Definitio 3. Quantitas actionis formalis in motu est, cujus mensura est materiam certae quantitatis motam esse per certam longitudinem (motu uniformi aequidistributo) intra certum tempus.

Itaque differt effectus ab actione, quod in effectu solum ejus quod praestitum est, nempe materiae translatae et spatii, per quod facta est translatio, in actione vero integra etiam velocitatis seu temporis T quo praestitus est effectus seu quo (in fig. def. praec.) facta est translatio ex ${}_1A_1B$ in ${}_2A_2B$, habetur ratio. Formalem autem appellavi tam effectum quam actionem, quia, ut hoc loco definivimus, motui est essentialis; secus ac sunt alii effectus aliaeve actiones, ex impedimento quodam peculiari nascentes, ut ex vi gravitatis corpora versus centrum terrae prementis, aut ex resistentia medii vel contractus, aut ex elastro aliquo vincendo, et similibus materiae concretae accidentibus. Si quis autem vocabulum Metaphysicum aegrius fert in re Mathematica, cogitet non aliud commodius suppetiisse, et assignata definitione omnem ambiguitatem esse sublatam.

Cautio.

Sequentes Propositiones circa actionem et potentiam de motibus simplicibus vel saltem de motibus aequidistributis simul et uniformibus intelliguntur.

Propositio 1.

Si eadem quantitas materiae per diversas longitudines mota sit, effectus formales motuum sunt ut longitudines. Quodsi praeterea velocitatum gradus sint aequales, etiam actiones formales motuum sunt ut longitudines.

Sit (fig. 89) materia A (unius librae si placet) translata per longitudinem ${}_0A_2A$, et materia B ei aequalis (etiam unius librae) translata per longitudinem ${}_0B_3B$; et mensura longitudinum communis sit pes, resoluta nimirum longitudine ${}_0A_2A$ in pedes quotcunque, verbi gr. duos, ${}_0A_1A$, ${}_1A_2A$, et resoluta longitudine ${}_0B_3B$ in pedes quotcunque, ut tres ${}_0B_1B$, ${}_1B_2B$, ${}_2B_3B$; et unusquisque pedum absolvatur eadem velocitate, nempe tempori aequali ipsi tempori T, veluti tempore minuti, si placet. His positis mensura actionum formalium erit actio movendi materiam unius librae per

longitudinem pedis unius tempore minuti (per def. 3 hic), et ad transferendam libram A per duos pedes transfertur libra A per pedem unum ${}_0A_1A$ tempore minuti, et rursus transfertur libra A per pedem unum ${}_1A_2A$ tempore minuti. Itaque actio transferendi libram A per ${}_0A_2A$ duos pedes, continet mensuram actionis toties, quoties longitudo ${}_0A_2A$ continet pedem seu mensuram longitudinis, nempe bis. Similiter actio transferendi libram B per ${}_0B_3B$ pedes tres, continet mensuram actionis, quoties longitudo ${}_0B_3B$ continet mensuram longitudinis sive pedem, nempe ter. Jam quantitates sunt ut numeri, posito mensuram esse unitatem (per def. 1). Itaque quantitates actionum sunt ut quantitates longitudinum. Idem est de quantitatibus effectuum, etiamsi velocitates non fuissent aequales (per def. 2 hic). Quodsi longitudines sint incommensurabiles, possunt pro ipsis substitui commensurabiles ab ipsis differentes minus differentia quavis data, veluti si mensurae quantitas data differentia tanto minor assumatur, ut error etiam prodeat minor errore quovis dato, id est nullus.

Propositio familiariter ita enuntiari ostendique potest:

Effectus movendi libram unam per pedes duos (tres) est duplus (triplus) effectus movendi libram unam per pedem unum. Et actio movendi libram unam per pedes duos (tres) tempore duorum (trium) minutorum est dupla (tripla) actionis movendi libram unam per pedem unum tempore unius minuti.

Manifestum enim est, in quantitate composita bis (terve) repeti simplicem, quae est, mensura (per defin. 2 et 3). Itaque composita quantitas erit ad simplicem (per def. 1) ut numerus repetitionum ad unitatem. Et constat ejusdem velocitatis esse percurrere unum pedem tempore unius minuti, et percurrere duos (tres) pedes tempore duorum (trium) minutorum (per prop. 5 cap. de veloc. motus aequidistr. et unif.).

Propositio 2.

Si diversa mobilia moveantur per longitudines aequales, effectus motuum formales erunt ut mobilia. Quodsi praeterea et velocitatum gradus sint aequales, etiam actiones motuum formales erunt ut mobilia.

Sint (fig. 90) mobilia AC et LP translata per longitudinem

${}_1A_2A$ vel ${}_1L_2L$ unius pedis, aequali velocitate seu tempore T unius si placet minuti; et mobilium mensura sit libra, et mobile AC resolvatur in libras si placet duas, AB, BC, mobile autem LP in libras tres LM, MN, NP; habemus in ipsius AC motu bis repetitam mensuram actionis, nempe habemus libram AB translatam per longitudinem unius pedis tempore T seu velocitate unius gradus (per def. 3) et rursus libram BC tempore aequali seu velocitate eadem per longitudinem unius pedis translatam. Similiter in motu ipsius LP habemus mensuram actionis ter repetitam. Et utrobique toties habemus mensuram actionis, quoties mensuram materiae in mobilibus. Sunt ergo quantitates actionum ut mobilium (per def. 1). Idem est in effectibus (per def. 2), quaecunque sit velocitas aut quodcunque impensum tempus. Et idem est in mobilibus incommensurabilibus, ut patet per rationem adhibitam in prop. praeced.

Propositio familiarius ita enuntiari potest: *Effectus movendi libras duas (tres) per pedem unum est duplus (triplus) effectus movendi libram unam per pedem unum; et actio movendi libras duas (tres) per pedem unum tempore unius minuti, est dupla (tripla) actionis movendi libram unam per pedem unum tempore unius minuti.*

Propositio 3.

Effectus motuum formales et, posita aequali velocitate, etiam actiones motuum formales sunt in ratione composita mobilium et longitudinum.

Si mobilia sint aequalia, caeteris positis erunt effectus et actiones ut longitudines (per prop. 1 hic); ergo in casu aequalitatis mobilium, erunt in ratione mobilium et longitudinum composita.

Sin mobilia sint inaequalia, sumatur (fig. 91) majoris LMN (4) pars LM(3) aequalis minori AB(3); effectus itemque actio motus ${}_1A_2B(6)$ est ad effectum itemque actionem motus ${}_1L_2M(15)$ ut longitudo ${}_1A_2A(2)$ ad longitudinem ${}_1L_2L(5)$ (per prop. 1 hic); rursus effectus itemque actio motus ${}_1L_2M(15)$ ad effectum itemque actionem motus ${}_1L_2N(20)$ est ut mobile LM(3) seu AB(3) ad mobile LN(4) (per prop. 2 hic). Ergo jungendo prima postremis effectus itemque actio motus ${}_1A_2B(6)$ est ad effectum itemque actionem

motus ${}_1L_2N(20)$ in ratione composita longitudinis ${}_1A_2A(2)$ ad longitudinem ${}_1L_2L(5)$ et mobilis AB(3) ad mobile LN(4), seu ut est rectangulum ${}_1A_2B$(3 in 2 seu 6) ad rectangulum ${}_1L_2N$(4 in 5 seu 20).

Nimirum effectus movendi libras duas per pedes tres est bis triplus seu sextuplus ipsius effectus movendi unam libram per pedum unum; et actio movendi libras duas per pedes tres in minuto temporis uno est bis tripla seu sextupla actionis movendi libram unam per pedem unum in uno temporis minuto.

Axioma.

Eandem materiae quantitatem per eandem longitudinem moveri in tempore minore, est actio major.

Percurrere leucam in dimidia hora est majus quam percurrere leucam in hora integra; et ita de caeteris *).

Propositio 4.

Si eadem materiae quantitas moveatur per longitudines aequales temporibus quatuor, et sint tempora duo priora inter se ut tempora duo posteriora, vel (quod idem est) velocitates duae priores inter se ut velocitates duae posteriores; etiam actiones duae priores in eadem inter se ratione erunt, in qua duae actiones posteriores.

Sit (fig. 92) mobile A percurrens longitudines quatuor aequales ipsi ${}_1A_2A$ temporibus BC, EFG, LM, NPQ, sitque tempus EFG in eadem proportione ad tempus BC, in qua est tempus NPQ ad tempus LM; ajo et actionem, cui impensum est tempus EFG, esse ad actionem, cui impensum est tempus BC, in ea proportione, in qua actio, cui impensum est tempus NPQ, est ad actionem, cui impensum est tempus LM. Cum enim actionis mensura sit, mobile certae magnitudinis percurrisse longitudinem certae extensionis

*) Leibniz hat im Original bemerkt: Si nollemus demonstrare prop. 4, possemus ex Axio. et prop. 4. facere tale axioma utrumque complectens: Si eadem materiae quantitas per eandem longitudinem moveatur quatuor temporibus B, E, L, M, sitque B minus quam E in ratione qua L minus quam M, erit actio per B major actione per E, in ratione qua actio per L major est actione per M.

certo velocitatis gradu seu certa temporis parte (per def. 3), et longitudo translationis itemque magnitudo mobilis sint in omnibus eaedem (ex hypothes.), et eadem ratio utrobique temporum (adeoque velocitatum), omnia, quibus actio aestimari potest, erunt similia a parte BC et EFG ut a parte LM et NPQ. Itaque nulla causa reperiri potest, cur major ab una parte quam alia actionum proportio esse dicatur. Est ergo eadem. Idem est de velocitatibus, nam si duae priores velocitates in ea sunt ratione, in qua duae posteriores, etiam tempora posteriora prioribus erunt proportionalia, quia velocitates (aequalibus longitudinibus percursis) sunt temporibus reciproce proportionales (per prop. 8 cap. de veloc. in motu aequidistr. et unif.).

Fieri non potest, ut alius modus haec demonstrandi reperiatur, quia actiones, quae velocitate differunt, non possunt reduci ad congruentiam, uti paulo ante reduximus ad congruentiam eas, quae velocitatem eandem habent, tantumque magnitudine mobilis aut longitudinis differunt; itaque per viam similitudinis comparatio differentium velocitate actionum obtinenda est.

Propositio 5.

Si velocitates in eadem materiae quantitate per longitudinem eandem movenda exercitae assumantur in progressione Geometrica crescente, erunt et actiones formales motuum in progressione Geometrica crescente.

Sint velocitates A, B, C progressionis Geometricae seu A ad B ut B ad C, et sint actiones L, M, N; ajo etiam esse L ad M ut M ad N. Nam assumatur alia velocitas H aequalis ipsi B, qua fiat alia actio Z aequalis ipsi M; quia A ad B ut B ad C (ex hyp.), ergo A ad B ut H ad C (ex constructione); ergo et L ad M ut Z ad N (per prop. praeced.), id est (per construct.) L ad M ut M ad N. Idemque est si progressio Geometrica continuetur utcunque. Crescentibus autem velocitatibus crescunt actiones, quia crescentibus velocitatibus et manente longitudine, tempora decrescunt (per prop. 8 cap. de veloc. in motu aequidistr. et unif.), et decrescentibus temporibus manente longitudine, cui impenduntur, crescunt actiones (per axioma hic).

Propositio 6. Lemma.

Si duae sint progressiones Geometricae simul crescentes, termini unius erunt in eadem, multiplicata aut submultiplicata ratione terminorum respondentium alterius.

Sint Geometricae progressiones vel series A, B, C, D, E, F, et L, M, N, P, Q; ajo esse A ad B in ratione eadem vel multiplicata L ad M, vel contra L ad M in eadem aut multiplicata ratione A ad B (quo casu erit A ad B in submultiplicata L ad M). Nam interpolando continue seriem priorem, omnes aliae quantitates homogeneae vel ab illis indefinite parvo errore differentes in eam cadent; itaque et in seriem priorem A, B, C cadet series posterior L, M, N, et quidem intervallis seu logarithmorum differentiis aequalibus, quia ipsa quoque L, M, N progressionis Geometricae est. Jam si in serie geometricae progressionis assumatur alia series progressionis geometricae, sed majoribus intervallis, tunc termini posterioris sunt in multiplicata ratione terminorum prioris, et quidem ratio multiplicata est in ratione intervalli majoris ad minus, seu intervalli seriei unius ad intervallum alterius, quod in unaquaque serie est constans; contra termini prioris sunt in ratione submultiplicata terminorum posterioris.

Sic si sint duae series simul crescentes progressionis geometricae 1, 4, 16, 64, et 2, 16, 128, 1024; tunc interpolata priore, ut in eam incedat posterior, res ita stabit:

	A		B		C		D		E		F
Series communis .	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
		L			M			N			P
Logarithm. . . .	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
Series prior . .	1	·	4	·	16	·	64	·	·	·	·
Logarithm. . . .	(0)	·	(2)	·	(4)	·	(6)	·	·	·	·
Intervalla . . .	·	(2)	·	(2)	·	(2)	·	·	·	·	·
Series posterior .	·	2	·	·	16	·	·	128	·	·	1024
Logarithm. . . .	·	1	·	·	4	·	·	7	·	·	10
Intervalla . . .	·	·	· (3)	·	·	· (3)	·	·	· (3)	·	·

Et cum differentiae logarithmorum seriei A, B, C, D sint ad differentias logarithmorum seriei L, M, N, P ut 2 ad 3, erunt termini seriei posterioris in ratione multiplicata terminorum prioris secundum rationem 3 ad 2 sive numerum indicem vel exponentem $\frac{3}{2}$, seu ratio L ad M (2 ad 16) est rationis A ad B (seu 1 ad 4) triplicata subduplicata, vel ratio A ad B est rationis L ad M duplicata subtriplicata; cum enim ratio L ad M sit ut cuborum (nam 2, 16, 128 etc. est ut 1, 8, 64 etc.), ratio A ad B est ut quadratorum (nempe 1, 4, 16 etc.). Eademque locum habent in aliis omnibus, etiamsi indefinite sit progrediendum in interpolanda serie priore ut in eam incidat posterior, quemadmodum factum est in calculandis logarithmis.

Propositio 7.

Si eadem materiae quantitas moveatur per longitudines aequales, velocitates erunt actionibus proportionales.

Nam velocitates duae quaecunque A et B possunt intelligi termini seriei progressionis Geometricae. Haec series continuetur ut sit A, B, C; itaque respondentes eis actiones L, M, N erunt etiam termini progressionis Geometricae (per prop. 5) et quidem vel ejusdem seu in ratione simplice velocitatum, vel in ratione velocitatum secundum numerum certum multiplicata aut submultiplicata (per prop. 6 hic). Sed quoniam longitudine et materia posita eadem, nullius alterius quam solius velocitatis vel temporis (quod velocitati, qua eadem longitudo percurritur, reciproce proportionale est) consideratio superesse potest (per def. 3 hic), itaque nulla fieri potest compositio sive multiplicatio rationum. Et proinde necesse est actiones eandem quantitatem materiae per eandem longitudinem transferentes esse simpliciter in ratione velocitatum, seu ob eandem longitudinem (per prop. 8 cap. 4 sect. 2) in ratione temporum reciproca.

Hanc propositionem ita pro captu omnium facilius enuntiavimus: *Transferre libram per unum pedem intra temporis minutum duplo (triplo) major actio est, quam transferre unam libram per unum pedem intra duo (tria) minuta.* Idque tamquam axioma assumere poteram, quod iis sufficere potest, qui vim ratiocinationis Geometricae profundioris non satis facile attingunt. Volui tamen ad agendam artem ra-

tionis in usum Geometrarum ostendere, quomodo in praesenti materia ex solo axiomate simpliciore assumto, *quod nempe majus sit efficere idem minore tempore*, consequatur actionem motus formalem esse praecise in ea proportione majorem, in qua minus est tempus; quemadmodum Archimedes assumens majus esse momentum ex majore distantia, tandem (licet alia methodo) demonstravit esse momenta ut distantias.

Propositio 8.

Si aequales sunt effectus, erunt quantitates materiae reciproce ut longitudines motus; idemque est, si aequales sint actiones et motuum tempora seu velocitates. Et vicissim: Si quantitates materiae sint reciproce ut longitudines, effectus vel aequalibus simul velocitatibus et actiones sunt aequales.

Quoniam enim effectus vel in casu aequalium temporum actiones sunt in ratione composita et quantitatum materiae et longitudinum (per prop. 3 hic), ideo si effectus vel actiones sint aequales, fient (per Elementa) quantitates materiae longitudinibus reciproce proportionales. Et contra, si reciproce proportionales sint quantitates materiae longitudinibus, erunt effectus aequales, et in casu aequalium velocitatum et actiones. *Itaque tres libras transferre per longitudinem duorum pedum aequalis est effectus effectui, vel si aequalia sint tempora, aequalis est actio actioni transferendi duas libras per longitudinem trium pedum.* Quod et sic ostendi potest: Tres libras transferre per longitudinem duorum pedum sextuplus est effectus transferentis unam libram per longitudinem unius pedis. Et duas libras transferre per longitudinem trium pedum sextuplus est effectus transferentis unam libram per longitudinem unius pedis (utrumque per prop. 3 hic). Ergo aequale est duas libras per tres pedes vel tres libras per duos pedes transferre.

Propositio 9.

Si eadem sit quantitas effectus in motibus, actiones motuum formales sunt velocitatibus agendi proportionales.

Sit (fig. 93) motus A effectus quicunque B, uti transferendi duas libras per sex pedes, velocitas C graduum quorumcunque ut 2. Et sit rursus motus L effectus B, priori aequalis, vel uti transferendi tres libras per quatuor pedes (quem aequalem priori esse patet ex prop. praec.), velocitas N graduum quorumcunque ut 3; ajo actionem motus A esse ad actionem motus L ut C(2) ad N(3). Assumantur duo alii motus, unus R transferens unam libram per unum pedem velocitate C(2), alter S transferens unam libram per unum pedem velocitate N(3), et effectus transferendi unam libram per unum pedem vocetur Q. Actio motus A est ad actionem motus R (ob velocitates C aequales, ambas graduum 2) ut effectus B ad effectum Q (per prop. 3 hic), et actio motus R est ad actionem motus S ob effectus aequales Q (utrobique unius librae translatae per unum pedem) ut velocitates, nempe ut velocitas C(2) ad velocitatem N(3) (per prop. 7 hic). Et denique actio motus S est ad actionem motus L (ob velocitates N aequales, ambas graduum 3) ut effectus Q ad effectum B (per prop. 3 hic). Ergo denique actio motus A est ad actionem motus L in ratione composita B ad Q et C ad N et Q ad B; et quia ratio composita ex B ad Q et Q ad B est aequalitatis, erit actio motus A ad actionem motus L in ratione C ad N, seu in ratione velocitatum agendi.

Propositio 10.

Actiones formales motuum sunt in ratione composita effectuum formalium et velocitatum agendi, seu in ratione composita quantitatum materiae, longitudinum, per quas sunt motae, et velocitatum.

Nam si effectus sint aequales, erunt actiones ut velocitates efficiendi (per prop. 7 hic); ergo sic et in ratione composita effectuum et velocitatum. Si effectus sint inaequales, sit (fig. 94) effectus A, velocitas B, actio C; et rursus effectus DEF, velocitas GH, actio NPQ. Sumatur effectus majoris DEF pars DE aequalis ipsi effectui A, producta actione NP parte actionis NPQ, et eadem velocitate ut GH, qua actio integra NPQ. Jam actio NPQ est ad actionem NP ut effectus DEF ad effectum DE ob aequalem velocitatem utrobique GH (per prop. 3 hic) et actio NP est ad actionem C ut velocitas GH ad velocitatem B ob effectus DE et A aequales (per prop. 9 hic). Ergo actio NPQ est ad actionem C in ratione composita ex ratione effectus DEF ad effectum DE et ratione velocitatis GH ad velocitatem B. Sunt autem effectus in ratione composita quantitatum materiae et longitudinum translationis (per prop. 3 hic), unde habetur propositio.

Definitio 4. Diffusio actionis in motu vel actionis extensio est quantitas effectus formalis in motu. Intensio ejusdem actionis est quantitas velocitatis, qua factus est effectus seu qua materia per longitudinem translata est.

Diffunditur enim actio eodem gradu per majus spatium vel mobile distributo. Intenditur gradus etiam eodem manente mobili et spatio.

Propositio 11.

Actiones motuum formales sunt in ratione composita diffusionum et intensionum.

Nam sunt in ratione composita effectuum et velocitatum translationis (per prop. 10 hic). Sunt autem effectus ut diffusiones, et velocitates ut intensiones (per def. 4 hic).

Propositio 12.

Si effectus (formales intelligo) sint proportionales temporibus, erunt actiones (formales scilicet) ut longitudines, et vicissim.

Nam Actiones sunt in ratione composita effectuum et velocitatum (per prop. 10 hic), et effectus sunt ut tempora (ex hypothesi); ergo actiones sunt in ratione composita temporum et velocitatum. Sed longitudines sunt etiam in ratione composita temporum et velocitatum (per prop. 6 vel 7 cap. 4 sect. 2); ergo actiones sunt ut longitudines translationum. Vicissimque si actiones sunt ut longitudines translationum, actiones erunt in ratione composita temporum et velocitatum; sed sunt etiam actiones in ratione composita effectuum et velocitatum. Ergo effectus sunt ut tempora.

Propositio 13.

Si eadem sit quantitas materiae motae, et longitudines motuum sint ut tempora, erunt actiones quoque ut tempora, et vicissim.

Nam effectus erunt ut longitudines (per prop. 1 hic), ergo ut tempora (ex hypothesi). Ergo actiones ut longitudines (per prop. 12), ergo ut tempora (ex hyp.). Vicissim si actiones sint ut tempora et quantitas materiae sit eadem, erunt actiones in ratione composita longitudinum et velocitatum (per prop. 10 hic); ergo etiam ut tempora (ex hyp.). Sed tempora sunt in ratione directa longitudinum et reciproca velocitatum (per prop. 9 cap. 4 sect. 2). Ergo aequalis est ratio velocitatum directa et reciproca, adeoque velocitates sunt aequales; itaque longitudines sunt ut tempora.

Propositio 14.

Si actiones sint aequales, effectus sunt reciproce ut velocitates, et vicissim.

Nam actiones sunt in ratione composita effectuum et velocitatum (per prop. 10 hic), unde constat propositum per Elementa.

Propositio 15.

Si velocitates sint aequales, tunc effectus (pariterque actiones) sunt in ratione composita quantitatum materiae et temporum motibus impensorum, et vicissim.

Nam si velocitates sint aequales, actiones (vel effectus) sunt in ratione quantitatum materiae et longitudinum (per prop. 3 hic); sed longitudines sunt ut tempora in casu velocitatum aequalium (per prop. 5 cap. 4 sect. 2, adde ibid. prop. 6).

Vicissim si effectus sint in ratione composita quantitatum materiae et temporum (ex hyp.), ideo quia effectus sunt in ratione quantitatum materiae et longitudinum, erunt longitudines ut tempora. Sed tunc (per dictam prop. 5) aequales sunt velocitates.

Propositio 16.

Effectus motuum formales sunt in ratione composita mobilium, velocitatum et temporum motus.

Nam effectus sunt in ratione composita mobilium et longitudinum (per prop. 3 hic), et longitudines sunt in ratione composita velocitatum et temporum (per prop 6 vel 7 cap. 4 sect. 2).

Propositio 17.

Actiones motuum formales sunt in ratione composita ex rationibus mobilium et temporum simplice et velocitatum agendi duplicata.

Sunt enim actiones in ratione composita velocitatum et effectuum (per prop. 10 hic), et effectus sunt in ratione composita velocitatum, temporum et mobilium (per prop. 16 praeced.). Ergo

actiones sunt in ratione composita ex duplicata velocitatum simpliceque temporum et mobilium.

Propositio 18.

Si aequales sint materiae quantitates, et tempora actionum aequalia, actiones motuum formales erunt in duplicata ratione velocitatum vel longitudinum motus.

Nam longitudines sunt in ratione composita temporum et velocitatum (per prop. 6 vel 7 cap. 4 sect. 2). Ergo si tempora sint aequalia, velocitates sunt ut longitudines. Rursus quia mobilia sunt in ratione composita mobilium et temporum et duplicata velocitatum (per prop. 17 praeced.), et mobilia et tempora sunt aequalia (ex hyp.), actiones sunt in duplicata velocitatum, id est hoc loco longitudinum.

Itaque actio transferendi unam libram intra minutum per pedes duos (tres) quadrupla (noncupla) est actionis transferendi unam libram intra minutum per pedem unum. De quo pluribus ad prop. 4 cap. de Potentia.

Propositio 19.

Si aequales sint quantitates materiae mobilium, actiones formales motuum sunt in ratione composita longitudinum motus et velocitatum.

Nam generaliter actiones formales sunt in ratione composita quantitatum materiae, longitudinum et velocitatum (per prop. 10); Ergo si quantitates materiae aequales, erunt in ratione composita longitudinum et velocitatum.

Propositio 20.

Si aequales sint materiae mobilium quantitates, actiones formales motuum sunt in ratione composita ex duplicata longitudinum motus directa et simplice temporum reciproca.

Sunt enim actiones aequalium mobilium in ratione composita longitudinum et velocitatum (per prop. 19), et velocitates sunt in ratione composita ex directa longitudinum et reciproca temporum (per prop. 8 c. 4 sect. 2); ergo actiones sunt in ratione composita ex duplicata directa longitudinum et simplice reciproca temporum.

Scholium.

In propositione 4 dictum est, si eadem longitudo percurratur celeritatibus quatuor sequentibus, et ex iis sit BC ad EG ut LM ad NQ; etiam actionem BC fore ad actionem EG, ut actio LM ad actionem NQ. Hinc prop. 7 collegi, longitudine percursa posita eadem, actiones esse in ratione velocitatum vel simplice vel multiplicata vel submultiplicata; porro excludi multiplicationem vel submultiplicationem, cum nulla sit causa ad rationum compositionem, ac proinde, longitudine posita eadem, actiones fore ut velocitates. Unde postremo colligitur prop. 18, si aequalia sint tempora, actiones fore in duplicata ratione longitudinum vel celeritatum. Sed dicet aliquis, hoc argumentum posse in contrarium verti, nam si in prop. 4 posuissemus non eandem longitudinem, sed idem tempus, non ideo minus videtur potuisse concludi temporibus positis aequalibus actiones fore ut celeritates. Nam poterit dici pari jure, si celeritas BC sit ad celeritatem EG ut celeritas LM ad celeritatem NQ, etiam actionem BC fore ad actionem EF, ut actio LM ad actionem NQ. Et hoc verum esse concedo, cum enim mea sententia hoc casu actiones sint ut quadrata celeritatum sitque cel. BC ad cel. EG ut cel. LM ad cel. NQ, erit etiam quadrat. cel. BC ad quadrat. cel. EG ut quad. cel. LM ad quadrat. cel. NQ. Sed actiones itidem sunt ut haec quadrata. Si hinc jam porro inferas ad prioris argumentationis modum, ergo tempore posito eodem actiones sunt in velocitatum ratione vel simplice vel multiplicata aut submultiplicata, ne hoc quidem abnuo. Hactenus ergo omnia consentiunt; sed in hoc tantum divergium est, quod longitudine posita eadem, nulla habet locum compositio rationum, adeoque actiones erunt ut velocitates, seu reciproce ut tempora; at tempore posito eodem, habet locum rationum compositio, adeoque non licet dicere iisdem positis temporibus actiones fore ut celeritates. Locum autem hic habere compositionem sic ostendo. Sint tres actiones, A facere duplum tempore simplo, B facere duplum tempore duplo, et denique C facere simplum tempore simplo; ratio A ad C, quae est actionum diversis celeritatibus tempore eodem, composita est ex ratione A ad B, quae est actionum diversis celeritatibus longitudine eadem, et B ad C, quae est duplae actionis ad simplam. Unde jam patet, A ad C rationem habere dupla majorem, quod separatim demonstrari merebatur peculiari propositione; quemadmodum et praemittendum erat quod de ratione B ad C dixi-

mus. Sed inter rationem A ad B nulla simplicior ratio interponi potest; itaque nihil aliud dici potest, quam iisdem temporibus actiones esse celeritatibus vel longitudinibus proportionales, seu cum tempora aequalia sunt, actiones esse effectibus continuis mensurandas.

Est et hoc argumentum a priore diversum. Actionum aestimatio composita est ex aestimatione effectuum seu longitudinum et velocitatum; sed longitudines sunt in ratione composita temporum et velocitatum; ergo actiones sunt in consideratione composita ex simplice temporum et duplicata velocitatum. Ergo si tempora sint aequalia, actiones sunt in consideratione duplicata velocitatum; sed haec consideratio duplicata non alia erit quam ratio duplicata. Quod de multiplicata vel submultiplicata ratione collegimus, etiam ex eo patet, quod nulla assumi potest constans, qua opus foret ad relationem alterius naturae.

Caput II.

De Potentia motrice absoluta demonstrata a priori.

Definitio. Potentia absoluta ejus quod movetur est affectus ejus, proportionalis quantitati actionis ex motum habentis statu per se consequentis intra certum tempus, seu quantitati actionis formalis, quam exerceret mobile, si motum per datae magnitudinis tempus uniformiter continuaret. Itaque aequalibus existentibus agendi temporibus, et actionibus formalibus positis uniformibus, potentiae motrices absolutae sunt ut actiones formales.

Ponamus (fig. 95) A in motu esse positum, et in loco $_1A$ ita esse affectum, ut continuato uniformiter motu, tempore T absoluturum sit longitudinem $_1A_2A$; similiterque B eodem (vel aequali) tempore longitudinem $_1B_2B$ Itaque potentiam mobilis A in loco $_1A$ existentis ajo esse ad potentiam mobilis B in loco $_1B$ existentis, ut actio formalis motus $_1A_2A$ ad actionem formalem motus $_1B_2B$, seu potentias absolutas motuum aestimo quantitatibus actionum, quae per se ex agentium statu consequuntur. Et potentiae absolutae mobilium in motu existentium perinde erunt ut actiones uniformes transferendi mobilia ipsa per aliquas longitudines intra datum tempus, ita ut revera nihil aliud sit actionem esse uniformem, quam potentiam in tempus ductam esse seu potentiam per tempus fluere vel exerceri. Et quod in potentia momentaneum est (quae enim moventur, quovis momento habent potentiam), id in actione per se consequente ex statu potentiae seu ex statu momentaneo est successivum seu continuatum: unde infra prop. 7 ostendemus, actiones esse in ratione composita temporum et potentiarum seu ut rectangula sub temporibus et potentiis. Distinguo autem potentiam mobilis **absolutam**, in corpore per se consideratam, a **respectiva**, qua aliud percutit, de qua suo loco.

Propositio 1.

Si duo mobilia eandem habeant materiae quantitatem eandemque velocitatem, erunt potentiae ipsorum aequales.

Sint (fig. 96) mobilia aequalia A et B, et velocitates eorum aequales; ajo et potentias eorum esse aequales. Nam ob velocitates aequales continuato uniformiter motu aequali, aequales describent longitudines (per defin. 2 cap. 4 sect. 2), itaque actiones erunt aequales (per def. 3 cap. 1 sect. 3); ergo et potentiae (per defin. praeced. hic).

Propositio 2.

Si duorum mobilium velocitates sint aequales, erunt potentiae eorum motrices absolutae in proportione ipsorum mobilium.

Sint (fig. 97) mobilium ABC (librarum duarum) et LMNP (librarum trium) velocitates aequales, dico esse potentiam ipsius AB ad potentiam ipsius LMN ut mobile AB ad mobile LMN (seu ut 2 ad 3). Si AB et LM sint commensurabiles, sumatur eorum mensura communis F. Jam cum quaelibet pars ipsius ABC vel LMNP aequalis ipsi F, velut AB vel LM, aequalis sit, et praeterea aequali moveatur velocitate (subintelligimus enim semper motum esse aequidistributum, ubi per prop. 6 cap. 4 sect. 2 velocitates eorum, quae mobili eidem insunt, sunt aequales), erunt eorum potentiae aequales (per prop. 1 hic), verbi gr. potentia ipsius AB aequalis est potentiae ipsius LM. Ergo toties aequalis potentia inest mobili cuique, quoties mensura mobilium communis (ut potentia transferendi unam libram velut AB per unum pedem ${}_1A_1B$ minuto temporis T, inest mobili ABC bis, et mobili LMNP ter). Potentia autem totius componitur ex potentiis partium. Itaque potentia tota mobilis ABC est ad potentiam totam mobilis LMNP ut numeri repetitionum mensurae communis (2 ad 3), id est, ut ipsa mobilia ABC, LMNP. Quod si mobilia sint incommensurabilia, sufficit pro iis assumi commensurabilia tam parum ab ipsis differentia, ut error sit minor errore quovis dato, adeoque error erit nullus. Eadem propositio sic brevius ostenditur, quia duo mobilia ABC et LMNP aequali velocitate praedita sunt, aequali tempore easdem motu uniformi describent longitudines (per def. 2 cap. 4 sect. 2). Itaque tunc actiones eorum sunt ut mobilia (per prop. 1 cap. 1 sect. 3), et proinde (per defin. hic praeced.) potentiae erunt ut mobilia.

Nimirum **potentia transferendi duas libras per unum pedem intra unum minutum dupla est potentiae transferendi unam libram per unum pedem intra unum minutum.** Bis enim continet potentiam transferendi unam libram per unum pedem intra unum minutum. Quemadmodum et actio transferendi duas libras per unum pedem intra unum minutum dupla est actionis transferendi unam libram per pedem unum intra unum minutum (per prop. 2 cap. 1 sect. 3).

Propositio 3.

Aequales potentiae possunt movere aequales materiae quantitates per longitudines diversas, modo longitudines motuum sint temporibus proportionales.

Nam (fig. 98) si duo mobilia A et B sint ejusdem velocitatis, et A tempore T transferatur per longitudinem ${}_1A_2A$, et B tempore E per longitudinem ${}_1B_2B$, erunt longitudines temporibus proportionales, seu ${}_1A_2A$ ad ${}_1B_2B$ ut T ad E (per prop. 5 cap. 4 sect. 2). Jam mobilia sunt aequalia (ex hypoth.) et mobilia aequalia ejusdem velocitatis sunt aequalis potentiae (per prop. 1 hic). Ergo aequales potentiae possunt eandem materiae quantitatem transferre per longitudines diversas diversis temporibus, quae sint longitudinibus proportionalia.

Idem sequitur ex prop. 1 de action., item ex prop. 15. Nam cum in praesenti casu actiones sint ut tempora per dictam prop. 13, ergo aequalibus temporibus erunt aequales actiones, itaque (per def. potentiae praeced.) erunt aequales potentiae.

Nimirum **ejusdem potentiae est transferre unam** libram per unum pedem intra unum minutum et transferre unam libram per duos pedes intra duo minuta. Ex priore enim posterius sponte consequitur, continuato motu et utrobique aequali tempore sumto actio est aequalis, ideoque et potentia.

Propositio 4.

Si mobilia aequalem contineant materiae quantitatem, potentiae motrices absolutae sunt in ratione duplicata velocitatum seu ut velocitatum quadrata.

Nam potentiae motrices absolutae sunt ut actiones formales motuum uniformiter exercitae intra tempora aequalia (per def. 1 hic), et mobilia sunt aequalia (ex hyp.). Aequalibus autem existentibus mobilibus et temporibus actiones formales sunt in duplicata ratione velocitatum (per prop. 18 cap. praeced.). Sed altius ordiendo idem sic conficiemus. Sint (fig. 99) aequalia mobilia A et B, et velocitates eorum sint graduum C(1) et D(2); ajo esse potentiam ipsius A ad potentiam ipsius B, ut quadratum ipsius C (seu ut 1) ad quadratum ipsius D (seu 4). Ponamus mobile A tempore TE motu uniformi transferri per longitudinem ${}_1A_2A$, et mobile B tempore aequali TE transferri motu uniformi per longitudinem ${}_1B_2B_3B$, erunt longitudines ut velocitates (per prop. 4 cap. 4 sect. 2) seu ${}_1A_2A$ ad ${}_1B_2B_3B$ ut C(1) ad D(2). Assumatur longitudinis ${}_1B_2B_3B$ pars ${}_1B_2B$ (percursa parte temporis TM) et ob motum uniformem (ex hyp.) eadem, qua tota longitudo, velocitate. Jam ob mobilia A et B aequalia et aequales longitudines ${}_1A_2A$ et ${}_1B_2B$ erit actio transferendi uniformiter mobile A per longitudinem ${}_1A_2A$ ad actionem transferendi aequale mobile B per aequalem longitudinem ${}_1B_2B$ ut eorum velocitates, seu ut velocitas C(1) ad velocitatem D(2) (per prop. 7 cap. praec.) id est, ut longitudo ${}_1A_2A$ ad longitudinem ${}_1B_2B_4B$; rursus actio tranferendi B per longitudinem ${}_1B_2B$ est ad actionem transferendi idem per longitudinem ${}_1B_2B_3B$, eadem (ob motum uniformem) velocitate D, ut longitudo ${}_1B_2B$ id est ${}_1A_2A$ ad longitudinem ${}_1B_2B_4B$ (per prop. 1 cap. praec.). Itaque jungendo prima postremis, actio transferendi mobile A per longitudinem ${}_1A_2A$ est ad actionem transferendi mobile aequale B per longitudinem ${}_1B_2B_3B$ tempore aequali, in duplicata ratione longitudinum ${}_1A_2A$ ad ${}_1B_2B_3B$. Sed ob aequalia tempora longitudines sunt ut velocitates, ut ostensum est. Itaque

actiones sunt in duplicata ratione velocitatum. Sed si aequalia sint tempora et actiones sint uniformes, utique potentiae sunt ut actiones (per defin. potentiae hic). Sunt ergo potentiae aequalium mobilium in duplicata ratione velocitatum seu ut velocitatum quadrata.

Haec est propositio, quae etsi ex principiis manifestissimis facili consequentia nascatur, nescio quomodo tamen hactenus accuratam indagantium perspicaciam effugit. Placet autem cum probatione sua eandem familiarius proponere ad omnium captum hoc modo.

In actionibus uniformibus (ubi quodvis punctum mobilis aequalibus temporibus aequales percurrit longitudines) et aequidistributis (ubi longitudines a quibuslibet mobilis punctis simul descriptae sunt aequales) actio (L) transferendi unam libram intra unum minutum per longitudinem veluti trium pedum tripla est actionis transferendi unam libram triplo tempore seu intra tria minuta per eandem longitudinem, nempe trium pedum. Quod demonstravimus prop. 7 cap. praec. assumto axiomate, quod major actio sit idem efficere minore tempore; quamquam haec ipsa conclusio pro axiomate assumi possit, duplum (vel triplum) esse idem efficere dimidio tempore (aut tertia ejus parte) adeoque triplam esse actionem transferendi idem pondus per eandem longitudinem intra temporis trientem.

Rursus actio (M) transferendi unam libram triplo tempore seu tribus minutis per longitudinem triplam seu per tres pedes tripla est actionis (N) transferendi unam libram simplo tempore seu uno minuto per longitudinem simplam unius pedis. Hoc generalius demonstravimus prop. 13 cap. praec. Sed idem per se ita manifestum redditur: Actio (M) transferendi unam libram tribus minutis per tres pedes ter continet actionem (N) transferendi unam libram uno minuto per unum pedem. Nam qui transfert tribus minutis per tres pedes (in motu scilicet uniformi et aequidistributo, ut subintelligimus), is primo minuto transfert per unum pedem, et secundo rursus, et tertio tertia vice; actio autem, quae aliam actionem ter praecise repetit, utique ejus tripla est. Nam totum, triplum est partis, qua ter repetita totum componitur.

Igitur actio (L) transferendi unam libram intra unum minutum per longitudinem triplam seu trium pedum noncupla est actionis (N) transferendi unam libram uno minuto per longitudinem simplam seu unius pedis. Cum enim actio L sit tripla ipsius M, et actio M sit tripla ipsius N, erit actio L noncupla ipsius N.

Porro Potentiae transferendi sunt ut actiones transferendi uniformes intra aequale tempus exercitae, seu potentia libram transferendi uniformiter (seu constanti velocitate) intra minutum per longitudinem unam est ad potentiam transferendi uniformiter libram intra minutum per longitudinem aliam, ut ipsa actio transferendi prior ad posteriorem, per positam defin. potentiae, quam actione ex ipsa per se consequente (adeoque uniformi) intra datae magnitudinis tempus exercenda aestimamus. Nempe in potentia momentaneum est, quod in actione succedente per tempus uniformiter est diffusum.

Itaque potentia transferendi unam libram intra unum minutum per longitudinem trium pedum est noncupla potentiae transferendi unam libram intra minutum per unum pedem, seu potentiae absolutae mobilium aequalium sunt ut quadrata longitudinum translationis intra aequalia tempora absolvendarum. Nam per articulum praeced. sunt potentiae dictae ut actio L ad actionem N, actionem autem L actionis N noncuplam esse ostensum est.

Jam (in motibus uniformibus et aequidistributis) velocitates sunt ut longitudines translationum aequalibus temporibus absolvendae, seu velocitas mobile intra minutum transferendi per tres pedes tripla est velocitatis intra minutum transferendi mobile per unum pedem, ut manifestum est et demonstravimus prop. 4 cap. 4 sect. 2.

Itaque tandem potentiae absolutae mobilium aequalium sunt ut quadrata velocitatum, seu duplicata (triplicata) velocitate mobilis, potentia fit quadrupla (noncupla). Et eleganter evenit, ut velocitatibus per rectas repraesentatis, potentiae corporis per rectarum potentias (quas vaticinio quodam sic appellarunt Geometrae) exprimantur.

Propositio 5.

Potentiae motrices absolutae sunt in ratione composita ex simplice mobilium et duplicata velocitatum, vel ex simplice mobilium et duplicata longitudinum, per quas mobilia ex virtute potentiarum suarum intra tempus datum uniformiter sese essent translatura.

Sint (fig. 100) mobilia ABC et LM earumque velocitates CD vel ${}_1C_2C$ et MN vel ${}_1M_2M$; ajo esse potentiam mobilis ABC ad potentiam mobilis LM in ratione composita mobilium ABC et LM et quadratarum velocitatum, seu esse potentias ut rectangula ${}_1A_1C_2C_1D$ et ${}_1L_1M_2M_1N$, quorum altitudines sint ut mobilia AC, LM, bases ut velocitatum quadrata. Nam si mobilia sint aequalia, utique potentiae sunt ut quadrata velocitatum, adeoque in ratione composita mobilium, hoc loco aequalium, et quadratarum velocitatum. Sin mobilia sint inaequalia, et alterutrum ABC majus, sumatur ipsius pars AB aequalis minori mobili LM: potentia ipsius ABC est ad potentiam ipsius AB ut mobilia, ABC ad AB (ob velocitatem communem per prop. 2 hic). Sed potentia ipsius AB est ad potentiam ipsius LM, mobilium aequalium, ut quadrata velocitatum CD et MN (per prop. 4 hic). Ergo jungendo prima postremis, potentia ipsius ABC erit ad potentiam ipsius LM in ratione composita mobilis ABC ad AB seu ad mobile LM et quadratarum velocitatum D_2C ad N_2M. Velocitates autem sunt ut longitudines aequalibus temporibus percurrendae (per prop. 4 c. 4 sect. 2); itaque etiam potentiae erunt in ratione composita mobilium simplice et harum longitudinum duplicata.

Nimirum potentia transferendi tres libras per duos pedes est duodecupla potentiae transferendi unam libram per unum pedem.

Propositio 6.

Si quadrata velocitatum vel longitudinum translationis aequalibus temporibus absolvendarum sint mobilibus reciproce proportionalia, potentiae motrices absolutae sunt aequales; et vicissim, si potentiae sint aequales, quadrata dicta sunt mobilibus reciproce proportionalia.

Retenta figura propositionis praeced. sit mobile AC ad mobile LM ut quadratum MNP ad quadratum DE; manifestum ergo est (ex Elementis) factum ex extremis aequari facto ex mediis, seu rectangulum solidum ACE, potentiam mobilis AC, aequari rectangulo LMP, potentiae mobilis LM, unde et conversa manifesta est.

Nimirum ejusdum potentiae est motu uniformi (horizontali) aequali tempore transferre novem libras per unum pedem, et unam libram per tres pedes; sive corpus unius librae et velocitatis trium graduum tantundem habet potentiae, quantum corpus novem librarum velocitatem habens unius gradus.

Propositio 7.

Actiones sunt in ratione composita potentiarum a quibus exercentur, et temporum quibus durant; vel potentiae sunt in ratione composita ex actionum directa et temporum exercitae actionis reciproca.

Nam actiones sunt in ratione composita mobilium, duplicatarum velocitatum et temporum, prop. 17 cap. de Act. formal. Sed potentiae absolutae sunt in ratione mobilium et duplicatarum velocitatum (per prop. 5ª hic). Ergo actiones sunt in ratione composita potentiarum et temporum.

Propositio 8.

Potentiis existentibus aequalibus actiones sunt ut tempora quibus exercentur.

Nam actiones sunt in ratione composita potentiarum et temporum per praecedentem. Jam potentiae sunt in ratione aequalitatis (ex. hyp.), ergo actiones sunt in ratione temporum.

Hinc quoniam infra ostendemus, eandem in mundo servari quantitatem potentiae, consequens est actionum in Universo (vel etiam in Machina quacunque cum aliis non communicante) exercitarum quantitates esse ut tempora, adeoque aequalibus temporibus aequalem esse actionum in Universo exercitarum quantitatem.

Admonitio 1.

Corpora consideramus ut in medio liberrimo translata et gravitate exuta, vel si gravitatem ipsis relinquamus, ut mota in horizonte. Ita ut motus sit uniformis, ubi ostendimus potentias esse ut quadrata translationum; sed in motu uniformiter accelerato vel retardato qualis gravium

est, potentiae ponderum aequalium sunt ut ipsae translationes perpendiculares horizonti, id est ut altitudines, quod ex hac ipsa aestimatione nostra consequitur. Altitudines enim sunt ut quadrata velocitatum, quarum vi corpora sese ad eas altitudines attollere possunt; et iisdem existentibus ponderibus seu corporum motibus, potentiae (ut ostendimus) sunt etiam ut quadrata velocitatum. Itaque si pondera sint inaequalia, sed reciproce ut altitudines, ita ut tanto majus sit pondus, quanto minor altitudo, potentiae attollendi sunt aequales. Quod cum pro concesso habeatur, hinc demonstrationes nostrae a posteriori confirmantur. Sed ita stare non potest, quod vulgo sibi persuadent potentias esse in ratione composita simplice velocitatum et mobilium. Ita enim fieri nequit (quemadmodum mox uberius ostendetur) ut ejusdem potentiae sit attollere grave unius librae ad altitudinem trium pedum, et attollere grave trium librarum ad altitudinem unius pedis, quod tamen merito omnes agnoscunt.

Admonitio 2.

Propositiones praecedentes circa actionem et potentiam intelliguntur de motibus uniformibus et aequidistributis, sed tamen et aliis accommodari possunt.

Nam cum mobile non movetur motu aequidistributo, sed diversae ejus partes diversas habent velocitates, attribui ipsi toti potest communis quaedam velocitas media, quam obtinere licet ope centri gravitatis totius. Et cum mobile per aliquod tempus non movetur motu uniformi, attribui ipsi potest velocitas constans mediae potentiae inter velocitates mobili toto tempore competentes. Ita motum aequidistributum totius mobilis et uniformem totius temporis habebimus, motibus partium propositis ipsa magnitudine actionum et potentiarum in summa aequivalentem.
