SECTIO QUARTA.

DE VELOCITATE DIFFORMI.

Caput I.

De Tractu seu spatio per motum absoluto.

Definitio 1. Tractus ipsius mobilis vel spatium absolutum sive percursum, est factum ex viis singulorum mobilis punctorum simul descriptis, in mobile ordinatim ductis.

Ut si mobilis cujusque punctum ponatur gravitatem specificam accipere proportionalem viae, pondus totius mobilis erit ut summa omnium viarum in mobile ordinatim ductarum, hoc est, ut spatium percursum seu tractus. Ita si (fig. 101) recta AB angulo ad ${}_1B_3B$ recto moveatur ex ${}_1A_1B$ in ${}_3A_3B$, spatium motu dimensum seu tractus est rectangulum ${}_1A_3B$; et idem hoc loco est spatium motu designatum seu vestigium motus. Sed si rectangulum planum ABCD intra rectas ${}_1A_1D$, ${}_1B_1C$ continuatas motum transferatur ex ${}_1A_1B_1C_1D$ in ${}_3A_3B_3C_3D$, vestigium motus seu via simplex est rectangulum planum ${}_1A_3C$; via autem plena seu tractus est factum ex rectangulo ABCD ducto in rectam ${}_1A_3A$ aequalem lineae motus seu viae vel tractus cujusque puncti (in punctis enim coincidunt semper via et tractus), hoc est ut rectangulum solidum ACE (fig. 102) cujus basis est rectangulum planum ABCD, altitudo vero AE aequalis ipsi ${}_1A_3A$, vel etiam parallelepipedum; nam ad tractus quantitatem aestimandam nihil interest, quo angulo applicetur via puncti ad mobile; modo enim in omnibus tractibus inter se comparandis idem observetur angulus, eadem manet proportio; praestat tamen constanter uti angulo recto. Quodsi diversa mobilis puncta diversae magnitudinis lineas describunt, etiam tractus inveniri possunt; ut si (fig. 103) radius LM agatur circa centrum L, nec plus una circulatione absolvat, tractus erit ut ipse sector descriptus LMN, qui simul est via radii LM. Sed si recta AB in radio moto peculiariter moveatur recedens a centro, ita ut dum transit ab ${}_1A_1B$ in ${}_1\alpha_1\beta$, simul hinc transeat in ${}_2A_2B$, via est quadrilineum ${}_1A_1B_2B_3B_3A_2A_1A$. Sed tractus seu summa viarum omnium punctorum, huic viae non est proportionalis. Quatenus autem motus fit in parallelis, vel saltem quatenus motus in parallelis assumtis, utcunque in motus propositi compositionem ingredi intelligitur (ut suo loco patebit), habetur tractus, dum via centri gravitatis ipsius voluminis seu figurae ducitur in mobilis volumen sive extensionem (si modo puncta diversa non eant in contrarias partes). Sed hoc quod ad viam mobilis metiendam non sufficit, nisi cum coincidit cum tractu, quod fit cum lineae a punctis mobilis descriptae eundem semper faciunt angulum ad curvam, nec una mobilis pars in locum alterius statim succedit. Porro si sphaera rotetur uniformi vertigine (si placet) circa suum axem immotum, tractus sphaerae erit ut pondus sphaerae, quod fieret, si quodlibet ejus punctum gravitatem specificam acciperet viae a se percursae proportionalem; unde si duae sphaerae sic rotentur, erunt earum tractus inter se in ratione composita ex quadruplicata diametrorum simplicibusque vertiginum et temporum. Vertiginem autem metior quantitate anguli descripti, si circulandi velocitas eadem dato tempore continuaretur. Ex his intelligimus, quantum intersit inter tractum (seu spatium absolutum) et viam, etsi aliquando tractus sint ut viae.

Propositio 1.

Si mobilis gravitas specifica in quovis puncto sit ut via ejusdem puncti, tunc spatium a mobili absolutum erit ponderi proportionale.

Nam tractus seu spatium absolutum fit ex viis punctorum in mobile ordinatim ductis (per defin. hic). Sed ductus sunt ut pondera mobilium; si ordinatim ductae sint ut gravitates specificae, recipientia vero ductum ut mobilia (per prop. 1 cap. de ductibus).

Propositio 2.

Si mobile sit punctum, tractum seu spatium motu absolutum est ipsa puncti via.

Sequitur ex definitione, nam singula puncta ad unicum reducuntur, et viae ad unicam, scilicet ipsam hujus puncti lineam.

Propositio 3.

Si mobile sit linea, spatium motu absolutum est ut area superficiei factae per rectas viae cujusque puncti proportionales, ipsi lineae in rectum extensae eodem angulo recto in puncto respondente insistentes.

Cum enim tractus sit ductus factus ex lineis a puncto descriptis in mobile ordinatim ductis (per defin. hic) et ductus sint proportionales figuris isogoniis proportionaliter formatis (per prop. 6 et 7 cap. de ductibus), habetur propositum.

Sit (fig. 104) linea mobilis ABC, cujus extrema A et C describant lineas ${}_1A{}_2A{}_3A$ et ${}_1C{}_2C{}_3C$, et punctum quodvis ut B describat lineam ${}_1B{}_2B{}_3B$, fiat figura orthogonia comprehensa recta ${}_3A{}_3B{}_3C$ et rectis ad hanc normalibus ${}_3ADG$, ${}_3CFK$ et linea GHK, sic ut ordinata quaevis normalis ipsi ${}_3A{}_3B{}_3C$ sit ${}_3BEH$, et viis punctorum ${}_1A{}_2A$, ${}_1B{}_2B$, ${}_1C{}_2C$, itemque ${}_1A{}_2A{}_3A$, ${}_1B{}_2B{}_3B$, ${}_1C{}_2C{}_3C$ sint respective proportionales ordinatae ${}_3AD$, ${}_3BE$, ${}_3CF$, itemque ${}_3ADG$, ${}_3BEH$, ${}_3CFK$; et idem fiat respectu alterius mobilis LMN pro punctis D, G, E, H, F, K substituendo P, S, Q, T, R, V; ajo tractus seu spatia absoluta fore figuris orthogoniis respondentibus proportionalia. Sic tractus ab ${}_1A{}_1B$ in ${}_2A{}_2B$ est ad tractum ab ${}_1A{}_1C$ in ${}_3A{}_3C$, ut figura ${}_3ADE{}_3B$ ad ${}_3AGK{}_3C$; et tractus ab ${}_1A{}_1C$ in ${}_2A{}_2C$ ad tractum ab ${}_1L{}_1N$ in ${}_2L{}_2N$, ut figura ${}_3ADF{}_3C$ ad ${}_3LPR{}_3N$; et tractus ab ${}_1A{}_1C$ in ${}_3A{}_3C$ ad tractum ab ${}_1L{}_1N$ in ${}_3L{}_3N$, ut figura ${}_3AGK{}_3C$ ad figuram ${}_3LSV{}_3N$. Pro orthogoniis substitui possunt figurae isogoniae quaevis, modo in omnibus ordinatim applicatis semper idem angulus servetur. Nec refert, linea curva durante motu in rectam extendatur, an sit rigida, modo in rectam extendi deinde fingatur.

Propositio 4.

Si mobile sit superficies, spatium motu absolutum est area solidi facti per rectas superficiei in planum extensae ad angulos rectos insistentes in punctis respondentibus, et ipsis lineis a puncto quovis mobilis descriptis proportionales.

Patet ad eum modum, quo praecedens.

Propositio 5.

Omnis superficies mota constituitur ex infinitis lineis, quarum quaevis movetur motu aequaliter distributo; et omne corpus motum constituitur ex infinitis superficiebus, quarum quaevis movetur motu aequaliter distributo.

Constitui dico, non componi. Sequitur ex demonstratione prop. 12 de ductibus.

Sic si (fig. 105) cylinder L moveatur circa centrum C, constituitur ex infinitis superficiebus cylindricis concentricis ut L, M, N, quarum quaevis movetur motu aequaliter distributo, ita nempe ut ejus puncta simul aequales percurrant rectas. Manifestumque est ab ipsis omnia solidi puncta absumi praeterquam cadentia in axem, quae nihil solido homogeneum constituunt.

Propositio 6. Problema 1.

Exhibere figuram planam proportionalem tractui mobilis solidi.

Quoniam solidum constituitur ex infinitis superficiebus, quarum quaevis movetur motu aequaliter distributo (per praeced.), dividi per eas intelligatur in sua elementa solida. Inde ducatur linea quaecunque omnes superficies secans, et hujus in rectum extensae punctis respondentibus, inter superficies interceptis, ordinatim applicetur in plano recta, quae sit in ratione composita ex directis rectae ab uno superficiei puncto descriptae ipsiusque elementi solidi et in ratione reciproca elementi lineae, inter superficies duas proximas intercepti; et tunc figura isogonia producta erit spatio a mobili absoluto proportionalis.

Constructio haec est casus soluti problematis generalis de ductibus prop. 12. Ut si (fig. 106) superficies motum aequaliter distributum habentes, in quas resolvitur solidum motum, sint L, M, N et eas secet linea LMNC, quae extendatur in rectam $\lambda\mu\nu\varkappa$, et huic in punctis λ, μ, ν applicentur normales λE, μF, νG, sintque inter se duae quaecunque exempli gratia $\lambda\varepsilon$ ad μF in ratione composita modo dicto seu ita ut rectangulum elementare $E\lambda\mu$ ad aliud $F\mu\nu$ sit in ratione composita elementi solidi LMA ad elementum solidum MNB et rectae P ad Q, id est lineae a puncto L descriptae, ad lineam a puncto M simul descriptam; erit figura $\lambda EF\varkappa$ proportionalis tractui ipsius solidi, sive cum alterius solidi tractu eadem proportione repraesentato comparetur, sive partibus tractus ejusdem solidi, ita ut verbi gratia tractus partis solidi LN sit ad tractum totius solidi LC ut figura $\lambda EG\nu$ ad figuram $\lambda EG\varkappa$.

Propositio 7.

Spatium absolutum motu aequaliter distributo est factum ex ductu mobilis in lineam ab aliquo mobilis puncto descriptam, sive est in ratione composita mobilis et lineae a puncto mobilis descriptae.

Sit (fig. 107) mobile AB, cujus punctum ut A describit rectam ${}_1A\,{}_2A$ aequalem rectae ${}_1B\,{}_2B$, quam simul describit quodvis aliud punctum B; idemque intelligatur in mobili LM; ajo esse tractum ipsius AB ad tractum ipsius LM in ratione composita AB ad LM et ${}_1A\,{}_2A$ ad ${}_1L\,{}_2L$. Patet ex prop. 3 de ductibus, cum tractus sit factus ex ductu mobilis in lineas a punctis suis descriptas ordinatim applicatas, quae hoc loco sunt aequales; idem est ergo ac si fit tractus ex mobili in rectam constantem.

Propositio 8.

Tractus rectarum circa extrema immota circulos describentium sunt in duplicata ratione rectarum seu diametrorum.

Sint (fig. 108) rectae CL, CM; ajo tractum C_1L_2LC esse ad tractum C_1M_2MC, ut quadratum CL ad quadratum CM. Sunt enim per pracedentem, ut rectangulum sub CL in ${}_1L_2L$ ad rectangulum sub CM in ${}_1M_2M$; est autem ${}_1L_2L$ ad ${}_1M_2M$, ut CL ad CM; ergo sunt ut quadrata CL ad CM.

Propositio 9.

Circulorum (aut cylindrorum ejusdem altitudinis) horumve sectorum circa suos axes revolutionem absolventium aut eosdem angulos efficientium tractus sunt in triplicata ratione diametrorum (intelligo autem rigidos esse, seu ad instar rigidorum motos).

Sit (fig. praeced.) circulus aut cylinder AL circa axem C revolutionem ${}_1L_2L_3L_1L$ absolvens, et alius BM (cylinder ejusdem altitudinis cum ipso AL) circa axem C; ajo esse tractum ipsius AL, ad tractum ipsius BM, ut cubus AL ad cubum BM. Nam punctis M, L rectae CL (radii circuli) applicentur normales MN, LP, ita ut sit MN ad LP in ratione composita circumferentiae ${}_1M_2M_3M$ ad circumferentiam ${}_1L_2L_3L$, itemque spatii, quod describit M, ad spatium, quod L, id est iterum circumferentiae ad circumferentiam, id est in ratione duplicata circumferentiarum seu diametrorum, erit figura LPNC proportionalis tractui, per constructionem problematis in prop. 6. Sed trilineum parabolicum MNC (cujus vertex C et tangens verticis MC) est ad trilineum parabolicum LPC in triplicata ratione CM ad CL. Ergo tractus circuli BM est ad

tractum circuli AL (idemque est in cylindris aequealtis), ut cubus diametri BM ad cubum diametri AL.

Propositio 10.

Tractus sphaerarum rigidarum eosdem revolutionis angulos (vel integram revolutionem) absolventium sunt in quadruplicata ratione diametrorum.

Demonstratur eodem modo, cum sphaera resolvatur in superficies concentricas motus aequaliter distributi, quae sunt in duplicata ratione diametrorum, et tractus earum in triplicata diametrorum, et adeo summae tractuum seu tractus integer sphaerae in quadruplicata.

Definitio 2. Longitudo percursa vel spatii absoluti seu longitudo tractus est longitudo lineae, quae ducta in volumen mobilis dat tractum. Itaque spatia percursa sunt in ratione composita voluminum mobilis et longitudinum percursarum.

Itaque si mobile sit linea vel superficies, repraesentabitur tractus per rectangulum, cujus altitudo sit ipsa longitudo tractus, basis sit linea vel superficies mobilis in rectam vel planam extensa. Quodsi mobile sit solidum, poterit ei exhiberi planum proportionale, quod in longitudinem percursam ductam repraesentet tractum.

Propositio 11.

Longitudo tractus in motu uniformiter distributo est longitudo lineae a quocunque puncto descriptae.

Nam cujusvis puncti linea in mobile ducta dat tractum (per prop. 8), ergo ejus longitudo est longitudo tractus per defin. 2.

Gravitas specifica unius puncti eadem est, quae gravis ubique eandem gravitatem specificam habentis. Est scilicet longitudo tractus id ipsum, quod in cap. de motu aequidistributo et ejus velocitate appellavimus longitudinem motus, et utrobique longitudinem percursam.

Propositio 12.

Longitudo tractus in motu dato quocunque est longitudo viae a puncto quovis ejusdem vel aequalis mobilis dato motu aequaliter distributo aequalem tractum faciente moti.

Nam longitudo viae puncti in motu uniformiter distributo est longitudo tractus mobilis (per prop. 11). Jam tractus iste est aequalis dato (ex hypothesi), et positis tractibus aequalibus et mobilibus iisdem vel aequalibus, et longitudines tractuum sunt aequales (per defin. 2). Ut si grave varias in variis locis gravitates specificas habeat et quaeratur aliud grave ejusdem voluminis ejusdemque ponderis similare seu eandem ubique habens gravitatem specificam, ea erit ipsa gravitas (media) gravis propositi, respondens longitudini tractus seu spatii percursi.

Propositio 13. Problema 2.

Exhibere figuram planam mobili superficiei vel solido rigido positione dato proportionalem, et cujus pariterque partium ejus circa axem immotum gyratarum tractus sint ipsius mobilis aut partium ejus circa eundem axem gyratarum tractibus proportionales.

Transferatur huc figura et constructio ad prop. 16 de ductibus, sumaturque MN non ut illic praescribitur, sed proportionalis sectioni mobilis per superficiem cylindricam, et figura plana ANP erit quaesita, ut consideranti patet.

Propositio 14. Problema 3.

Exhibere figuram tractui mobilis circa axem immotum gyrati proportionalem.

Si figuram planam postulamus, tantum in praecedenti figura et constructione sumamus MN tales, ut sint in ratione composita sectionum et distantiarum superficiei ab axe, et figura ANP erit quaesita. Sin solida simus contenti, fiat cylinder rectus, cujus basis figura ANP constructa secundum problema praecedens, altitudo vero sit non minor maxima MN, et per axem EQ transeat planum, quod ad planum AQE angulum faciat semirectum, et ungula per C prius planum abscissa seu portio cylindri inter plana duo et superficiem cylindri comprehensa erit solidum quaesitum.

Propositio 15. Problema 4.

Motum rectilineum adeoque uniformiter distributum dati mobilis rigidi invenire, cujus tractus sit tractui ejusdem mobilis circa datum axem immotum gyrantis aequalis, seu invenire longitudinem hujus tractus.

Figurae ANP constructae secundum probl. 2 (seu propos. 16 de ductibus) insistat cylinder ungulae in probl. praeced. constructae aequalis; tum sumatur recta, quae sit ad altitudinem hujus cylindri, ut arcus ab aliquo mobilis puncto durante gyratione descriptus ad ejusdem distantiam ab axe; et mobile moveatur motu rectilinea, ita ut quodlibet ejus punctum rectam describat praedictae aequalem, is erit quaesitus; recta haec erit *longitudo tractus* per defin. 2.

Caput II.

De Velocitate in universum.

Definitio I. Velocitas in motu quocunque est affectio mobilis, quae est proportionalis longitudini, quam percurreret, si motus per datae magnitudinis tempus hac eadem mobilis affectione retenta continuaretur. Eadem autem maneret, si aequalibus temporibus aequales percurreret longitudines, quo casu motus dicitur aequivelox.

Hactenus non egeramus nisi de velocitate motus aequidistributi, ubi omnia corporis puncta aequali velocitate moventur. Operae tamen pretium fuit notionem altius nunc attollere et generalius concipere velocitatem, ut cuicunque mobili attribui possit, etiamsi ejus puncta diversas habeant celeritates; nempe in casu similaris corporis, velocitas ipsius erit media arithmetica inter omnium punctorum velocitates, qua in mobile similare ducta idem prodit impetus, ac si singulorum punctorum celeritates mobili ordinatim assignavissemus. Et quidem, si omnia puncta tendant ad easdem partes, velocitas mobilis erit ipsa *velocitas centri gravitatis*, ut suo loco patebit distinctius infra. Quemadmodum autem supra dimensi sumus velocitatem aequidistributam per longitudinem motus aequivelocis, ita nunc metimur velocitatem quamvis per eandem longitudinem motus aequivelocis, sed elevatae (vel exaltatae) notionis ad motum etiam non aequidistributum, ut cap. de tractu est explicatum, seu longitudinem tractus, quaerendo scilicet pro longitudine percursa a mobili, longitudinem mediam arithmeticam inter omnium punctorum longitudines simul percursas. Quodsi haec ad exemplum applicemus, rectae verbi gr. in plano circa extremum immotum motae, aut semicirculi moti circa diametrum immotam, reperiemus velocitates duorum radiorum inter se, aut duorum semicirculorum inter se esse in ratione composita vertiginum et radiorum. *Vertigines* autem sunt ut velocitates punctorum a centro aequidistantium, seu ut anguli percursi motu uniformi intra aequale tempus.

Propositio 1.

Velocitates mobilium, quorum quodque constanti velocitate movetur, sunt inter se ut longitudines aequalibus temporibus percursae.

Sint mobilia A et B, quorum utrumque suam velocitatem servat, et A tempore T percurrat longitudinem L, at B tempore aequali ipsi T percurrat longitudinem M; ajo fore velocitatem in A ad velocitatem in B, ut L ad M.

Nam (per defin. praeced.) si velocitates suas retinerent, ipsae velocitates forent ut longitudines L et M; jam retinent eas (ex hypothesi), tales ergo erunt velocitates.

Propositio 2.

Coincidit velocitas motus aequidistributi secundum definitionem positam supra cap. de motu aequidistributo, et secundum definitionem velocitatis praesentem.

Nam longitudo percurrenda secundum defin. praesentem in casu motus aequidistributi est ut longitudo viae puncti alicujus in mobili sumti (per prop. 11 cap. de tractu), quae eodem modo in defin. superiore velocitatis motus aequidistributi adhibebatur, ut in proxima adhibetur longitudo percurrenda; neque aliud est definitionum discrimen.

Propositio 3.

Velocitas quaecunque aequalis est velocitati motus aequidistributi mobilis aequalis, eandem continuata per aequale tempus constanti velocitate aliquo sui puncto percursuri longitudinem, quam propositum continuata sua, adeoque etiam aequale percursuri spatium.

Sit (fig. 109) mobile AB motum etiam motu non-aequidistributo, et ponatur ejus velocitas talis in ${}_1A_1B$, ut (eadem velocitate manente) per tempus T sit motus ${}_1A_2B$, longitudo autem

motus hujus seu longitudo percursa (seu longitudo tractus explicata def. 2 cap. de tractu) sit linea ${}_1C_2C$; sit jam aliud aequale mobile vel idem ${}_2A_2B$ motum motu aequidistributo uniformi ${}_2A_3B$, a cujus puncto ${}_2C$ longitudo percursa per tempus aequale ipsi T sit ${}_2C_3C$: ajo velocitatem motus ${}_2A_3B$ esse velocitati mobilis AB in ${}_1A_1B$ existentis aequalem. Nam velocitas ipsius A_1B per ${}_1A_2B$ est ad velocitatem ipsius ${}_2A_2B$ per ${}_2A_3B$, ut longitudines aequalibus temporibus percurrendae velocitatibus aequalibus continuatis (per defin. praeced. velocitatis). Sed longitudo ab ${}_1A_1B$ percurrenda eadem velocitate intra tempus T est ${}_1C_2C$ (ex hyp.) et ${}_2C_3C$ est longitudo percursa a puncto ${}_2C$ mobilis ${}_2A_2B$ aequivelociter et aequidistribute moti (etiam ex hypothesi) et longitudo lineae a puncto mobilis aequidistribute moti descriptae est ipsa longitudo percursa (per prop. 11 cap. de tractu); erit ergo velocitas ${}_1A_1B$ ad velocitatem ${}_2A_2B$, ut ${}_1C_2C$ ad ${}_2C_3C$, quae cum sint aequales (ex hyp.), erunt etiam aequales velocitates. Idem est de spatiis, quod de longitudinibus, quia voluminibus aequalibus spatia percursa sunt ut longitudines (per def. 2 de tractu).

Si ponamus AB esse rectam, quae in plano eodem eadem velocitate servata gyretur circa centrum immotum E tempore T, erit tractus ejus seu spatium percursum hoc loco coincidens ipsi viae seu spatio generato sive per motum designato ${}_1A_2B$, parti scilicet sectoris ${}_1AE_2E$ contenti rectis ${}_1A_1B, {}_2A_2B$ et circulis ${}_1A_2A$, ${}_1B_2B$, quia lineae a punctis descriptae seu arcus angulum semper faciunt rectum ad AB describentem. Hic tractus autem seu area hujus spatii aequatur rectangulo ${}_2A_3B$ vel ${}_3A_2B$, contento sub recta AB id est extensione mobilis AB et rectae ${}_2A_3A$, si modo ${}_2A_3A$ sit aequalis ipsi ${}_1C_2C$ arcui descripto a puncto rectae AB medio C, seu ejus centro gravitatis; itaque longitudo ista arcus ${}_1C_2C$, seu rectae ${}_2A_3A$, est longitudo spatii percursi (per defin. 2 cap. de tractu). Si jam ponatur eadem recta porro ex ${}_2A_2B$ progredi motu rectilineo, adeoque aequidistributo, et quidem uniformi, ita ut describat rectangulum ${}_1A_2B$, tractus seu spatium erit ipsum rectangulum, et longitudo ejus erit recta percursa ab aliquo ejus puncto A vel C, ut ${}_1A_2A$ vel ${}_1C_2C$ (per prop. 1 dicti cap. de tractu). Unde patet et tractus et longitudines esse aequales, quae tempore aequali mobile uniformiter percurrit, sive motu aequidistributo ${}_2A_3B$, sive diverso in diversis punctis ut ${}_1A_2B$ percurrat, atque adeo et velocitates horum duorum motuum dici aequales.

Propositio 4.

Spatia a mobilibus suam velocitatem retinentibus tempore aequali percursa sunt in ratione composita voluminum mobilis cujusque et velocitatum.

Sint (fig. 110) mobilia AB, LM, quae temporibus aequalibus ipsi T moveantur velocitatibus suis V et E retentis, et percurrant spatia ${}_1A_2B$, ${}_1L_2M$; ajo esse spatia ${}_1A_2B$ ad ${}_1L_2M$ in ratione composita voluminum AB ad LM et velocitatum V ad E. Sint longitudines percursae ${}_1C_2C$, ${}_1N_2N$; constat (per defin. 2 cap. de tractu) esse spatia ${}_1A_2B$ ad ${}_1L_2M$ in ratione composita voluminum AB ad LM et longitudinum percursarum ${}_1C_2C$ ad ${}_1N_2N$. Sed longitudines percursae in motibus aequivelocibus aequalium temporum sunt ut velocitates (per prop. 1 hic).

Propositio 5.

In motu ejusdem mobilis aequiveloce vel duorum mobilium volumina aequalia et constantes velocitates habentium longitudines percursae, itemque spatia percursa sunt ut tempora impensa; et vicissim si talia sint, velocitas est constans seu motus aequivelox.

Mobile AB (fig. 111) motu aequiveloce, tempore TE, percurrat longitudinem ${}_1C_2C$ et spatium ${}_1A_2B$; et idem seu aequale tempore TP longitudinem ${}_1C_3C$ spatiumque ${}_1A_3B$; ajo esse ${}_1C_2C$ ad ${}_1C_3C$ vel ${}_1A_2B$ ad ${}_1A_3B$ ut TE ad TP. Sint motus aequidistributi ejusdem vel aequalis volumine mobilis, ejusdemque cum prioribus velocitatis, ac proinde (per prop. 3 hic) sint hi motus percursis intra aequalia respective tempora longitudinibus et spatiis aequales, adeoque (per prop. 3 cap. de velocitate uniformi et aequidistributa) uniformes, quorum spatia ${}_3A_4B$ et ${}_3A_5B$, longitudines ${}_3C_4C$, ${}_3C_5C$. Jam (per prop. 5 cap. de veloc. aequidistr. et unif.) longitudo ${}_3C_4C$ est ad longitudinem ${}_3C_5C$, ut tempora impensa TE ad TP. Ergo eodem modo erunt et longitudines ${}_1C_2C$ (aequales ipsi ${}_3C_4C$) ad ${}_1C_3C$ (aequalem ipsi ${}_3C_5C$), adeoque et spatia, quippe ob idem (vel aequale volumine) mobile sunt (per def. 2 cap. de tractu) in ratione longitudinum. Idemque et vicissim locum habet, quia et dicta prop. 5 cap. citati conversam annexam habet.

Propositio 6.

Si diversa mobilia moveantur unumquodque motu aequiveloce (seu constantis velocitatis), longitudines aequalibus temporibus percursae erunt velocitatibus impensis proportionales, inaequalibus percursae erunt in ratione composita temporum et velocitatum. Quodsi aequalia sint mobilium volumina, idem erit de spatiis, quod de longitudinibus. Et vicissim si talia locum habeant, mobilia retinebunt suas velocitates.

In figura prop. praecedentis adjiciatur mobile LM, ita ut puncta L, M, N eodem modo tractentur ut puncta A, B, C, sitque et mobilis LM motus velocitatem retinens. Jam si aequalibus (ipsi TE) temporibus sint percursae longitudines ${}_1C_2C$ et ${}_1N_2N$, et aequalibus (ipsi TP) temporibus percursae longitudines ${}_1C_3C$ et ${}_1N_3N$; erit ${}_1C_2C$ ad ${}_1N_2N$ ut velocitas ipsius AB ad velocitatem ipsius LM, quia substitutis motibus aequidistributis eorundem mobilium et earundem velocitatum (ut in prop. praecedentis demonstratione) est ${}_3C_4C$ ad ${}_3C_5C$, ut velocitas ipsius AB ad velocitatum ipsius LM (per prop. 5 cap. citati). Quodsi tempora sint inaequalia, et percurrerit AB longitudinem ${}_1C_2C$ tempore TE, et LM longitudinem ${}_1N_3N$ tempore TP, erit ${}_1C_2C$ ad ${}_1N_3N$ in ratione composita temporum TE ad TP et velocitatum ipsius AB ad ipsius LM. Posito enim LM, cujus majus tempus parte sui temporis TE, percurrisse longitudinem ${}_1N_2N$, est ${}_1C_2C$ ad ${}_1N_2N$ ut velocitas in AB ut velocitas in LM; et est ${}_1N_2N$ ad ${}_1N_3N$ ut tempus TE ad tempus TP (per prop. praeced.); ergo ${}_1C_2C$ ad ${}_1N_3N$ in ratione composita temporum et velocitatum. Quodsi mobilia AB et LM sunt aequalium voluminum, etiam spatia in ratione sic composita erunt, quia (per defin. 2 cap. de tractu) spatia tunc longitudinibus sunt proportionalia. Eadem vicissim locum habere manifestum est, quia et propositiones, quibus in demonstratione usi sumus, conversas habent.

Propositio 7.

Spatia percursa a mobilibus suam velocitatem retinentibus sunt in ratione composita voluminum cujusque mobilis, velocitatum, et temporum impensorum.

Sint (fig. 112) mobilia AB, CD, quae percurrunt spatia ${}_1A_2B$, ${}_1C_2D$, temporibus T et P, velocitatibus GH, LM; ajo esse spatia ${}_1A_2B$ ad ${}_1C_2D$ in ratione composita voluminum AB ad CD et velocitatum GH ad LM et temporum T ad P. Sint longitudines percursae ab AB quidem GK, a CD vero LN; spatia ${}_1A_2B$ et ${}_1C_2D$ sunt in ratione composita voluminum AB ad CD et longitudinum GK ad LN (per def. 2 cap. de tractu). Sed longitudines (per prop. 6 hic) in casu velocitatum constantium sunt in ratione composita temporum T ad P et velocitatum GH ad LM. Ergo in casu velocitatum constantium, sunt in ratione composita voluminum, temporum et velocitatum.

Propositio 8.

In motu utcunque accelerato, conservato aut retardato longitudines a mobilibus percursae sunt ut facta ex velocitatibus in tempus ordinatim ductis; spatia percursa seu tractus in ratione composita horum factorum et voluminum.

Sit (fig. 113) mobile A tempore BE percurrens longitudinem A(A) in temporis BE instantibus B, C, E, velocitates habens quascunque BF, CG, EH; et primum ponamus tempus per plura instantia ${}_1C$, ${}_2C$, ${}_3C$ etc. in partes dividi utcunque ut B_1C, ${}_1C_2C$, ${}_2C_3C$ etc., per quarum unamquamque duret eadem velocitas, ut velocitates ${}_1C_1G$, ${}_2C_2G$, ${}_3C_3G$ per tempora B_1C, ${}_1C_2C$, ${}_2C_3C$, ${}_3CE$. Si jam ponamus velocitates ordinatim in tempora duci, ut fiant deinde rectangula FB_1C, ${}_1G_1C_2C$, ${}_2G_2C_3C$, ${}_3G_3CE$, erunt haec rectangula in ratione composita elementorum temporis et velocitatum; itaque (per prop. 6 hic) ut longitudines elementares respondentes a mobili A percursae, A_1A, ${}_1A_2A$, ${}_2A_3A$, ${}_3A(A)$. Itaque summae rectangulorum, seu figurae scalares, erunt ut longitudines totae percursae, veluti $BF_1G_2G_2C$ ad $BF_1G_2G_3GHE$ ut A_2A ad A(A), et spatia, quae (per def. 2 cap. de tractu) sunt in ratione composita longitudinum et voluminum, erunt in ratione composita horum factorum et voluminum. Idemque est, si plures diversorum mobilium velocitates in sua tempora ordinatim ducantur, modo rectis proportionalibus tempora et velocitates repraesententur. Quodsi elementa temporis, quibus eadem durat velocitas, sint assignabilibus utcunque parvis minora, ita ut nulla pars temporis assignari queat, in qua eadem

duret velocitas; figura scalaris evanescet in orthogonium curvilineum, quod longitudini percursae erit proportionale.

Hujus propositionis usus latissime patet; Phorometriam enim connectit cum Geometria. Ex ea pendent, quae de motu uniformiter accelerato habentur apud Galilaeum, quaeque a nobis multo ampliora et difficiliora circa varia accelerationum aut retardationum genera exhibentur.

Caput III.

De Gradibus velocitatis in Motu varie difformi.

Definitio 1. Motus uniformiter secundum tempora acceleratus vel retardatus est, cum aequalibus quibuscunque temporis partibus transmissis aequalia sunt incrementa vel decrementa velocitatis.

Definitio 2. Motus uniformiter secundum spatia acceleratus vel retardatus est, cum quibuscunque aequalibus longitudinis percursae partibus transmissis aequalia sunt velocitatis incrementa vel decrementa.

Propositio 1.

In motu inde a quiete uniformiter accelerato acquisitae velocitates sunt temporibus impensis proportionales.

Sint (fig. 114) ${}_1T_2T$ et ${}_2T_3T$ aequales, erunt et ${}_1E_2C$ et ${}_2E_3C$ aequales (per def. 1 hic). Ergo ${}_1CF$ ad F_3C, ut ${}_1C_1E$ ad ${}_1E_2C$. Ergo ${}_1C$, ${}_2C$, ${}_3C$ cadunt in rectam. Itaque si AT sint tempora, at TC velocitates, erit A_1T ad A_2T ut ${}_1T_1C$ ad ${}_2T_2C$, id est tempora ut velocitates.

Propositio 2.

Iisdem positis longitudines percursae sunt in duplicata ratione temporum impensorum vel velocitatum acquisitarum.

Nam longitudines sunt ut facta ex velocitatibus TC in tempus AT ordinatim ductis (per prop. 1 hic vel per prop. 8 cap. de velocitate in universum). Ergo longitudines sunt ut triangula ATC, id est ut quadrata ipsarum AT vel TC.

Propositio 3.

Spatia motu uniformiter secundum tempora accelerato aequalibus temporis partibus ordine percursa crescunt ut numeri impares deinceps ab unitate.

Nam quadratorum 0, 1, 4, 9, 16, 25 etc. differentiae sunt 1, 3, 5, 7, 9 etc. Et patet, tempore A_1T percursum esse triangulum A_1C_1T ut 1; tempore ${}_1T_2T$ trapezium ${}_1C_1T_2T_2C$, quod est ut 3; tempore ${}_2T_3T$ trapezium ${}_2C_2T_3T_3C$, quod est ut 5; et ita porro.

Propositio 4.

Media temporis velocitas (arithmetica) in motu uniformiter secundum tempora accelerato seu qua latum uniformiter mobile tantundem longitudinis percurrisset eodem tempore, quantum nunc percurrerat dicto motu accelerato, est dimidia ultimae velocitatis acceleratione quaesitae.

Hoc est, si mobile per tempus A_3T moveretur celeritate uniformi ${}_3TG$ vel AH dimidia ipsius ${}_3T_3C$ acquisitae tempore A_3T motu aequabiliter accelerato, tantundem longitudinis seu spatii absolveret hac celeritate uniformi seu constante, quantum nunc accelerata. Nam longitudo percursa celeritate AH tempore A_3T repraesentatur rectangulo HA_3T; et longitudo percursa celeritatibus TC proportione temporum AT crescentibus repraesentatur triangulo rectangulo A_3T_3C (per prop. 8 cap. de velocitate in universum.) Ut autem sit rectangulum HA_3T aequale triangulo A_3T_3C, oportet esse AH dimidiam ipsius ${}_3T_3C$.

Propositio 5.

Si acquisitae velocitates sint in ratione duplicata, triplicata etc. aliterque multiplicata temporum inde a quiete impensorum, longitudines percursae sunt (respective) in triplicata, quadruplicata, et generaliter unitate magis quam velocitates multiplicata temporum ratione.

Nam temporibus existentibus (fig. 115) ut AT partibus rectae ATT, et ipsis TC normalibus ad AT existentibus ut velocitatibus et in duplicata ratione seu ut quadrata ipsarum AT, linea ACC erit parabola, cujus vertex A, spatia autem percursa erunt ut areae ATCA (per dictam prop. 8 cap. de velocitate in universum) quae (ex quadratura parabolae nota) sunt trientes rectangulorum ATC; ergo sunt ipsis istis rectangulis proportionalia. Rectangula autem ATC (quorum altitudines AT sunt ut tempora, et bases TC ut quadrata temporum) erunt ut temporum cubi seu in triplicata eorum ratione. Eodem modo si velocitates TC sint in triplicata temporum AT, spatia percursa erunt ut areae curvilineae ATCA, seu ut quartae partes rectangulorum ATC, seu ut rectangula ATC, seu in temporum AT ratione quadruplicata. Et ita porro in reliquis.

Cum tempore Galilaei nondum notae essent generales quadraturae parabolarum, quas primus, ni fallor, dedit Fermatius, hinc ille in primo gradu motus accelerati substitit.

Propositio 6.

Iisdem positis, spatia temporibus aequalibus inde a quiete percursa sunt ut numeri deinceps ab unitate sumti, qui in casu velocitatis uniformis sunt unitates; in casu velocitatis proportione temporum crescentis eorum differentiae primae sunt binarii, (seu factum ex 1 in 2); in casu velocitatis proportione temporum duplicata crescentis eorum differentiae secundae sunt senarii (seu factum ex 1. 2. 3); in casu velocitatis proportione temporum triplicata crescentis eorum differentiae tertiae sunt 24 (seu factum ex 1. 2. 3. 4); et ita porro.

Nam dicta spatia in casu motus uniformis sunt aequalia, adeoque incipiendo ab unitate etiam reliqua sunt unitates; in casu motus proportione temporum crescentis spatia sunt differentiae quadratorum, seu numeri impares, eorum autem differentiarum differentiae primae sunt 2, nam ita stat series:

$$\begin{array}{ccccccccccccl}
0 & & 1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 & & \text{quadrati} \\
 & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & & \text{numeri spatiorum} \\
 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & & & \text{differentiae.}
\end{array}$$

In casu velocitatis proportione temporum duplicata crescentis dicti numeri sunt differentiae cuborum (0, 1, 8, 27, 64, 125 etc.), nempe hae differentiae sunt 1, 7, 19, 37, 61, qui repraesentant dicta spatia A_1T_1CA, ${}_1C_1T_2T_2C_1C$, ${}_2C_2T_3T_3C_2C$ etc. posito primum A_1T_1CA esse 1, et tempora A_1T, ${}_1T_2T$, ${}_2T_3T$ esse aequalia; sed horum differentiae secundae sunt 6, scilicet

0		1		8		27		64		125	cubi
	1		7		19		37		61		numeri spatiorum.
		6		12		18		24			differentiae primae.
			6		6		6				differentiae secundae.

In casu velocitatis proportione temporum triplicata crescentis numeri spatia dicta aequalibus temporibus percursa repraesentantes sunt differentiae biquadratorum, et horum spatiorum proinde differentiae tertiae sunt 24, scilicet:

0		1		16		81		256		625	biquadrati.
	1		15		65		175		369		numeri spatiorum.
		14		50		110		194			differentiae primae.
			36		60		84				differentiae secundae.
				24		24					differentiae tertiae.

atque ita porro in altioribus.

Propositio 7.

Iisdem positis, media arithmetica temporis velocitas, qua motum mobile uniformiter eodem tempore tantundem quantum nunc longitudinis percurrisset, si velocitates sint in temporum ratione simplice, duplicata, triplicata etc., est (respective) portio velocitatis ultimae acquisitae dimidia, tertia, quarta etc. seu generaliter portio ejus secundum numerum, qui est exponens multiplicatae rationis unitate auctus.

Nam ad eum modum, quo ratiocinati sumus prop. 4 hic, si rectang. HA_4T sit aequale areae A_4T_4CA, et AT sint tempora ac TC velocitates, tunc HA repraesentat velocitatem temporis mediam arithmeticam. Jam si TC sint ut quadrata, cubi, biquadrata etc. ipsarum AT, erit (ex nota paraboloidum quadratura) AH vel ${}_4TG$ pars tertia, quarta, quinta etc. ipsius ${}_4T_4C$.

Quae diximus, cum velocitates a quiete crescunt in ratione temporum utcunque multiplicata, verbi gr. duplicata, aut triplicata, quadruplicata etc. seu cum velocitates acquisitae sunt ut quadrata, cubi, biquadrata etc. temporum impensorum, etiam locum habent, cum velocitates a quiete crescunt in ratione temporum utcunque submultiplicata seu ut radices quadraticae, cubicae, biquadraticae etc. temporum, id est (quod eodem redit) cum tempora impensa sunt ut quadrata, cubi, biquadrata etc. velocitatum acquisitaru m

idem enim est dicere, velocitates esse in ratione temporum subduplicata vel subtriplicata seu ut radices temporum quadratas vel cubicas, ac dicere, velocitates esse in ratione temporum multiplicata secundum numerum exponentem $\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{3}$. Quin et fieri potest, ut neque velocitates sint ut dignitates temporum nec tempora ut dignitates velocitatum, sed ut dignitates velocitatum sint dignitates temporum, sed alterius gradus, verbi gr. cubi velocitatum ut quadrata temporum; et tunc dicetur, velocitates esse in ratione temporum duplicata-subtriplicata, seu in ratione temporum multiplicata secundum numerum exponentem $\frac{2}{3}$. Sin velocitatum quadrata fuissent ut cubi temporum, seu velocitates in ratione temporum triplicata-subduplicata, forent velocitates in ratione temporum multiplicata secundum exponentem $\frac{3}{2}$. Idem est dicendum, si non velocitates ad tempora aut contra, sed vel spatia percursa ad tempora aut velocitates aut horum alterum ad spatia referatur; idemque est, si numeri exponentes sint negativi, hoc est, si rationes, quas diximus, pro directis assumantur reciprocae etc., sed tunc crescente uno, decrescit id cujus ratio reciproca est, et vice versa, de quo mox distinctius. Semper autem locum habent demonstrationes propositionum 5 et 7, quamvis numeri indices seu exponentes multiplicationis rationum non sint integri, sed fracti. Hinc generaliter solvitur problema sequens.

Propositio 8. Problema.

Si ex his tribus: tempora impensa, velocitates acquisitae, longitudines percursae, unum utcunque a minimo crescere dicatur in ratione alterius multiplicata (vel submultiplicata, vel multiplicata-submultiplicata), definire, secundum quam rationis multiplicationem tertium crescat, et quae sit velocitas media arithmetica, seu aequivalens uniformis.

Condantur tabulae sequentes ope prop. 5 et 7 ampliatarum juxta scholion subjectum propositione 7, quarum prima ostendit, data ratione velocitatum multiplicata rationis temporum quomodo ratio longitudinum percursarum sit multiplicata rationis temporum; et item, quae sit velocitatis mediae quantitas.

Tab. I.

(V) \ (T)	1	2	3	4	5	Tempora
0						
1	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	Longitudines percursae in multiplicata ratione temporum.
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	
3	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$ (L)	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	
4	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$	
5	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{10}{5}$	
Velocitates	Longitudines percursae in multiplicata ratione temporum.					

Usus tabulae praecedentis: Dato in qua ratione temporum sint velocitates vel contra, invenire in qua ratione temporum sint longitudines percursae, et quae sit media velocitas. Exempli causa, sint velocitates in ratione temporum multiplicata secundum numerum $\frac{2}{3}$, seu in ratione temporum duplicata-subtriplicata, seu velocitatum cubi (v³) sint ut temporum quadrata (t²), tunc ad inveniendas longitudines ex temporibus quaeratur in columna sinisterrima (quae est velocitatum) numerus 3 notatus signo (V) et in linea suprema (quae est temporum) numerus 2 notatus signo (T), et in cella notata signo (L) utrique (T) et (V) respondente occurret numerus $\frac{5}{3}$, qui significat, longitudines percursas esse in temporum ratione multiplicata secundum numerum $\frac{5}{3}$, seu esse in temporum ratione quintuplicata-subtriplicata, hoc est, cubos longitudinum esse ut quintana seu surdesolida temporum. Et generali theoremate, si sit v^m ut t^n, fiet l^m ut t^{m+n}, seu l ut $t^{\overline{m+n:m}}$. Idem numerus $\frac{5}{3}$ significat velocitatem mediam se habere ad maximam acquisitam ut 3 ad 5, seu ut $\frac{3}{5}$ ad 1, seu generaliter ut m ad m+n.

Tabula secunda ostendit, quomodo data ratione temporum ex ratione velocitatum, etiam spatia seu longitudines percursae habeantur ex ratione velocitatum:

Tab. II.

(V) \ (T)	1	2	3	4	5	Tempora.
0						
1	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	Longitudines percursae in multiplicata ratione velocitatum.
2	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{5}$	
3	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{2}$ (L)	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{5}$	
4	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{9}{5}$	
5	$\frac{6}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{10}{5}$	
Velocitates	Longitudines percursae in multiplicata ratione velocitatum.					

Exempli causa, si tempora sint in ratione velocitatum multiplicata secundum rationem $\frac{3}{2}$, seu in ratione velocitatum triplicata-subduplicata, seu temporum quadrata (t²) sint ut velocitatum cubi (v³), tunc ad inveniendas longitudines ex velocitatibus quaeratur in linea suprema (quae est temporum) numerus 2 notatus signo (T), et in columna sinisterrima (quae est velocitatum) numerus 3 notatus signo (V), et in cella notata signo (L) utrique (T) et (V) respondente occurret numerus $\frac{5}{2}$, qui significat longitudines percursas esse in velocitatum ratione multiplicata secundum numerum $\frac{5}{2}$, seu esse in velocitatum ratione quintuplicata-subduplicata, hoc est, quadrata longitudinum esse ut quintana seu surdesolida velocitatum. Et generali theoremate, si sit t^n ut v^m, fore l^n ut v^{m+n}, seu l ut $v^{\overline{m+n:n}}$. Patet autem ex inspectione, tabulam secundam habere eosdem numeros cum prima, sed inverso situ, si velocitates pro temporibus ponantur, et contra.

Tabula tertia ostendit, quomodo data ratione longitudinum percursarum ex ratione temporum impensorum, etiam velocitatum acquisitarum ratio habeatur ex ratione temporum impensorum.

Tab. III.

0	1	2	3	4	5 (T)	Tempora.
1	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	Velocitates acquisitae in multiplicata ratione temporum.
2	*	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	
(L) 3	*	*	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	(V) $\frac{2}{3}$	
4	*	*	*	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	
5	*	*	*	*	$\frac{0}{5}$	
Longitudines.	Velocitates acquisitae in multiplicata ratione temporum.					

Exempli causa, si longitudinum cubi (l^3) sint ut temporum surdesolida (t^5), seu si longitudines sint in ratione temporum quintuplicata-subtriplicata, seu multiplicata secundum numerum $\frac{5}{3}$; tunc ad inveniendas velocitates ex temporibus quaeratur in linea suprema (quae est temporum) numerus 5 notatus signo (T) et in columna sinisterrima (quae est longitudinum) numerus 3 notatus signo (L), et in cella notata signa (V) utrique (T) et (L) respondente occurret numerus $\frac{2}{3}$, qui significat velocitates acquisitas esse in temporum ratione duplicata-subtriplicata seu multiplicata secundum numerum $\frac{2}{3}$, hoc est, cubos velocitatum esse ut quadrata temporum. Et generali theoremate, si sit l^e ut t^r, fore v ut $t^{\overline{r-e:e}}$, seu v^e ut t^{r-e}.

Notandum autem est in hac tabula, $\frac{0}{1}$ vel $\frac{0}{2}$ vel $\frac{0}{3}$ etc. id est 0, significare, tunc cum longitudines percursae sunt ut tempora impensa, vel quadrata longitudinum ut quadrata temporum, vel cubi illorum ut cubi horum etc., velocitates esse ut t^0, id est ut unitates seu quantitates constantes, seu quod idem est, tunc velocitatem esse uniformem. Ratio autem, cur in hac tabula relicta sint loca vacua, haec est, quod tunc exponens numerus foret minor quam 0, quod fieri non debet. Exempli causa, cum l^2 sunt ut t^1, fieret v ut $t^{\overline{1-2:2}}$, seu v ut $t^{\overline{-1:2}}$, vel v^2 ut t^{-1}, vel quod idem est v^2 ut $\frac{1}{t}$ seu $1:t$, seu velocitatum quadrata erunt reciproce

ut tempora. Quibus casibus utique existentibus velocitatibus vel earum potentiis progressionis arithmeticae, tunc tempora vel eorum potentiae forent progressionis harmonicae; unde sequeretur, initio seu primo momento, cum tempus infinite parvum est, velocitatem esse infinitam, quod utique admittendum non est; idemque in caeteris omnibus locis fieret, quos ideo vacuos reliquimus. Et proinde fieri non potest, ut longitudinum percursarum quadrata sint ut tempora impensa, vel longitudinum cubi sint ut temporum quadrata aut ut ipsa tempora, vel ut longitudinum biquadrata sint ut temporum cubi vel quadrata vel ut ipsa tempora, et ita porro.

Tabula quarta ostendit, quomodo data ratione temporum impensorum ex data ratione longitudinum percursarum, etiam velocitatum acquisitarum ratio ex data ratione longitudinum percursarum detur.

Tab. IV.

0	1	2	3	4	5 (T)	Tempora
1	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	Velocitates acquisitae in multiplicata ratione longitudinum percursarum.
2	*	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	
(L) 3	*	*	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{4}$	(V) $\frac{2}{5}$	
4	*	*	*	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{5}$	
5	*	*	*	*	$\frac{0}{5}$	
Longitudines	Velocitates acquisitae in multiplicata ratione longitudinum percursarum.					

Exempli causa, si temporum surdesolida (t^5) sint ut longitudinum cubi (l^3), seu si tempora sint in longitudinum ratione triplicata-subquintuplicata, vel si tempora sunt in ratione longitudinum multiplicata secundum numerum $\frac{3}{5}$; tunc ad inveniendas velocitates ex longitudinibus quaeratur in linea suprema (quae est temporum) numerus 5 notatus signo (T) et in columna sinisterrima (quae est longitudinum) quaeratur numerus 3 notatus signo (L), et tunc in cella notata signo (V) utrique (T) et (L) respondente occurret numerus $\frac{2}{5}$, qui significat velocitates acquisitas esse in longitudinum percursarum ratione duplicata-subquintuplicata, seu in ratione longitudinum multiplicata secundum numerum $\frac{2}{5}$, seu, quod idem est, velocitatum acquisitarum surdesolida fore ut longitudinum percursarum quadrata. Et generali theoremate, si sit t^r ut l^e seu t ut $l^{e:r}$, fore v ut $l^{r-e:r}$, seu v^r ut l^{r-e}. Et eo casu, quo velocitates in tabula praecedenti erant ut t^0, etiam in hac fiunt ut l^0, id est ut unitates, seu sunt velocitates uniformes. Et loca tabulae antecedentis vacua quippe impossibilia, etiam in hac vacant, cum iisdem sunt utriusque tabulae respondentes casus, tantum quod velocitates in praecedente per tempora, in hac per longitudines seu loca absoluta aestimantur: eodem modo, ut primae quoque et secundae tabulae iidem fuere casus, eo tantum discrimine, quod longitudines percursae eaedem in prima per tempora, in secunda per velocitates aestimabantur. Et in sequentibus quoque proximis duabus tabulis eadem tempora insumta in quinta quidem per longitudines percursas, in sexta vero per velocitates acquisitas aestimabuntur.

Igitur tabula quinta ostendit, quomodo data ratione velocitatum acquisitarum ex data ratione longitudinum percursarum, etiam temporum impensorum ratio ex data ratione longitudinum percursarum detur.

Tab. V.

(L)

	0	1	2	3	4	5	Longitudines
	1	* ☽	*	*	*	*	Tempora impensa in multiplicata ratione longitudinum.
	2	$\frac{1}{2}$	*	*	*	*	
	3	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	*	*	*	
	4	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	*	*	
(V)	5	$\frac{4}{5}$	(T) $\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	*	

Velocitates.

Tempora impensa in multiplicata ratione longitudinum.

Exempli causa, si velocitatum surdesolida (v^5) sint ut longitudinum quadrata (l^2), seu si velocitates sint in ratione longitudinum duplicata-subquintuplicata, sive multiplicata secundum numerum $\frac{2}{5}$, tunc ad invenienda tempora ex longitudinibus quaeratur in linea suprema (quae est longitudinum) numerus 2 notatus signo (L) et in columna sinisterrima (quae est velocitatum) numerus 5 notatus signo (V), et in cella notata signo (T) utrique (L) et (V) respondente occurret numerus $\frac{3}{5}$, qui significat, tempora impensa esse in longitudinum percursarum ratione triplicata-subquintuplicata, seu multiplicata secundum numerum $\frac{3}{5}$, hoc est, surdesolida temporum esse ut cubos longitudinum. Et generali theoremate, si sit v^c ut l^b, fore t ut $l^{c-b:c}$, seu t^c ut l^{c-b}. Sed ex inspectione tabulae naturaque calculi rursus apparet, multa manere loca vacua, ubi casus sunt impossibiles. Nam impossibilis est (ex. gr.) casus cellae ☽ respondentis longitudinis exponenti 1 et volocitatis 1, id est, ubi velocitates sunt ut longitudines, seu v^1 ut l^1; nam ita tam c quam b existentibus 1, fieret $c - b = 0$, et foret t ut $l^{0:1}$, seu t ut l^0, seu tempus durante motu non cresceret, sed maneret constans sive idem, quod est absurdum. Similis absurditas oritur in omnibus locis vacantibus. Itaque fieri non potest, ut velocitates acquisitae crescant ut longitudines percursae, vel ut earum quadrata, cubi altioresque potestates; aut ut velocitatum acquisitarum quadrata crescant ut longitudinum percursarum quadrata, cubi altioresque potestates seu dignitates; aut ut velocitatum acquisitarum cubi crescant ut longitudinum percursarum cubi, biquadrata altioresve potestates. Et generaliter fieri non potest, ut velocitatum dignitates crescant ut dignitates pares vel altiores longitudinum, quemadmodum paulo ante ad Tab. III. ostendimus fieri non posse, ut temporum dignitates crescant ut longitudinum dignitates altiores, seu ut longitudinum dignitates crescant uti temporum dignitates inferiores.

Denique tabula sexta ostendit, quomodo data ratione longitudinum percursarum ex ratione data velocitatum acquisitarum, etiam temporum impensorum ratio ex data ratione velocitatum acquisitarum detur.

Tab. VI.

	(L)					
0	1	2	3	4	5	Longitudines
1	*	*	*	*	*	Tempora impensa in multiplicata ratione velocitatum.
2	$\frac{1}{1}$	*	*	*	*	
3	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$	*	*	*	
4	$\frac{3}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{3}$	*	*	
(V) 5	$\frac{4}{1}$	(T) $\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	*	
Velocitates.	Tempora impensa in multiplicata ratione velocitatum.					

Exempli causa, si longitudinum quadrata (l^2) sint ut velocitatum surdesolida (v^5), seu si longitudines sint in velocitatum ratione quintuplicata-subduplicata vel in velocitatum ratione multiplicata secundum numerum $\frac{5}{2}$, tunc ad invenienda tempora ex velocitatibus quaeratur in linea suprema (quae est longitudinum) numerus 2 notatus signo (L) et in columna sinisterrima (quae est velocitatum) quaeratur numerus 5 notatus signo (V), et tunc in cella notata signo (T) utrique (L) et (V) respondente occurret numerus $\frac{3}{2}$, qui significat tempora impensa esse in velocitatum acquisitarum ratione triplicata-subduplicata, seu in ratione velocitatum multiplicata secundum numerum $\frac{3}{2}$, hoc est, temporum quadrata fore ut longitudinum cubos. Et generali theoremate, si sit l^b ut v^c seu l ut $v^{c:b}$, fore t ut $v^{\overline{c-b}:b}$ seu t^b ut v^{c-b}. Et casus, qui in tabula proxime praecedente nempe quinta erant impossibiles, etiam hic vacant.

In omnibus autem tabulis uno eodemque exemplo usi sumus, ut consensus appareat. Nempe in tabula 1. velocitatum cubis existentibus ut temporum quadrata, tunc longitudinum cubi sunt ut temporum surdesolida. In tabula 2. temporum quadratis existentibus ut velocitatum cubi, tunc longitudinum quadrata sunt ut velocitatum surdesolida. In tabula 3. longitudinum cubis existentibus ut temporum surdesolida, tunc velocitatum cubi sunt ut temporum quadrata (consentit tabulae primae). Et in tabula 4. temporum surdesolidis existentibus ut longitudinum cubi, tunc velocitatum surdesolida sunt ut longitudinum quadrata. In tabula 5. velocitatum surdesolidis existentibus ut longitudinum quadratata, tunc temporum surdesolida sunt ut longitudinum cubi (consentit tabulae quartae). Denique in tabula 6. longitudinum quadratis existentibus ut velocitatum surdesolida, tunc temporum quadrata sunt ut velocitatum cubi (consentit tab. secunda).

Postremo pretium operae videtur ostendere, quomodo unius tabulae canon analyticus ex alterius tabulae canone per calculum generalem derivetur, praesertim cum alioquin analytici non satis uti soleant exponentibus potentiarum generalibus seu per literas expressis, quod tamen hic requiritur.

Et quidem tabulae primae canon analyticus erat talis Si v^m ut t^n, fiet l^m ut t^{m+n}, ubi habetur l ex t. Quaeritur jam canon analyticus tabulae secundae, seu posito t^n ut v^m quaeritur l ex v. Quod calculo tali invenitur: $t^n \overset{(1)}{\text{ut}} v^m$ ex hypothesi; ergo $t \overset{(2)}{\text{ut}} v^{m:n}$. Jam ex canone tabulae primae est $l^m \overset{(3)}{\text{ut}} t^{m+n}$; ergo fit $l \overset{(4)}{\text{ut}} t^{\overline{m+n}:m}$; et in analogia (4) pro t substituendo valorem ex analogia (2) fit $l \overset{(5)}{\text{ut}} v^{\overline{m+n}:n}$, id est $l^n \overset{(6)}{\text{ut}} v^{m+n}$. Itaque si t^n ut v^m, fit l^n ut v^{m+n}, qui est canon analyticus tabulae secundae. Et eodem modo ex canone tabulae tertiae derivatur canon quartae, itemque ex canone tabulae quintae derivatur canon sextae, aut vice versa. Sed ut ostendamus, quomodo et alii canones ex primo aut inter se deriventur, in exemplum apponemus calculum, quo canon tabulae quintae derivatur ex canone tabulae primae.

In tabula igitur quinta est $v^c \overset{(1)}{\text{ut}} l^b$ seu $v \overset{(2)}{\text{ut}} l^{b:c}$, quaeritur t ex l, b, c. Jam ex tab. 1 canone, cum esset $v \overset{(3)}{\text{ut}} t^{n:m}$, erat $l \overset{(4)}{\text{ut}} t^{\overline{m+n}:m}$. Ergo $t \overset{(5)}{\text{ut}} l^{m:\overline{m+n}}$. Ergo tollendo t ex analogia (3) per analogiam (5), fit $v \overset{(6)}{\text{ut}} l^{n:\overline{m+n}}$. Comparando igitur analogias (2) et (6), fit $\overline{m+n}:n \overset{(7)}{=} c:b$ seu $1+\overline{m:n} \overset{(8)}{=} c:b$, et $n:m \overset{(9)}{=} b:c-b$. Jam ex articulo (4) erat $l \overset{(10)}{\text{ut}} t^{1+\overline{n:m}}$. Ergo per artic. (9) fit $l \overset{(11)}{\text{ut}} t^{c:c-b}$, seu fit $t^c \overset{(12)}{\text{ut}} l^{c-b}$. Itaque si sit v^c ut l^b, fit t^c ut l^{c-b}, qui est canon analyticus tabulae quintae. Eademque methodus in caeteris locum habet. In qua non tantum notandus est usus calculi exponentium literalium, sed et analogiarum, quae ad instar aequa-