Unum tamen nondum tradam, quod nec perfecte possem, artem scilicet inveniendi brevissimas atque optimas vias, quanquam et in eo genere non pauca praestiterim et videam progrediendi rationem. Sed nunc quidem contenti sumus habere vias certas ac determinatas propositum assequendi, quod tutius imo et brevius est quam fatigare animum et temere divagari velle, ut casu in meliora incidamus.

Methodum in tradendo hanc sequar. Primum exponam genesin numerorum et characteres, quibus exprimuntur. Deinde explicabo *Logisticam* seu modum calculandi, id est addendi, subtrahendi, multiplicandi, dividendi et radices extrahendi, idque tum in numeris indeterminate et generaliter sumtis, tum in numeris determinatis per characteres suos expressis, quod vulgo vocant *Algorithmum*, ubi tradetur et expressio per decimales et tabulae variae numerorum, quibus calculus sublevatur, inter quas est tabula logarithmorum. Inde explicabo *Algebram*, id est modum inveniendi valores incognitorum numerorum literis expressorum, sive modum logisticae praeceptis ita utendi, ut primum nanciscamur aequationem, quae exprimat relationem inter incognitam et cognitas, deinde ut extrahamus radices ex aequationibus tum exacte tum per appropinquationem in infinitum continuatam seu seriem infinitam idque tum in literis tum in numeris. Algebram sequitur *Arithmetica Diophantea*, ubi id quod quaeritur non est satis determinatum, sed pro nostro arbitrio porro determinandum, ea tamen arte ut conditiones quas pro arbitrio assumimus aptae sint ad quaestionem reddendam faciliorem. Hanc scientiam quae hactenus in potestate Analytici non fuit, tandem absolvi. Subjiciam specimen *Tabularum Analyticarum mirificarum*, quibus calculus literalis magis contrahetur, quam calculus numerorum per logarithmos. His tabulis absolutis omnis calculus literalis imposterum ludus jocusque erit. Sequitur *Analysis transcendentium* seu eorum quae ab aequatione certi gradus non pendent, eaque duplex, una summarum et differentiarum in seriebus, altera exponentium in potestatibus.

Hactenus magnitudines in universum tractavimus velut Numeros, nulla situs ac figurae ratione habita. Nunc ergo agemus de Geometriae Elementis, nempe de situ, de angulo, de natura rectae, circuli aliarumque figurarum quarum generationes et potissimas potestates ita explicabimus, ut caeteras quae per calculum ex his facile ducuntur non attingamus. Inde jungendo calculum cum geometria ostendemus primum, quomodo ea quae per geometriam et ductum linearum sive per motum determinata habentur, exprimi possint per calculum; deinde vicissim quomodo ea quae calculo determinata sunt, construi possint per ductum linearum. Sequitur Geometria transcendentium, nempe de quadraturis figurarum, quo refero dimensiones curvarum et superficierum et inventiones centrorum gravitatis; item de methodo tangentium inversa, quae Geometriae fastigium est. Atque ita absoluta est pars mathematicae doctrinae pura; subjicienda est mixta, quae nihil aliud continet, quam methodum problemata concreta revocandi ad abstracta ejusque exempla, ex quibus simplicissima sunt quae exhibet Optica. Hanc sequitur Mechanica, inde Musica, post Astronomia et Geographia ac Navigandi ars, et Architectonica, et Scientia militaris. Et omnino post Opticam et Mechanicam et Musicam et Astronomiam caetera tractanda eo ordine, quem postulat usus eorum in vita, ut appareat origo inventionis; ea enim cognita mirifice et acuitur ingenium et memoria sublevatur. *)

---

*) Ein der Clavis mathematica arcana ähnliches Werk gedachte Leibniz unter dem Titel: Thesaurus mathematicus, zu verfassen. Ueber den Inhalt desselben äussert er sich folgendermassen: Consilium operis: efficere ut lector attentus sine praeceptore, sine aliis libris proprio marte jucunde et facile non discere tantum pulcherrima atque utilissima mathematicorum inventa paucis comprehensa possit, sed etiam rationes veras atque inventionum origines teneat sciatque, qua ratione non haec tantum ipse si quando forte oblitus sit sibimet reperire denuo regularumque discendarum labore carere, sed et infinita alia ubi opus erit invenire oblataque problemata licet a nemine tractata quantum ad usum sufficit accurate solvere possit.

II.

INVENTORIUM MATHEMATICUM.

Praefatio. *)

Cum usu deprehenderim, agnoscantque nunc primarii geometrae, receptam analysin ad problemata difficiliora non sufficere qualia quotidie occurrunt geometriam ad mechanicen caeterasque artes vitae utiles applicantibus, et mihi ad universalia respicienti quaedam inveniendi artificia obtigerint quae superioris cujusdam scientiae corollaria tantum esse video: specimina haec in publicum exire volui, tum ut excitentur praestantiora ingenia, aperto aditu novo, tum ut illi ab errore liberentur qui cum facilia tantum experti sint proprio marte, putant tamen quidvis analysi sua praestari posse, magno detrimento juventutis, quae vana scientiae opinione inflata remittit a diligentia et progrediendi conatum deponit, cum tamen pulcherrima atque utilissima geometria, qua tum maxime indigemus cum lineas calculumque ad naturae arcana artiumque desiderata applicamus, prope intacta supersit.

Sciendum est autem, problemata difficiliora pleraque aut non omnino aut non nisi singulari artificio ad aequationes reduci posse, quales vulgo quaerunt: multa enim desinunt in aliud quoddam aequationum genus, quas vocare soleo transcendentes, quia non sunt certi gradus, sed vel graduum simul omnium, vel gradus ut ita dicam infiniti, quare problemata quae ab his pendent neque plana neque solida sunt neque suprasolida modo definito, possunt tamen solvi per calculum non minus quam per constructiones lineares. Sed lineae in geometriam recipiendae sunt novae, geometricae quidem, hacte-

---

*) Leibniz hat später hinzugefügt: Praefatio ad provectos. De his quae nova praestitimus. Alia addenda praefatio ad discentes, addendum optare me, ut imposterum de mathematicis abstractis arcana possimus deponere, accedentes ad naturam. — Am Rande des Manuscripts hat Leibniz zur Erklärung der Aufschrift bemerkt: Methodus Mathematica Nova, qua quisque instructus harum scientiarum arcana facile intelligere et per se invenire potest.

nus tamen pro mechanicis habitae etiam a novissimis autoribus, sunt enim transcendentes et analyticam quidem relationem habent omnium punctorum habitudinem perfecte exprimentem, sed quae per naturam rerum non est definiti gradus, possunt tamen describi exacte sine ulla transmutatione curvi in rectum, motu non minus continuo et ab uno principio pendente quam quo conchoides circuli aut parabola describitur, quanquam hic describendi modus non sit notus. Has ergo a geometria excludere nihil aliud est quam modum sibi adimere solvendi maxima atque utilissima problemata, quae demonstratum est aliter solvi non posse.

Unde intelligi potest, incipi a nobis, ubi Vieta et Cartesius desinunt, proportione incrementi longe majoris quam quo ipsi Apollonium ac Diophantum supergressi sunt, et quemadmodum illi problemata altiorum graduum quae plana solidaque excedunt, numeris lineisque tractare docuerunt, ita nos geometriam aequationes ipsorum transcendentem docentes, campum inveniendi aperimus longe immensiorem. Problemata enim quae aequationibus sive planis sive solidis sive utcunque suprasolidis continentur, omnia si recte inspicias tantum rectilinea sunt (etsi curvarum intersectione solvantur) et variis inter datas quaesitasque rectas rationum compositionibus tantum constant; sed cum curvilineae magnitudines calculum ingrediuntur, aut problemata ejus sunt naturae, ut non rationum certa compositione potentiarumve certi gradus aequalitate sed aliis quibusdam habitudinibus quales sunt innumerae determinentur, verbi gratia per angulos aut exponentes incognitos, per tangentium proprietates, per maxima et minima serierum exploratarum, tum vero non potest inveniri ultima quaedam aequatio certi gradus quales vulgo quaerunt, cujus radicibus per numeros lineasve exhibitis problema solvatur, sed aequationibus lineisque transcendentibus opus esse certum est. Itaque ut rem omnem paucis complectar, Veteres geometriam planam ac solidam tantum tradidere, persuasi alias solutiones tantum mechanicas esse; recentiores vero deprehenso eorum errore suprasolidam quidem, sed certi gradus cujuscunque tantum adeoque non nisi rectilineam adjecere, obstruxere vero ipsi sibi progrediendi viam, dum simili plane errore quae hanc legem ab ipsis latam subire non poterant, velut mechanica rejecerunt, cum tamen contemplationes effectionesque haberent pulcherrimas utilissimasque et analytice exprimi possint per aequationes de gradu in gradum transeuntes. Sic ergo haec nobis relicta est provincia vacua, ut geometriam

curvilinea metientem et analysin transcendentem eique propria Loca sive lineas effectioni problematum necessarias supplentes, fastigium quoddam scientiae imponeremus. Quae qui cum vulgata hodie methodo contulerit, intelliget neque difficultatis neque amplissimi usus comparationem fieri posse.

Nam quod ad difficultatem attinet, equidem hujus calculi quem Vieta introduxit, et constructionum quas Cartesius adhibuit, apud Veteres multa satis vestigia habentur, ut tantum quae ipsi Veteres inconsulte coërcuerant arctis nimis limitibus paucorum graduum, simili plane ratione ad caeteros producerentur symbolisque enuntiarentur commodis; sed nostri calculi apud Veteres ne vestigium est quidem, ac ne problemata quidem talia apud illos quaeri solita sunt, exceptis tantum paucis quae cognita videntur uni Archimedi, qui tamen suas artes adeo callide texit, ut nemo Veterum eas suspicione assecutus sit, unde nec quisquam Veterum quicquam praestitit in Geometria Archimedea. Recentiores eam ex latebris eruere, excellentes viri Galilaeus, Cavalerius, P. Gregorius., Guldinus, Fermatius, sed summam rei non sunt assecuti. Et vero totum hoc quo Archimedes usus videtur, transcendentis analyseos pars tantum exigua est, unde ad reliqua aditus non patet. Vietam et Cartesium potuisse arbitror aliquid magni praestare, etiam in hoc genere, sed ille nimia modestia (dum quadam antiquitatis reverentia etiam quae potest, se posse non putat solutionesque plane geometricas pro mechanicis habet), hic nimia ingenii sane maximi fiducia (dum ad quae aditum ex calculo suo primo obtutu non videbat, ea pro impossibilibus damnat et ad mechanica relegat) sibi obstitere. Sed in universum dici potest, talem esse calculum nostrum transcendentem, ut non unquam facile in mentem venire possit. Et quamvis profitear excellentissimorum Geometrarum, Hugenii, Huddenii, Heuratii, Pascalis, Slusii, Wrenni, Wallisii, Barrovii, Gregorii, Mercatoris, Neutoni, ingeniosissimis inventis me mirifice adjutum esse, agnoscent tamen opinor hi quoque qui ex illis hodieque superant pro candore suo, praestita esse a me quae fieri posse ipsi fortasse nec expectabant.

Usum vero geometriae hujus novae liber hic satis ostendet: illud tantum hoc loco monere satis erit, eum infinities ejus geometriae usum superare quam supplevit Veteribusque adjecit Vieta vel Cartesius, nam in Opticis, in Astronomia, in Mechanicis et in universum in mathesi quae cum physica concrevit, raro occurret problema utile ad aequationem receptam revocabile, quod ascendat ad suprasolida sive quod per geometriam planam vel conicam solvi non possit aut constructionibus a Cartesio primum introductis indigeat, cum tamen in iisdem scientiis perpetuo incurremus in quaestiones quae ad aequationes receptas reduci non possint, et si quis eas analytice tractare velit, huic analysi transcendente opus erit, nam hactenus egregii viri qui aliquid in hoc genere praestitere, fere ingenii potius sagacitate atque harum rerum usu quam methodo atque analysi quam aliis communicare potuissent sibi viam fecere. Imposterum autem nihil esse arbitror pure mathematicum, quod hac nostra methodo transcendente recte intellecta superari non possit, hoc uno excepto, quod artem inveniendi vias brevissimas, tametsi aditum ad eam videam, nondum in promtu habeam, et nisi mihi aut me felicioribus otium ei rei necessarium suppetat, absolvendam relinquo posteritati.

Caeterum una superest methodus sublimior, qua naturae artisque, quin imo et Metaphysicae et Vitae civilis problemata ad terminos quasi pure mathematicos reduci possint calculoque subjici in tantum certo, in quantum ex datis ingenio humano fieri potest; sed haec pertinent ad Artem inventoriam generalem nondum cuidam scriptorum quantum judico agnitam, et plane diversam ab omni eo quod hi quos legere aut cum quibus conferre memini, sibi figurant aut suspicantur. De quo hoc unum nunc dicere satis erit, habere me demonstrationem ejus, viamque videre infallibilem atque ita designatam, ut in ea persequenda exerrare aliquis non possit certoque sit voto potiturus, sed labore complanandum esse iter temporisque compendium esse quaerendum, conspiratione aliquot virorum huic rei aptorum. Cujus artis Elementis utcunque traditis non dubitem intra viginta annos majora ad humanae vitae usum praestari etiam in scientiis, quae maxime conjecturales sed tanto magis necessariae sunt, quam sueto ratiocinandi atque experimenta instituendi modo, aliquot secula, ne dicam annorum millenarii dabant. Nunc enim jam inopia, jam copia experimentorum atque ratiocinationum laboramus, et uti divitiis nostris non possumus nescimusque saepe, quid possideamus, similes illis qui ingentem apparatum habent, inventarium vero nullum, aut qui semper materiam colligunt, nunquam aliquid exstruunt. Quin etiam saepe cum possemus ex datis aut facile parabilibus experimentis magna quaedam et utilia colligere, si vel artem experimenta recto consilio instituendi teneremus vel si

empiricae industriae scientiam analyticam adjiceremus, contenti tamen sumus vel incertas hypotheses comminisci vel ex observationibus conclusiones ducere aliunde jam notas et per se demonstrabiles deplorabili temporis sumtuumque jactura. Quare si sic pergimus, serae tantum posteritati laboramus, cum possemus, si saperemus quidem, ipsi laborum nostrorum percipere fructus. Atque haec quidem illis consideranda commendo, qui altiore genio res agitant, veroque affectu publica bona prosequuntur; an autem fides aliqua tribuenda sit sive votis sive propositionibus meis, his qui libellum hunc intelligent, judicandum relinquo, hoc unum nunc adjicere contentus, duas inventoriae artis partes esse, analyticam et combinatoriam, instrumentum autem inventionis humanae generale esse characteres aptos, quod satis Arithmeticae et Algebrae et Geometriae ipsius exemplo patet: mens enim filo quasi quodam sensibili regenda est, ne vagetur in labyrintho et cum multa simul complecti distincte nequeat, adhibitis signis pro rebus, imaginationi parcit: multum tamen interest, quomodo signa adhibeantur ut res utiliter referrant; et jam nunc profiteor, hoc, quicquid est quod inventioni mathematicae adjeci, ex hoc uno natum esse, quod usum symbolorum quantitates repraesentantium reddidi meliorem.

III.

INITIA RERUM MATHEMATICARUM METAPHYSICA.

Cum insignis Mathematicus Christianus Wolfius nuper in Cursu suo Mathematico Latino meditationes quasdam meas circa Analysin Axiomatum et circa naturam similitudinis attigerit et pro more suo illustrarit (vid. Act. Erudit A. 1714), visum est nonnulla huc spectantia, dudum a me animo concepta, ne intercidant proferre, ex quibus intelligi potest, esse artem quandam Analyticam Mathematica ampliorem, ex qua Mathematica scientia pulcherrimas quasque suas Methodos mutuatur. Paulo ergo altius ordiri placet:

Si plures ponantur existere rerum status, nihil *oppositum involventes*, *dicentur existere* **simul.** Itaque quae anno praeterito et praesente facta sunt negamus esse simul, involvunt enim oppositos ejusdem rei status.

Si eorum quae non sunt simul unum rationem alterius involvat, illud **prius,** hoc **posterius** *habetur*. Status meus prior rationem involvit, ut posterior existat. Et cum status meus prior, ob omnium rerum connexionem, etiam statum aliarum rerum priorem involvat, hinc status meus prior etiam rationem involvit status posterioris aliarum rerum atque adeo et aliarum rerum statu est prior. Et ideo *quicquid existit alteri existenti aut simul est aut prius aut posterius*.

Tempus *est ordo existendi eorum quae non sunt simul*. Atque adeo est ordo mutationum generalis, ubi mutationum species non spectatur.

Duratio *est temporis magnitudo*. Si temporis magnitudo aequabiliter continue minuatur, tempus abit in *Momentum*, cujus magnitudo nulla est.

Spatium *est ordo coexistendi* seu ordo existendi inter ea quae sunt simul.

Secundum utrumque ordinem (temporis vel spatii) **propiora sibi aut remotiora** *censentur*, *prout ad ordinem inter ipsa intelligendi plura paucioraque corequiruntur*. Hinc duo puncta propiora sunt, quorum interposita ex ipsis maxime determinata dant aliquid simplicius. Tale interpositum maxime determinatum, est via ab uno ad aliud simplicissima, minima simul et maxime aequabilis, nempe recta, quae minor interjecta est inter puncta propiora.

Extensio *est spatii magnitudo*. Male Extensionem vulgo ipsi extenso confundunt, et instar substantiae considerant.

Si spatii magnitudo aequabiliter continue minuatur, abit in *punctum* cujus magnitudo nulla est.

Situs *est coexistentiae modus*. Itaque non tantum quantitatem, sed et qualitatem involvit.

Quantitas *seu Magnitudo est, quod in rebus sola compraesentia (seu perceptione simultanea) cognosci potest*. Sic non potest cognosci, quid sit pes, quid ulna, nisi actu habeamus aliquid tanquam mensuram, quod deinde aliis applicari possit. Neque adeo pes ulla definitione satis explicari potest, nempe quae non rursus aliquid tale involvat. Nam etsi pedem dicamus esse duodecim pollicum, eadem est de pollice quaestio, nec majorem inde lucem acquirimus, nec dici potest, pollicis an pedis notio sit natura prior, cum in arbitrio existat utrum pro basi sumere velimus.

Qualitas *autem est, quod in rebus cognosci potest cum singulatim observantur*, neque opus est compraesentia. Talia sunt attributa quae explicantur definitione aut per varias modificationes quas involvunt.

Aequalia sunt ejusdem quantitatis.

Similia sunt ejusdem qualitatis. Hinc si duo similia sunt diversa, non nisi per compraesentiam distingui possunt.

Hinc patet exempli causa, duo Triangula aequiangula habere latera proportionalia vel vicissim. Nam sint latera proportionalia, similia utique sunt triangula, cum simili modo determinentur. Porro in omni triangulo summa angulorum est eadem, cum aequetur duobus rectis; ergo necesse est in uno rationem angulorum respondentium ad summam esse quae in altero; alioqui unum triangulum ab alio eo ipso distingui posset, ex se scilicet seu singulatim spectatum. Ita facile demonstratur quod alias per multos ambages.

Homogenea sunt quibus dari possunt aequalia similia inter se. Sunto A et B, et possit sumi L aequale ipsi A, et M aequale ipsi B sic ut L et M sint similia, tunc A et B appellabuntur Homogenea.

Hinc etiam dicere soleo, Homogenea esse quae per transformationem sibi reddi possunt similia, ut curva rectae. Nempe si A transformetur in aequale sibi L, potest fieri simile ipsi B vel ipsi M, in quod transformari ponitur B.

Inesse alicui loco dicimus vel alicujus *ingrediens* esse, quod aliquo posito, eo ipso immediate poni intelligitur, ita scilicet ut nullis opus sit consequentiis. Sic ubi lineam aliquam finitam ponimus, ejus extrema ponimus ejus partes.

Quod inest homogeneum, *Pars* appellatur, et cui inest appellatur *Totum*, seu pars est ingrediens homogeneum.

Terminus communis est, quod duobus inest partem communem non habentibus. Quae quoties intelligantur partes ejusdem Totius, is terminus communis dicetur *Sectio* totius.

Hinc patet, Terminum non esse homogeneum terminato, nec Sectionem esse homogeneam secto.