Sed hoc intelligitur, si nihil obstaculis deteratur. Itaque reapse id assequi non licet, alioqui haberetur motus perpetuus non Physicus tantum, qualis iste est, sed et Mechanicus, in quo effectus excederet causam, quia non tantum causam reproduceret, sed et aliquid praeterea, id scilicet, quod obstacula sunt passa, contra propositionem 3.

Propositio 35.

Nullum est Elastrum tam intensum, quin possit adhuc amplius intendi quantulacunque potentia viva.

Sit (fig. 157) Elastrum tensum AB utcunque; ajo corporis C quantulicunque velocitate quantulacunque in CB incurrentis impetu adhuc amplius tendi posse. Aequale est enim hoc Elastrum ponderi alicui, si quod esset coërcens (per prop. 22); sed pondus quantumcunque vinci potest ab impetu quantulocunque (per prop. 30).

Propositio 36.

Nulla chorda vel catena gravis in alio situ quam verticali perfecte in rectam extendi potest vi mortua; potest viva.

Sit (fig. 158) chorda AB tensa utcunque a pondere appenso quantocunque; appendatur jam chordae mediae pondus quantumvis exiguum D; ajo id nonnihil chordam inflectere. Nam cum triangulum rectangulum EDB possit esse tale, ut cathetus DE habeat rationem datam quamcunque ad differentiam inter basin BD et hypotenusam BE, manifestum est posse esse talem, ut ratio ipsius DE ad hanc differentiam duplam sit major quam ratio ponderis C ad ponduscuIum D. Est autem differentia dupla aequalis ipsi CG ascensui ponderis C in casu chordae inflexae, et DE aequalis est descensui ponduscuIi; potest ergo effici, ut descensus DE ponduscuIi D majorem habeat rationem ad CG ascensum ponderis C, quam pondus C ad pondus D; sed tunc descendet ponduscuIum D (per prop. 15 hic), donec scilicet una ratio alteri (reciprocae) fiat aequalis (per prop. 16). Quod autem efficit ponduscuIum D in chorda etiam ponderis carente et perfecte antea tensa, id in chorda efficit ipsum chordae pondus, unde chorda gravis a pondere quantocunque perfecte tendi nequit, atque adeo nec ab ulla alia etiam vi mortua quae scilicet ponderi est comparabilis.

Impetus autem seu vis viva id potest, cum infinitam habeat rationem ad pondus. Unde pondus C, sublatum ad G, et inde rursus decidens tanta vi chordam AEB tendere potest, ut non tantum ad lineam rectam ADB perveniat, sed etiam concepto impetu excurrat altius, tremore quodam, qualis in chordis tensis notatur, etsi status perfectae in rectam extensionis non nisi momentaneus esse possit et in transitu contingat.

Definitio 6. Impetus vel quantitas motus est ut factum ex mole seu pondere in celeritatem.

Ut si grave A trium librarum habeat celeritatem duorum graduum, et vicissim grave B duarum habeat celeritatem trium graduum, dicentur habere eundem impetum seu eandem quantitatem motus, licet eandem quantitatem actionis formalis durante eodem vel aequali tempore, adeoque eandem potentiam temporis initio non habeant, ut jam ostendam.

Proposito 37.

Duae inaequales materiae quantitates, si eandem habeant potentiam absolutam, non habent eandem quantitatem motus; et contra.

Sit corpus A 3 librarum, et corpus B duarum librarum, et habeat A celeritatem ut 2; erit quantitas motus in A, ut 6 seu 3 in 2 (per praeced.), quantitas vero potentiae absolutae in A erit 12 seu 3 in 4 quadratum de 2 (per prop. 4 cap. 2 sect. 3 adde et prop. 32 hic). Si jam B 2 eundem impetum habere debet seu eandem quantitatem motus quam A 3, hoc est quantitatem motus ut 6, utique B 2 accipiet celeritatem 3, sed ita habebit potentiam 2 in 9 seu 18. Quodsi B 2 eandem debet accipere potentiam quam A 3 nempe 12, accipere debebit B 2 velocitatem quae sit ut radix quadrata de 6. Sed tunc non habebit quantitatem motus quam A 3, nempe 6, cum quantitas motus ipsius B 2 futura tunc sit radix quadrata de 24. Et idem est in numeris aliis quibuscunque inaequalibus, ubi quadrata non possunt esse in ea ratione, in qua sunt latera.

Propositio 38.

Effici potest, ut corpus quodlibet datum datae velocitatis transferat in aliud prius quiescens totam suam potentiam vel partem ejus imperatam quantamvis.

Sit (fig. 159) datum corpus A datae velocitatis, et aliud quiescens datum B; ajo effici posse, ut tota potentia ipsius A vel etiam pars ejus imperata transferatur in B. Sit libra rectilinea rigida, carens mole (saltem consideratu digna) PCL, quam tangit quiescens B; ejus librae centrum sit C, et ex A ad eam normalis AL, qua A incurrit in libram. Patet utique libram sic assumi posse, ut CL sit ad CP in ratione data; vel etiam, si data sit positione libra, posse B atque A sic collocata supponi, ut ea ratio sit quaecunque desiderata, utroque corpore A et B existente ante libram, sed ad brachia contraria. Jam manente CL, si B tam prope accedere ponatur ad centrum C, ut in ipsum plane incidat, seu libram non nisi in centro tangat, seu si brachium CL sit infinite majus quam brachium CP, tunc nullo modo B impediet progressum ipsius A in momento incursus in L non magis quam si ipsum B tunc prorsus abesset; et ita corpus A incidens in L perget trans L continuata seu retenta sua qua advenerat celeritate. Contra, si infinita sit ratio brachii CP ad brachium CL sive scilicet brachio CL existente finito brachium CP sit infinitum, et corpus B infinite distare fingatur, sive (eadem propositione) si brachio CP existente finito brachium CL sit infinite parvum, hoc est, si A incurrat in ipsum centrum immobile rigidum; tunc perfecte resistetur ipsi A, ita ut tota vi qua venit repercutiatur. Cum enim nec progredi possit, nec ratio sit, cur in partem alterutram flectatur, nec vim possit in aliud transferre, ideo totam retinebit, et ea qua venit linea resiliet. Quodsi rationes sint finitae, et radio CL manente dato finito, corpus B a centro C tantillum recedat ad N, tunc progressus ipsius A in L incurrentis non prorsus quidem integer manebit, sed tamen nec prorsus sistetur, verum intermedium aliquid eveniet, ipsi casui B in centro existentis seu perfecti progressus ipsius A quantum volemus vicinum, ut scilicet A incidente in L, dum B quiescit in N, perget quidem A trans L, sed tardatum nonnihil parte aliqua virium translata in B. Et nisi hoc fieret, ab uno extremo ad aliud transiretur non mutatione continua per variationes momentaneas inassignabiles, sed per saltum. Vicissim manente B in N vel ubicunque distantia BN existente finita, tunc uti A incidens in centrum C perfectam patiebatur repercussionem, ita si A incidisset in distantia tantilla a centro C, v. gr. in M, fuisset quidem repercussio, sed tantillo minor. Idemque erit si sit CP ad CL datam, uti CN ad CM, ut scilicet A

incidens in L repercutiatur a B existente in P, etsi non perfecta rejectione seu ea vi qua venit, sed ita ut pars virium translata sit in corpus B. Habemus ergo duos status, unum ut corpore A incidente in punctum datum L, corpore autem B quiescente in puncto N satis vicinio ad centrum, pergat A trans L, parte tamen virium amissa; Alterum ut corpore A itidem incidente in idem punctum datum L, B vero quiescente in puncto P satis remoto a centro C, repercutiatur A parte iterum virium amissa. Ergo transeundo ab N versus P, manente L, necesse est dari punctum intermediae distantiae velut Q, ubi posito B desinat pergere A incidens in L, et post quod incipiat reflectere, id est debet dari punctum Q tale, ut quiescente ibi B, ipsum A incidens in L nec pergat, nec reflectatur, sed praecise sistatur sive ad quietem redigatur, atque ideo totam suam potentiam transferat in corpus antea quiescens B, quod desiderabatur.

Manifestum est autem eadem methodo ostendi, nullum medium assignari posse inter perfectum progressum et perfectam repercussionem, quod non assignato certo loco ipsius B obtineri debeat, manente licet semper incursu eodem ipsius A in idem punctum L. Et proinde effici potest, ut A pergat vel reflectatur, parte virium quacunque retenta, atque adeo parte imperata virium in B antea quiescens translata, quod itidem desiderabatur. Quod autem pars virium ab A amissa transferatur in B, ex eo constat, quod effectus alioqui seu status sequens foret minor causa seu statu praecedente, quoniam subintelligimus libram esse perfecte rigidam et mole carentem instar lineae indivisibilis, vel saltem molem ejus tantam non esse, ut veniat in considerationem, adeoque nullam vim (consideratione dignam saltem) in se recipere vel absorbere, atque adeo omnem ipsius A actionem, quae effectum aliquem potentia praeditum producat, pervenire in B. Itaque cum effectus integer sit causae aequalis, et pars proinde virium ab A amissa utique alicubi esse debeat, erit ea in B translata.

Caeterum ut situs ipsius B determinetur praecise, in quo datam virium portionem accipiat, aliis praedemonstratis opus est, quae non sunt hujus tractationis; sequentem tamen propositionem subjicere placet, quippe iis non indigentem.

Propositio 39.

Si corpus in librae rigidae rectilineae mole (considerabili) carentis brachium incurrat, et ante brachium oppositum reperiatur quiescens aliud corpus, priori proinde non obstans, sitque distantia a centro quiescentis aequalis distantiae incurrentis, incurrens autem pergat post incursum; tunc velocitas, quam accipit quiescens, non potest esse minor velocitate quam retinet incurrens. Quodsi distantia quiescentis sit major, etiam velocitas, quam accipit quiescens, necessario major est illa qua pergit incurrens.

Nam (eadem retenta figura 159) A incidente in L et trans L pergente atque adeo brachium CQ pellente in contrariam partem, patet corpus B non posse tardius incipere moveri quam punctum Q immediate tangens et insequens. Jam si aequalia sunt brachia CQ et CL, utique aequalis est velocitas punctorum Q et L, puncti autem L velocitas eadem est quae incurrentis corporis A; itaque B non potest tardius moveri quam pergit A, sed movetur celeritate majore aut saltem aequali. Quodsi corpus B sit in loco P, ita ut radius CP sit major quam CL, multo magis verum erit, imo velocius B movebitur quam pergit A. Nam B non movetur tardius quam P, sed P velocius quam Q, id est L vel A; ergo et B velocius movetur quam pergit A.

Propositio 40.

Non eadem in corporibus se invicem agentibus conservanda est quantitas motus, sed eadem quantitas potentiae absolutae, alioqui daretur motus perpetuus Mechanicus.

Nempe ostensum est supra (prop. 7 et 8), eandem conservari quantitatem potentiae, sed haec differt a quantitate motus (per prop. 37) nec semper utraque simul conservari potest. Sed idem sic apparebit distinctius.

Sit (fig. 160) corpus A quatuor librarum descendens ex altitudine unius pedis et acquirens celeritatem unius gradus, ubi pervenit in horizontem. Ponatur jam totam ejus potentiam absolutam transferri debere in corpus B unius librae, ita ut quiescat corpus A, solius autem corporis B motus supersit (quod fieri posse osten-

sum est prop. 38 hic); quaeritur quantam velocitatem accipere debeat corpus B. Ajo si B 1 accipit eandem quantitatem motus quam habuit A 4, haberi motum perpetuum seu excessum effectus supra causam; sin vero accipiat eandem quam A habuit potentiam absolutam, ut a nobis aestimatur, effectum fore causae aequalem. Nam si corporis A librarum 4 celeritatem habentis gradus unius quantitas motus 4 (per def. 6) transferri debet in corpus B librae unius, ita ut B 1 accipiat eandem quantitatem motus 4, debet accipere celeritatem graduum 4 (per dictam defin. 6); sed si descendendo ex altitudine $_1A_2A$ seu unius pedis quaesita ipsius A 4 celeritas est gradus unius, utique B 1 habens celeritatem quatuor graduum ascendere poterit ad altitudinem pedum 16 (si scilicet ope penduli vel plani inclinati vim suam ad ascendendum convertat) per demonstrata a Galilaeo vel per nostram prop. 32 hic. Sed sola potentia A 4 librarum ex uno pede descendentium attollere unam libram B ad 16 pedes vel 4 libras ad 4 pedes (quod eodem redit) est effectum efficere quadruplum causae, cum ejusdem potentiae sit attollere 4 libras ad unum pedem et attollere unam libram ad 4 pedes. Itaque habetur motus perpetuus. Qui quomodo inde machinamento facili deduci possit, ostendimus in specimine demonstrationum de Lege naturae circa corporum potentiam initio totius hujus tractationis posito, quanquam intelligentibus rerum mechanicarum id per se sit manifestum. Itaque si potentia corporis A 4 librarum descendentis ex altitudine pedis unius transferri debet in corpus B unius librae, hoc debet accipere celeritatem ut 2; ita enim attollere poterit unam libram, corpus scilicet proprium ad altitudinem 4 pedum, et effectus erit aequalis causae. Cum enim causa fuerit Thema seu status 4 librarum elevatarum ad altitudinem unius pedis, Effectus integer primus seu immediatus fuerit celeritas unius gradus in 4 libris, Effectus integer secundus seu mediatus celeritas 2 graduum in una libra, Effectus integer tertius sit Thema seu status unius librae elevatae ad altitudinem 4 pedum; ita Thema primum et ultimum aequivalebunt: nam eadem potentia est 4 librarum elevatarum ad unum pedem, et unius elevatae ad 4 pedes (ex concessis et per prop. 16 hic), dando scilicet ipsi B 1 celeritatem 2, potentia ejus absoluta erit 4 (per prop. 4 cap. 2 sect. 3), eadem quae ipsius A 4 habentis celeritatem 1. Itaque cum eadem potentia conservanda est, non quantitas motus (ne excessus virium seu motus perpetuus oriatur), sed talis quantitas potentiae absolutae qualem explicuimus conservari debet.

Ostendemus autem suo loco, etsi in natura non maneat eadem quantitas motus, manere tamen eandem in summa *quantitatem nisus*, seu conatus ad certam *directionem* sive vim *directricem*.

Definitio 7. *Vis respectiva est, qua duo corpora in se invicem agunt; et cum duo mobilia concurrentia se mutuo sistunt, aequalem vim respectivam habere dicentur. Poterit etiam dici vis ictus sive percussionis.*

Suo autem loco ostendetur, eandem esse vim ictus, sive A incurrat in corpus quiescens B, sive idem B eadem celeritate incurrat in A quiescens, imo quaecunque fiat hypothesis distribuendi motus, modo eadem maneat celeritas appropinquationum seu respectiva.

Propositio 41.

Si duo mobilia aequali quantitate motus directe seu perfecte concurrant, eandem habebunt vim respectivam, seu mutuo sistent progressum.

Sit (fig. 161) mobile DE duarum (si placet) librarum incurrens in A velocitate AH unius gradus, et mobile aliud FG unius librae incurrens in B velocitate FL duorum graduum. Ponantur autem A et B esse extremitates librae rectilineae ACB aequalium brachiorum AC et BC, et intelligantur mobilia ascendere impetu concepto graduum dictorum, seu ex inferiore loco venientia in libram ut diximus impingere; ajo se mutuo sistere debere, posito libram rigidam sive inflexibilem esse, nec ipsius molem considerari. Nam in uno DE 2 est potentia intra tempus elementare seu indefinite parvum attollendi suum pondus 2 ad altitudinem AH etiam indefinite parvam quae sit ut 1; erit in altero FG 1 potentia intra idem tempus elementare seu indefinite parvum attolli suum pondus 1 ad altitudinem BL prioris duplam, ob duplam celeritatem. Ejusdem autem est potentiae attollere pondus DE 2 ad altitudinem AH ut 1, et attollere pondus FG 1 ad altitudinem BL ut 2, et in casu concursus actio momentanea aestimanda est, intra tempus scilicet indefinite parvum. Itaque respective aequivalent corpora DE et FG suis in se mutuo agendi viribus, et proinde se mutuo sistunt. Nihil autem interest, utrum corpora duo sibi mutuo

occurrant interventu librae brachiorum aequalium, an vero immediate, cum utrobique aequaliter in se invicem totis viribus agant; itaque si (fig. 162) corpus DE librarum 2 celeritate ${}_1E_2E$ ut 1, et corpus FG librae unius celeritate ${}_1F_2F$ ut 2, directe seu perfecte concurrant, alterum alterius progressum mutuo sistet.

Habeo alias hujus propositionis demonstrationes, sed quaedam praedemonstranda requirentes, quae commodius in separatam tractationem differemus. Interim hoc loco discimus ex ipsa aestimatione potentiae absolutae, quomodo etiam aestimanda sit potentia respectiva, etsi hae duae potentiae a se invicem differant, ut patet ex sequenti. Atque ita uni eidemque *principio aestimandi potentias per comparationem causae et effectus* omnia nostra innituntur. Caeterum hanc propositionem quidam sine demonstratione assumunt, alii ex falso principio demonstrare voluere quasi ejusdem esset potentiae, corpus 2 habere velocitatem 1, et corpus 1 habere velocitatem 2, quod falsum esse ostendimus. Sed in casu aequilibrii, itemque et potentiae respectivae, ratiocinatio eorum per accidens succedit, quia tunc coincidit consideratio altitudinis (quippe momentaneae) seu tempore elementari obtinendae, et celeritatis, idque ipsum decepit plerosque, ut pro indubitato haberent idem esse quantitatem potentiae, absolutae scilicet (quae nempe in corporibus semper in summa conservari debet), et quantitatem motus. Unde illa celebris apud quosdam *Lex naturae*, quod eadem in Universo servetur quantitas motus sive impetus, quam falsam evicimus, meliorem et nunquam decepturam substituentes, quod *eadem quantitas potentiae* absolutae seu summa factorum ex ponderibus in altitudines, ad quas vi suarum potentiarum attolli possunt, atque adeo *quantitas effectus integri causae aequalis in natura conservetur.*

Propositio 42.

Si duo corpora inaequalia eandem habeant vim respectivam, seu perfecto concursu se mutuo sistant, non poterunt eandem habere potentiam absolutam, seu idem pondus ad eandem altitudinem attollere; et vice versa.

Nam si sese mutuo sistant, eandem habent quantitatem motus (per prop. praeced.). Sed inaequalia corpora eandem habentia quantitatem motus non habent eandem quantitatem potentiae absolutae (per prop. 34). Eadem argumentatio est pro conversa.

Si exempli gr. sint duo corpora, A librarum trium, velocitatis 1, et B librae unius, velocitatis 3, possunt sese sistere mutuo (per 41 praeced.). Sed cum A possit vi suae celeritatis tantum attollere libras tres ad altitudinem unius pedis, poterit B vi suae velocitatis attollere libram 1 ad pedes 9, vel libras novem ad pedem unum. Itaque different A et B potentia absoluta, seu quantitate effectus integri potentia praediti, quem producere vi suarum celeritatum possunt, etsi eadem in se mutuo potentia respectiva agant. Quarum rerum naturae et discrimina huc usque minus distincte cognoscebantur. Atque ita fontes Scientiae Dynamicae de Natura potentiae et actionis hactenus non satis exploratos aperuisse mihi videor, sublatis ambiguitatibus simplicissimo generalissimoque principio aequalitatis inter Causam et Effectum constituto, unde alia porro naturae admiranda peculiari tractatione deducemus.

SECTIO SECUNDA.

DE CENTRO GRAVITATIS ET DIRECTIONE MOTUS.

Caput I.

De Centro gravitatis et quod omni mobili tale centrum attribui possit.

Definitio 1. Centrum gravitatis est punctum, quo sustentato grave quomodocunque situm vi gravitatis non movetur. Intelligitur autem, lineas directionum seu in quibus punctum corporis gravis moveri tendit, esse parallelas inter se, et eodem modo gravitatem agere in quocunque horizonte seu plano ad lineas directionum normali.

Sit (fig. 163) grave A, et punctum C; suspendatur grave ex puncto suo D vel F ope funis (si placet) BD, sic ut recta perpendicularis ad horizontem DE vel FG transeat per C; tunc si

grave quiescit quantum ad gravitatem nec in unam potius quam alteram partem fertur, idque succedat quodcunque sit punctum suspensionis D vel F, manente C, ipsum C dicetur centrum gravitatis. Quod proinde invenitur per diversarum perpendicularium, ut DE et FG, quas directionum lineas vocamus, intersectionem. Dubitari autem potest, utrum tale centrum detur. Nam etsi duae rectae alicubi se secent, non inde tamen sequitur quod intersectio omnium debeat esse communis, seu quod LM linea directionis in casu suspensionis ex L debeat DE secare in eodem puncto C, ubi secatur DE ab FG. Et videtur esse audax hoc postulatum, etsi successu comprobatum sit. Eoque major est ratio dubitandi, quod in plerisque figuris non datur centrum magnitudinis, seu punctum per quod recta vel planum transiens semper magnitudinem figurae in duas partes aequales secat, ut mox ostendemus. Multo minus ergo videtur figura semper per idem punctum in momenta aequalia secari, cum momentum magis sit compositum quam magnitudo, quippe ex magnitudine et gravitatione simul dependens. Et tamen quasi miraculo evenit, ut res semper succedat non tantum in centro gravitatis, sed et agitationis. Itaque demonstrationem tantae veritatis quaerere operae pretium est. Interim subintelligendae sunt conditiones definitioni ascriptae; nam si directiones gravium ponantur convergere in centro terrae, et major esse vel minor gravitas in majore elevatione, non exacte succedit. Etsi autem talis gravitas non sit in natura, qualem assumsimus, non ideo tamen minus datur centrum, quale definivimus, futurum scilicet si eae gravitatis conditiones ponerentur, imo serviens ad generales directionum aestimationes, ut suo loco apparebit.

Definitio 2. Centrum magnitudinis est, per quod planum quodcunque transiens figuram secat in duas partes aequales. Quodsi praeterea partes sint similes adeoque congruae, dicetur Centrum figurae; et Figurae quae habet centrum figurae, dici poterunt amphidextrae.

Tales sunt parallelogrammum, polygonum regulare, circulus, ellipsis, compositum ex duabus hyperbolis oppositis; et ex solidis cubus, aliaeque figurae regulares, sphaera, figura sphaeroides, aliaeve innumerae; et harum figurarum ambitus.

Propositio 1.

Punctum quod est centrum figurae, est etiam centrum gravitatis figurae (si scilicet materia figurata sit similaris).

Manifestum enim est in figura amphidextra, qualis est ad defin. 1 sustentato centro C, omnia semper utrinque eodem se modo habere seu congrua esse (per def. 2), nec proinde rationem esse, cur magis ad partes FL quam FD motus inclinet. Itaque quiescet grave, et centrum C (per def. 1) est centrum gravitatis.

Propositio 2.

Dantur figurae quae nullum habent centrum magnitudinis, seu punctum per quod a recta ducta quavis bisecentur.

Tales quidem sunt pleraeque, sed sufficit unam exhibere ex simplicioribus. Sit (fig. 164) Triangulum aequicrurum BAC, cujus angulus rectus A; basis BC bisecetur in D, et latera BA, CA in punctis E et F. Patet AD, BF, CE unamquamque triangulum hoc bisecare. Secabunt autem se istae in puncto M. Quodsi ergo datur hic centrum magnitudinis, utique (per def. 2) id erit punctum M. Quo posito (per eandem def. 2) ducta GMH recta basi parallela etiam bisecabit triangulum BAC; sed hoc est falsum. Nam ex E agatur in AD normalis EN. Cum AE sit dimidia ipsius AB, erit AN vel ND vel EN dimidia ipsius AD vel BD vel DC. Cum ergo triangula ENM et CDM sint similia, erit NM dimidia ipsius DM; ergo tertia pars ipsius ND, et proinde sexta pars ipsius AD. Ergo AM (id est AN + NM, dimidia pars cum sexta) constabit duabus tertiis ipsius AD. Est autem AM aequalis ipsi GM; ergo quadratum ipsius AM, hoc est quatuor nonae quadrati sub AD, aequatur triangulo GAH. Minime ergo verum est, triangulum GAH esse dimidium trianguli BAC, quod quadrato sub AD aequatur. Itaque punctum M non est centrum magnitudinis. Et proinde centrum magnitudinis in triangulo proposito non datur.

Propositio 3.

Sustentans eodem modo premitur ut prius, si tota gravitas in centrum gravitatis redigi ponatur, seu si grave ex manente centro libere suspendatur.

In figura definitionis 1 redigatur grave ADE in aliud minus

quidem, sed simile et similiter positum respectu centri gravitatis C manentis, quod grave novum sit gravitatis specificae in eadem proportione majoris, in qua est voluminis minoris; patet eandem esse vim quae funem trahit in directione BDC. Idemque est, si grave in spatium minus dato quovis contrahatur, donec tandem in punctum ejusdem cum gravi initio dato gravitatis evanescere fingatur. Idem et sic concluditur, quod posito corpus suspendi ex centro gravitatis C, tota utique vis gravitatis in puncto C funem BC trahit; nec refert cujus magnitudinis aut figurae sit quod puncto C adhaeret, modo eadem maneat gravitas, quam totam agere manente gravitatis centro ex definitione hujus centri manifestum est, quia ipso sustentato tota impeditur, atque adeo in impedimentum agit.

Propositio 4.

Gravia quotcunque positione data, quorum quodlibet habet centrum gravitatis, habent centrum commune gravitatis.

Sint primum duo, et centra eorum (fig. 165) A et B ipsis corporibus inde suspensis aequivalentia (per praeced.) Sufficit ergo ut ostendamus, duo puncta licet gravitate inaequalia habere centrum gravitatis commune compositi ex ipsis A et B per lineam rigidam mole carentem connexis. Secetur recta AB in C sic ut AC sit ad BC in ratione quam postulat aequilibrium, seu ut sustentato puncto C nullus fiat motus vi gravitatis. Ergo punctum C (per def. 1) est centrum gravitatis compositi ex A et B. Invento jam centro corporum duorum, eodem modo habetur centrum trium et plurium, duo simul concipiendo ut unum corpus centrum habens, cujus porro ut diximus habetur centrum commune cum tertio, et ita porro. Dari autem aliquam rationem aequilibrii inter duo puncta A et B gravitate inaequalia, assumi potest ut postulatum; sed idem tamen si quis desideret, sic probatur. Manente linea rigida connectente A et B, sustentetur A; patet B totam suam gravitatem exercere, seu nullo modo sustineri vel ab A impediri. Jam recedat sustentans tantillum ab A versus B, patet A sustineri aliquomodo et aliquam habere descendendi libertatem; et sustentante porro magis magisque promoto versus B, patet libertatem seu vim agendi in A crescere, manente quidem sed decrescente sustentatione, donec sustentans perveniat ad B, ubi ipsum A nullo modo impedietur a B in totum sustentato, adeoque prorsus liberum erit. Idemque est de B vicissim. Cum igitur transeatur per omnes sustentationis et libertatis, seu momentorum gradus, qui ex contrarii actione majore minoreve oriuntur, adeoque in ratione quavis possibili, necesse est alicubi esse rationem aequalitatis, seu aliquod esse punctum aequilibrii C. Sustentato scilicet A, vis ejus ad vim ipsius B erat ut nihil ad aliquid, crevitque decrescente vi ipsius B, donec ista contra fiat ad vim A, ut nihil ad aliquid; et cum mutatio sit continua, utique per omnes rationes intermedias transiri oportet, adeoque et per rationem aequalitatis.

Caeterum qualis sit ratio aequilibrii nempe ut bracchia sint in reciproca ponderum ratione, ad hanc demonstrationem nihil refert, quanquam id potuissemus assumere velut demonstratum independenter ab hypothesi centri gravitatis.

Propositio 5.

Omne extensum grave habet centrum gravitatis et quidem unicum.

Sit (fig. 166) figura plana vel solida, gravitate praedita RST; haec resolvi potest in rectangula vel alias figuras amphidextras sive centrum figurae habentes, inscribendo v. gr. ipsi RST maximum rectangulum 1, et residuis portionibus maxima inscribendo rectangula 2, 2, et iterum residuis maxima inscribendo 3, 3, 3, 3, et ita porro, ita ut quod superest, minus fieri possit data quavis quantitate. Jam quodlibet horum rectangulorum habet centrum gravitatis (per prop. 1), et plura positione data quotcunque, quorum singula habent centrum gravitatis, habent centrum gravitatis commune (per prop. 4). Itaque aggregatum rectangulorum, hoc est figura data habet centrum gravitatis. Quodsi extensum esset linea curva vel superficies gibba, potest pro ea adhiberi ambitus polygoni vel polyedri inscripti minus differens quantitate data; is ambitus autem polygoni constet ex rectis, polyedri ex planis, quae cum centrum gravitatis habere ostensum sit, ipse ambitus tale centrum habebit. Quodsi extensum non sit similare, sed variae in variis partibus gravitatis, cujuslibet partis similaris praeinvestigetur centrum. Quodsi nulla pars similaris detur, error tamen dato minor erit, si partes quantum satis parvae tanquam similares mediae gravitatis inter eas, quas quaeque habet, gravitates assumantur. Caeterum

sicubi sit centrum gravitatis, simul unicum esse manifestum est, cum ab ipso prius aequidividente in quamcunque partem recedendo plus ponderis a tergo relinquatur.

Hinc manifestum est, quae de centro gravitatis unius corporis vel mobilis dicuntur, pertinere etiam ad centrum gravitatis mobilis ex pluribus mobilibus discretis.

Propositio 6.

Si in gravibus sola agat gravitas, descendet gravium centrum gravitatis commune.

Ponamus (fig. 167) gravitatem egisse, et ideo aliquid descendisse. ut B ex ${}_1B$ in ${}_2B$; dico et centrum commune (verbi gr. ipsorum A et B) descendisse ex ${}_1C$ in ${}_2C$. Ponamus enim non descendisse, sed mansisse in ${}_1C$. Ergo jungantur lineis rigidis A_1C, ${}_2B_1C$, et sustentetur centrum C. Patet totam vim gravitatis ipsorum A et B sustentari (per def. 1 seu per prop. 3 hic), et proinde eandem potentiam esse in ${}_1C$, quanta erat ante descensum ipsius B. Sed adest praeterea potentia nova quae descensu ipsius B produci potuit, verbi gr. elastrum aliquod descensu illo tensum, vel impetus impressus. Effectus ergo seu status posterior A_1C_2B cum elastro tenso sumtus major est causa seu statu priori A_1C_1B, quod est absurdum per axioma capitis de causa et effectu Sect. 4 (adde dictae Sect. prop. 3). Necesse est igitur descendisse et centrum C.

Caput II.

De Motus directione et figura.

Definitio. Directio est linea recta, in qua movetur punctum mobile ab initiali rectae puncto versus aliud ejusdem rectae punctum, nisi a causa superveniente impediatur.

Si (fig. 168) gravis puncti A directio versus centrum terrae est recta BC ducta a B loco ipsius A ad centrum terrae C, quia a B incipiens moveri A, movetur in recta BC, ita ut propius fiat ipsi C, scilicet nisi aliqua causa nova superveniat, qualis esse posset impulsus lateralis versus E seu directione AE, unde fieri posset, ut grave moveretur in linea aliqua AF motu composito, ut mox patebit. Addatur definitio Motus aequidirecti supra prop. 5 et 8 cap. 5 Sect. 2 et propositio 26 Sect. 4, ubi de directione motus curvilinei, quae est in tangente.

Propositio 1.

Quotcunque motus et qualescunque componi possunt inter se, ita ut punctum mobile motu ex omnibus composito feratur.

Superficies quaecunque rigida moveatur qualicunque motu aequidistributo et aequidirecto, quod fit, si puncta ejus aliquot numero finita sufficientia (qualia sunt in plano tria in eandem rectam non cadentia) in lineis inter se congruis (seu similibus et aequalibus) moveantur, unde et reliqua puncta omnia per lineas prioribus gemellas seu congruas eodem modo seu congrue movebuntur. Ut si (fig. 169) rigida superficies ABCDE moveatur, ita ut puncta A, B, C, D lineas congruas ut $_1A_2A$, $_1B_2B$, $_1C_2C$ etc. describant, unde et reliqua quaecunque tales describent, omniumque punctorum eadem erit celeritas et directio. In hac superficie sit crena excavata secundum lineam quamcunque DE, in qua interim dum movetur superficies ABC, moveatur mobile M celeritate quacunque data in crena tanquam quiescente. Manifestum est, hos duos motus, unum nempe superficiei, omnibus ejus punctis adeoque et crenae ac proinde et mobili in ipsa crena communem, alterum mobilis proprium in crena, componi inter se in mobili M, quod proinde describet lineam $_1M_2M$, cujus puncta quaevis pro tempore quovis ex situ crenae ob motum superficiei communem dato, et situ mobilis in crena ob datum in ea mobilis motum proprium, determinari possunt. Quodsi ipsa interim superficies ABC rursus eodem modo moveatur in alia superficie mota tanquam fundo, punctis aliquot A, B, C per hujus fundi crenas $_1A_2A$, $_1B_2B$, $_1C_2C$ incedentibus, dum interim ipsa haec nova superficies seu fundus movetur, habemus tres motus inter se compositos, et ita porro, si habet, plures.

Propositio 2 et Definitio.

Si duo motus rectilinei uniformes vel velocitate proportionales componantur inter se, ita ut mobile in angulo positum eodem tempore percurrat unum latus anguli secundum unum motum et alterum secundum alium, motus compositus erit in recta diagonali completi secundum haec latera parallelogrammi, eamque eodem tempore absolvet, eritque similiter niformis aut proportionaliter cum prioribus cres-

cens vel decrescens. Et proinde si celeritas et directio motuum componentium repraesentetur per latera parallelogrammi, celeritas et directio motus compositi repraesentabitur per diagonalem. Directionem autem cum velocitate ducta in quantitatem materiae Nisum, sed cum flexum simul designabimus, generaliori voce vocabimus Conatum. Unde nisus omnes sunt rectilinei, conatus vero tam rectilinei quam etiam circulares aliterve curvilinei.

Per regulam (fig. 170) immotam BB incedat regula mobilis BC eodem semper angulo servato regulae ad regulam. Atque interim in regula motu proprio incedat mobile M, sitque velocitas regulae ad velocitatem mobilis in regula, ut $_1B_2B$ ad BC in eadem semper ratione constante, quod fit, sive velocitas utriusque semper maneat eadem, sive eadem proportione crescat utrobique; compleatur parallelogrammum $_1C_1B_2B_2C$, et ducatur diagonalis $_1B_2C$; ajo eam repraesentare velocitatem et directionem motus compositi ipsius M, seu quo tempore regula percurrit $_1B_2B$, mobile M percurrere $_1B_2C$. Manifestum enim est, quo tempore BC ex $_1B_1C$ pervenit in $_2B_2C$, mobile M pervenire ex B in C, adeoque cum initio fuerit in $_1B$, in fine esse in $_2C$; idque cum eadem proportione locum habeat in puncto intermedio quocunque (ipsum enim $_2B$ pro arbitrio assumsimus), patet semper mobile M versari in recta $_1B_2C$, et partes ejus absolvere proportionales partibus regularum. Etsi autem motus non sint uniformes nec proportionales, ut tales tamen seu motuum elementa, quae semper ut motus uniformes assignabilibus minores concipi possunt, conatum rectilineum component.

Propositio 3.

Quotcunque motus uniformes vel proportionaliter velocitatem variantes rectilinei inter se compositi componunt motum mobilis puncti rectilineum etiam uniformem vel proportione eadem cum reliquis variatum, et proinde quotcunque conatus rectilinei componunt conatum rectilineum.

Cum enim duo talem componant (per praeced.), compositus cum tertio iterum (per eand.) componet talem novum, et ita porro.

Propositio 4.

Mobile quod fertur in linea curva, conatur ab ea recedere per tangentem.

Hujus demonstrationem anticipavimus prop. 26 Sect. 4, quae huc repetatur.

Propositio 5.

Omnis motus curvilineus in plano intelligi potest compositus ex duobus rectilineis, quorum unus sit uniformis vel velocitatis quacunque lege data crescentis aut decrescentis. Pro motu in solido adhiberi possunt rectilinei tres.

Descripta scilicet (fig. 171) in plano linea motus MM, atque inde in angulum rectilineum CMB vel CAB ductis coordinatis MB, MC, intelligi potest mobile M ferri motu composito ex motu regulae mobilis CC incedentis per immotam regulam BB, et motu proprio in regula, motibus ita temperatis, ut dum regula CC absolvit AB (aequalem ipsi MC), mobile M in ea absolvat AC (aequalem ipsi MB).

Si motus CC sit uniformis, et BB gravitatis uniformiter secundum tempora acceleratus, ostendit Galilaeus describi parabolam. Si motus BB uniformiter secundum loca retardetur, ut fit in fictione, velut cum globus movetur super tapete, et interim tabula cum tapete et globo in eo currente uniformiter transferatur, demonstravi ego lineam logarithmicam a globo describi. Sed talia nunc prosequi non est praesentis instituti.

Propositio 6.

Si mobile feratur motu composito ex rectilineis uniformi et alterius legis, describet lineam, in qua ex data progressione abscissarum habetur progressio ordinatarum, ut in dicta lege ex data progressione temporum habetur progressio spatiorum.

Ut si (fig. 171) spatia AB a puncto B percursa crescant Geometrica progressione, dum tempora per rectas AC repraesentata crescant progressione Arithmetica; manifestum est in motu composito lineam MM logarithmicam describente abscissas AC esse ut tempora, ordinatas CM (seu AB) ut spatia a puncto mobili M percursa.

Propositio 7.

Quaevis linea curva motu composito ex duobus vel tribus, circularibus, vel rectis et circularibus describi potest.

Sit (fig. 172) immobile punctum C, circa quod in eodem (si placet) plano moveatur recta rigida CA, describens arcum circuli $_1A_2A$, et interim circa A moveatur recta indefinita AB. Sit linea curva terminata quaecunque $_1M(_2M)$ data, et datum punctum M in recta AB, cujus ab A distantia data AM, modo ea sufficientis sit magnitudinis, ut a quovis puncto circuli AA ad curvam $_1M(_2M)$ pertingere possit. His positis manifestum est, dato quocunque curvae MM puncto ut $(_2M)$ datoque situ rectae CA ut C_2A, posse dari situm ipsius AB, nempe $_2A(_2B)$ talem, ut punctum M cadat in locum assignatum $(_2M)$. Et ita data circulatione ipsius CA circa C, investigari potest, qualis debeat esse circulatio ipsius AB circa A, ut punctum M salva distantia sua ab A describat curvam datam $_1M(_2M)$. Quodsi linea $_1M_2M$ ad infinitam distantiam continuetur, res obtineri non potest, nisi M in recta infinita AB progredi possit. Si curva non sit in plano, tres motus inter se componi possunt, ut si manente motu ipsius AC circa axem CA in plano ad paginam verticali, ut scilicet perveniatur ad punctum in sublimi curvae alicujus datae.

Propositio 8 et Definitio.

Velocitates circulantium sunt in ratione composita vertiginum et radiorum circularium. Vertigo autem est velocitas angulos absolvendi.

Sit (fig. 173) linea infinita ABC ita mota circa punctum immotum A, ut quodvis ejus punctum, ut B vel C, circuli arcum describat, idemque intelligatur in alia recta infinita LMN; erit Vertigo in tota linea infinita, Velocitas scilicet angulum absolvendi. Et posito motu uniformi, erunt vertigines reciproce ut tempora periodica; posito autem aequali tempore, quo verbi gr. recta ABC absolvit angulum $_1BA_2B$, et recta LMN angulum $_1ML_2M$, in motu uniformi erunt anguli ut vertigines, seu vertigo rectae ABC ad vertiginem rectae LMN, ut angulus $_1BA_2B$ ad angulum $_1ML_2M$. Hinc cum velocitates aestimentur motu uniformiter continuato per tempora aequalia, vertigines per angulos uniformiter percurrendos aestimabuntur, etsi motus uniformis non sit, eruntque ut anguli elementares aequalibus temporum elementis percursi. Porro in punctis C et N aeque distantibus a suis centris (si AC sit aequalis ipsi LN) patet, ipsas circulandi velocitates esse ut vertigines; nam arcus aequalium circulorum sunt ut anguli. Jam circulationes punctorum ejusdem rectae sunt ut radii, seu distantiae a centro, verbi gr. velocitas ipsius B est ad velocitatem ipsius C, ut AB ad AC. Hinc jam sequitur, *circulationes* seu circulandi velocitates esse in ratione composita vertiginum et radiorum. Nam velocitas ipsius B est ad velocitatem ipsius C, ut AB ad AC, et velocitas ipsius C ad volocitatem ipsius N (posito AC et LN esse aequales) est ut vertigo rectae ABC ad vertiginem rectae LMN, et velocitas ipsius N est ad velocitatem ipsius M, ut LN (id est AC) ad LM. Ergo velocitas ipsius B est ad velocitatem ipsius M in ratione composita ex ratione AB ad LM, radiorum et ratione vertiginum.

Propositio 9.

Si eadem recta rigida mobilis simul habeat plures vertigines circa plura centra in ipsamet sumta, assignari in ea potest unum centrum, circa quod revera recta circulatur circulatione una aequivalente pluribus illis compositis.

Ponamus (fig. 174) rectam aliquam rigidam LGABHM eodem tempore impelli normaliter aequalibus nisibus contrariis in eodem plano ab oppositis partibus, ut nisibus ab FG et CH, utique eatenus vertiginem haec recta concipiet circa punctum A medium inter G et H. Si jam eadem praeterea recta impellatur duobus nisibus aequalibus oppositis DE et TV, eatenus vertiginem concipiet circa punctum B medium inter E et V; ajo ex duabus istis circulationibus compositis oriri novam circa punctum aliquod S, et tam gradum vertiginis quam centrum S ex datis assignari posse. Sumatur punctum L in recta; id quatenus conatur circulari, conatur in tangente circuli, id est perpendiculari ad rectam in L. Conatus ergo ambo componentur inter se, ita ut sit conatus compositus ut LP composita ex LN et NP, quae repraesentet conatus componentes, LN conatum circa A, NP conatum circa B, posito (si placet) ambos conatus circulandi tendere ad easdem partes. Idemque sit ab altera parte in puncto M, ut MQR repraesentet conatum compositum ex MQ circa A, et QR circa B. Videamus an inveniri

possit constans punctum L, circa quod circulandi prodeant conatus LP et MR.

Vertigines circa puncta A, B, S designemus per has ipsas literas (A), (B), (S), totidem rectarum vertiginibus proportionalium significatrices. Velocitates autem circulandi circa puncta A, B, S designantur in L per rectas LN, NP, LP; et in M per rectas MQ, QR, MR. Sunt autem per praecedentem velocitates circulandi in ratione composita vertiginum et radiorum, et erit (verbi gr.) LN ad NP, ut LA . (A) ad LB . (B). Itaque sunt rectae LN, NP, LP, ut rectangula, ut LA . (A), LB . (B), LS . (S). Et similiter MQ, QR, MR, ut MA. (A), MB. (B), MS. (S). Jam LP aequal. LN + NP; et MR aequal. MO + QR. Ergo LS. (S) aequal. LA. (A) + LB. (B); et MS . (S) aequal. MA . (A) + MB . (B). Ergo LS + SM (seu LM) in (S) aequal. LA + AM (seu LM) in (A) + LB + BM (seu LM) in (B), id est, fit (S) aequal. (A) + (B), seu vertigo circa S aequatur summae (aut si contrariae sint vertigines componentes, differentiae) vertiginum circa A et B.

Jam si L et A coincidant, itemque M et B, evanescent LA et MB, fietque LB aequal. MA, hoc est AB; itaque cum esset LS . (S) aequal . LA . (A) + LB . (B), et MS . (S) aequal. MA . (A) + MB . (B), fiet inde AS . (S) aequal. AB . (B) et BS . (S) aequal. AB . (A), id est fiet AS ad BS, ut (B) ad (A), seu ad inveniendum centrum novum S debet esse AS ad BS, ut vertigo circa B ad vertiginem circa A, seu distantiae centrorum A et B a centro novo S reciproce ut vertigines circa praedicta centra.

Cumque tam vertiginem quam centrum independenter a puncto quovis ut L vel M tandem determinaverimus, patet idem centrum constans S eandemque vertiginem esse pro puncto rectae quovis, adeoque revera rectam circulari circa S vertigine inventa. Hinc patet, etsi recta LM quotcunque habeat simul circulandi conatus circa centra quotcunque, non nisi una circulatione simplice circa unum centrum moveri, cum duae componant novam, et haec cum tertia rursus novam, et ita porro.

Idem longius provehi potest, ut si (fig. 175) in plano duo centra A et B vertiginum componentium non cadant in eandem rectam cum puncto L, quod vertigine composita moveri debet, manifestum est, duos esse nisus puncti mobilis L, unum in recta LK perpendiculari ad AL, alterum in recta LN perpendiculari ad BL, quae sunt inter se ut circulationes; et nisus compositus exhibebitur recta LP aequali ipsam NK bisecante diagonali parallelogrammi completi (per prop. 2), et tunc angulo PLS recto ducta LS secans AB (si opus productam) in S dabit centrum S. Quod et sic determinari poterit, ut S sit unum ex punctis L, sed tale, ut ipsi nisus compositi producant quietem; debet enim S vi circulationum compositarum quiescere, ut fiat centrum reliquorum. Hoc autem fieri non potest, nisi puncta K, L, N cadant in directum, et LN, LK sint aequales atque in contrarias partes. Igitur eadem recta LN vel LK debet esse normalis tam ad AL, quam ad BL, quod fieri non potest, nisi hoc L quod quiescere debet, id est S, cadat in eandem rectam cum ipsis A et B. Rursus ut SN et SK sint aequales, ideo cum sint ut circulationes, id est in ratione composita vertiginum et radiorum, erunt radii seu distantiae ipsorum priorum centrorum A et B a novo centro S reciproce ut vertigines, ut supra. Et quia debent nisus esse contrarii, hinc sequitur, si vertigines datae sint ad partes easdem, cadere S inter A et B; sin ad partes sint contrarias, cadere extra.

Hoc novum componendarum circulationum genus, ita ut centra plura sint in ipso mobili, longe diversum ab eo quod prop. 7 exposuimus, et potius nisuum quam motuum, vel ideo memorabile est, quod ita innumerae circulationes compositae producunt novam, secus ac regulariter fit in prop. 7, et respondet haec compositio conatuum circularium compositioni conatuum rectilineorum, qui quotcunque sint novum conatum rectilineum componunt.

Propositio 10.

Rigidi motus magneticus (id est ubi recta quaevis manet suis vestigiis parallela) est aequidistributus et aequidirectus, et quodlibet punctum describit lineam lineae ab alio quovis puncto eodem tempore descriptae congruentem.

Ut si (fig. 176) terrella Magnetica ABCD moveatur utcunque, veluti (si placet) sic ut centrum ejus E describat lineam circularem circa centrum aliquod F, et interea (ex natura magnetismi) ejus axis BD semper sibi maneat parallelus, adeoque polis suis B et D respiciat easdem plagas, necesse utique est, ut et quaelibet alia recta in terrella ducta maneat suis vestigiis parallela, quoniam rectae eae quae axi BD in rigido ABCD parallelae sunt, semper manent parallelae, ergo et sibi, et quae rectae ad has angulos

quoscunque faciunt, eosdem in rigido retinent, ideoque itidem sibi parallelae manent. Hinc jam necesse est, et lineas a punctis ut E et D simul descriptas, per omnia esse similes et aequales, seu congruas, unde motum quoque in mobili tam aequidirectum quam aequidistributum esse sequitur. Ac proinde posito (exempli causa) centrum terrellae describere lineam circularem, quodlibet punctum terrellae lineam circularem describet.

Hoc ut appareat, sufficit ostendere, si recta aliqua ED suis vestigiis parallela feratur et uno puncto E per aliquam lineam EE incedat, eam quovis alio D lineam DD priori congruam describere. Unde idem de quovis mobilis rigidi puncto sequitur, quod cum alio quovis per rectam connectitur, quae utique suis vestigiis parallela manet. Sit aliquod lineae EE punctum G, et respondens alterius lineae DD punctum H, ita scilicet ut recta ED translata in GD puncto E incidat in G, et puncto D in H. Sunt ergo rectae $_1ED$ et GH aequales et parallelae, adeoque in parallelogrammo $_1EDHG$ etiam $_1EG$ est aequalis ipsi $_1DH$; et eodem modo $_2EG$ est aequalis ipsi $_2DH$. Itaque quodvis punctum lineae DD eodem modo a duobus punctis $_1D$, $_2D$ in ea sumtis distat, ut quodvis punctum respondens lineae EE a duobus punctis $_1E$, $_2E$, quae tantundem inter se distant, quantum $_1D$ et $_2D$, quoniam ob aequales $_1EG$ ipsi $_1DH$, et $_2EG$ ipsi $_2DH$ aequalemque angulum $_1EG_2E$ angulo $_1DH_2D$, erit et recta $_1E_2E$ rectae $_1D_2D$ aequalis, itaque congruere possunt puncta $_1E$, $_2E$ ipsis $_1D$, $_2D$, et punctum quoque aliud quodcunque ut H puncto respondenti G simul congruere poterit, adeoque linea lineae.

Propositio 11.

Si puncta quotcunque moveantur in rectis parallelis etiam centrum gravitatis eorum (nisi quiescat) movebitur in recta ipsius parallela, et si motus punctorum sit praeterea uniformis vel in omnibus proportionaliter acceleratus aut retardatus, tunc etiam motus centri gravitatis erit talis.

Punctum A (fig. 177) feratur in recta AA, et punctum B in recta BB priori parallela; ajo et centrum gravitatis eorum C ferri in recta CC, eaque prioribus perallela.

Ut si eodem tempore respective sint A in $_1A$, $_2A$, $_3A$, et B in $_1B$, $_2B$, $_3B$, et C in $_1C$, $_2C$, $_3C$, sitque AAA et BBB recta, erit et

CCC recta. Patet ex eo, quod recta CC parallela duabus AA et BB secat quascunque rectas AB inter has duas interceptas, ut ${}_1A_1B$, ${}_2A_2B$, ${}_3A_3B$, in eadem ratione data. Ducantur enim per B parallelae inter se BE, hae utique secantur a recta CF in eadem ratione data in F; jam per eandem rectam CF secatur AB in C, ut BE in F; ergo ut omnes BE secantur in eadem ratione in F, ita et omnes AB secantur in eadem ratione in C. Jam centrum gravitatis C secat AB in eadem ratione, cadit ergo in rectam CC parallelam ipsis AA et BB.

Quodsi (fig. 178 et 179) puncta A et B moveantur motu uniformi vel saltem proportionaliter crescente, seu sit ${}_1A_2A$ ad ${}_1A_3A$, ut ${}_1B_2B$ ad ${}_1B_3B$, tunc ductae rectae AB (ut ${}_1A_1B$, ${}_2A_2B$, ${}_3A_3B$) concurrent in puncto G; est igitur et ${}_1C_2C$ ad ${}_2C_3C$, ut ${}_1A_2A$ ad ${}_2A_3A$, vel ut ${}_1B_2B$ ad ${}_2B_3B$, ob triangula similia G_1B_2B, G_1C_2C, G_1A_2A; itemque similia G_2B_3B, G_2C_3C, G_2A_3A. Porro quod de punctis duobus A, B verum est, id verum est de punctis quotcunque ut A, B, D, eodem argumento, si pro duobus A, B centrum eorum commune C substituatur, quod cum moveatur in linea recta ipsis lineis AA, BB parallela (ex demonstratis) et moveatur praeterea punctum novum D in linea recta ipsis parallela utique, centrum gravitatis commune punctorum C et D movebitur in linea recta ipsis parallela, id est centrum commune gravitatis punctorum A, B, C. Et ita porro argumentum producetur ad puncta quotcunque rectas parallelas describentia. Etiamsi quiescat centrum gravitatis, quod fit cum utrinque contrarii punctorum motus compensantur, tamen intelligi potest centrum gravitatis moveri secundum leges propositionis, motu licet inassignabili seu summe tardo, qui quacunque proportione variatus manet inassignabilis. Unde generaliter verum est, punctis motis in rectis parallelis velocitatibus punctorum proportionalibus, etiam centrum gravitatis sic moveri.

Propositio 12.

Si puncta gravitatis quotcunque cujuscunque gravitatis moveantur in rectis parallelis, describetur a centro gravitatis communi recta, quae ducta in pondus aggregatum omnium punctorum aequatur summae ex viis rectis singulorum punctorum in suorum punctorum pondera ductis, si quidem omnia puncta tendant in easdem partes; quodsi aliquod tendat in partes contrarias, ejus via in pondus puncti ducta non addenda, sed detrahenda est. Et si viam puncti in pondus ductam vocemus Progressum, tunc progressus ponderis integri secundum centrum gravitatis generaliter erit summa progressuum punctorum singulorum vel differentia.

Si (fig. 180) duo sint puncta aequalis ponderis A et B, quorum viae rectae ${}_1A_2A$, ${}_1B_2B$ sint parallelae et in easdem partes, patet viam centri seu puncti medii seu rectam ${}_1C_2C$ duplicatam aequari summae ipsarum ${}_1A_2A$ et ${}_1B_2B$. Nam ducatur ${}_2AD$ parallela ipsi ${}_1A_1B$ secans ${}_1C_2C$ in E, et ${}_1B_2B$ in D, patet ${}_1CE$ (aequalem ipsi ${}_1A_2A$ vel ${}_1BD$) duplicatam summae earum aequari et E_2C duplicatam aequari residuo ipsius ${}_1B_2B$, nempe ipsi D_2B. Quodsi puncta sint inaequalia, verbi gr. A duplum ponderis ipsius B, idem locum habebit, nam B (C) erit dupla ipsius A (C). Ergo E_2C est tertia pars ipsius D_2B seu ipsius D_2B sumtae semel, et $({}_1C)$ (E) est tertia pars ipsius ${}_1A_2A$ sumtae bis (pro ratione ponderis) et ipsius ${}_1B_2B$ sumtae semel. Ergo $({}_1C)$ $({}_2C)$ via centri est tertia pars viae ipsius A sumtae bis, et viae ipsius B sumtae semel. Atque idem succedit, quaecunque sit proportio ponderum duorum punctorum. Sed si (fig. 181) motus sit in contrariam partem, ut si motus ipsius A sit ${}_1A_2A$, et motus ipsius B contrarius ${}_1B_2B$, et ducatur per ${}_2A$ ipsa ${}_2AD$ parallela ipsi ${}_1A_1B$, et centri via sit ${}_1C_2C$, quae si opus producta occurrat ipsi ${}_2AD$ in E; patet ${}_1CE$ esse tertiam partem duplae ${}_1A_2A$ et simplae ${}_1BD$ (cum hae tres rectae sint aequales) et E_2C esse tertiam partem ipsius D_2B simplae; ergo ${}_1C_2C$, id est ${}_1CE$ minus E_2C, id est tertia pars compositi ex bis ${}_1A_2A$ et semel ${}_1BD$ minus tertia parte ipsius D_2B seu compositi ex ${}_1BD$ et ${}_1B_2B$ est tertia pars ipsius ${}_1A_2A$ minus semel ${}_1B_2B$. Itaque via contraria tantum subtrahenda est, caeteris ut ante factis. Idem est in aliis proportionibus punctorum A et B quibuscunque, et quod de duobus punctis dictum est, producitur ad puncta quotcunque, si pro duobus centrum substituatur, quod pondere amborum oneratum suo tractu duorum progressibus aequivalet, ut hic ostendimus; unde jam cum tertio prodit via centri novi omnium trium, et ita porro.

Propositio 13.

Si puncta quotcunque moventur motibus aequidirectis, centrum gravitatis commune itidem movebitur motu aequidirecto; et summa progressuum vel (ubi in partes contrarius itur) differentia erit aequalis progressui ponderis totius secundum viam centri gravitatis. Et si praeterea motus punctorum sint uniformes vel saltem inter se proportionales, etiam motus centri gravitatis erit uniformis vel prioribus motibus proportionalis.

Si punctum A (fig. 182) describat lineam quamcunque AA, et B quamcunque BB, ita tamen ut eodem tempore directiones seu linearum tangentes sint parallelae, ut in ${}_1A$ et ${}_1B$, in ${}_2A$ et ${}_2B$, in ${}_3A$ et in ${}_3B$, et ita in caeteris, etiam centrum eorum C lineam describet CC motu aequidirecto, seu ut directiones in ${}_1C$, ${}_2C$, ${}_3C$ sint prioribus respondentibus parallelae. Hoc patet ex praecedenti, si pro lineis curvis polygona adhibeantur minus errore assignato a curvis differentia, ita ut et respondentia latera polygoni sint parallela, et eodem tempore absolvantur.

Propositio 14.

Si mobile quodcunque (rigidum vel fluidum, continuum vel discretum) moveatur motu aequidirecto (hoc est ut omnia puncta eodem tempore directionibus parallelis ferantur), Centrum quoque gravitatis ejus (etiamsi caderet extra mobile) movebitur motu aequidirecto ad priores motus, et factum ex ductu ponderis integri in viam centri erit progressus totius mobilis seu aequabitur summae (vel ubi contraria directio est, differentiae) progressuum punctorum vel partium. Idem est si puncta quaedam vel partes durante tempore nunc quiescant nunc moveantur.

Quoniam scilicet progressum totius intelligimus nihil aliud esse quam summam viarum cujusque puncti in puncta, vel si ea inaequalia sunt, horum pondera ductarum, eodem modo ac explicatum est (in capite de Ductibus) pondus integrum gravis oriri ex punctorum gravitatibus specificis in puncta ordinatim ductis. Huic autem summae productorum ex unaquaque via in sui puncti pon-

dus ducta factorum aequatur factum ex aggregato ponderum in viam centri (per prop. 2). Unde idem de summa omnium punctorum, hoc est extenso quocunque, quod ex punctis, id est partibus quantaevis parvitatis, ut error dato minor fiat, componitur, locum habet.

Idem prodibit, si pro punctis mobilia in globos vel circulos resolvamus continue inscriptos donec residuum sit minus dato, modo progressum globi vel circuli, ita moti ut puncta ejus omnia simul describant rectas aequales et parallelas in easdem partes, aestimemus via unius puncti, velut centri, in molem seu pondus ipsius circuli vel globi ducta, tanquam totum pondus reductum esset in centrum; et ita quod de centris, idem de partibus verum est, et progressum compositi aestimemus summa progressuum quos habent partes. Caeterum quod de motibus rectilineis, idem de aequidirectis etiam curvilineis ostenditur, motus aequidirectos in rectilineos parallelos assignatis minores resolvendo. Quod autem diximus, idem succedere si puncta quaedam vel partes durante tempore nunc quiescant nunc moveantur, ex eo manifestum est, quod pro quiete substitui potest motus, cuivis motui parallelus et proportionalis, sed tantae tarditatis, ut error fiat dato minor. Itaque quiescentia etiam sub ipsis motis comprehendi possunt salva conclusione.

Propositio 15.

Si mobile moveatur motu aequidirecto in easdem partes, et unum punctum non succedat in alterius locum, viae autem punctorum eosdem semper et ubique ad mobile angulos faciant, erit via ipsius mobilis seu figura motu ejus generata aequalis figurae factae ex motu mobilis in viam centri gravitatis eodem angulo ducti. Nihil autem refert, utrum mobile sit rigidum, an flexile aut fluidum, continuum vel discretum. Et idem succedit, si aliqua puncta aut aliquae partes quiescant, aut modo quiescant modo moveantur, dummodo motus sit dictus.

Tale mobile non potest esse solidum. Neque enim hoc moveri potest, quin punctum ejus quodlibet in superficie ipsa non positum, alteri succedat. Erit igitur superficies, vel linea. Et si linea sit, potest resoluta intelligi in latera rectilinea, et superficies