in duabus horis duplum est percursionis unius leucae in una hora, si enim duae leucae percurrantur in duabus horis, bis fit actio percurrendi unam leucam in una hora). Ergo N est quadruplum ipsius L (duas leucas percurrere in una hora quadruplum est percursionis unius leucae in una hora), seu duplam celeritatem per aequale tempus habere quadruplum est, et similiter triplam habere, noncuplum; et ita porro. Jam actiones uniformes tempore aequali durantes sunt inter se ut potentiae agendi; itaque absolute, si in mobili aequali celeritas sit dupla, erit potentia quadrupla, seu aequalibus positis corporibus potentiae sunt in duplicata ratione velocitatum. Unde manifestum est, potentias corporum inaequalium esse in ratione composita ex simplice corporum ac duplicata velocitatum. Itaque si tota potentia corporis A, 4, praediti velocitate ut 1 debeat dari corpori B, 1, hoc debet accipere velocitatem ut 2. Nam A, 4 in 1 (quadratum velocitatis 1) idem producit quod B, 1 in 4 (quadratum velocitatis 2), quod erat demonstrandum.

Scholion ad demonstrationem 4.

Quamquam haec demonstratio ultima ad gustum captumve omnium fortasse non sit, iis tamen qui liquidam veritatum perceptionem quaerunt, imprimis placere debet. Mihi certe ut postrema reperta est, ita dignitate prima videtur, cum a priori proficiscatur et ex sola spatii ac temporis contemplatione nascatur sine ulla assumptione gravitatis aliarumve hypothesium natura posteriorum. Inde jam non tantum consensus habetur veritatum insignis, sed et via aperitur nova demonstrandi propositiones Galilaei de motu gravium sine hypothesi qua ille uti debuit, quod scilicet in motu illorum uniformiter accelerato aequalibus temporibus aequalia velocitatis incrementa acquirantur. Id ipsum enim pariter ac Lemma supra positum ex demonstratione hac nostra quarta ab ipsis independente concludi potest. Quod imprimis memorabile maximique ad perficiendam motuum scientiam momenti visum est.

Sectio prima.

DE QUANTITATE MATERIAE ET DE AESTIMATIONE IN UNIVERSUM.

Caput I.

De rerum aestimatione in universum.

Definitio 1. Quantitas exprimitur numero (partium) congruentium et incommunicantium, quae constituunt rem quantitate praeditam.*)

Ita quantitas passus B (fig. 33) est quinque pedalitas et exprimitur quinario pedum, hoc est numero quinque partium incommunicantium seu nullam partem communem habentium, congruentium autem pedi A, adeoque et congruentium inter se.

Haec**) est ratio, ut obiter dicam, cur Logistica vel Algebra***), quae nihil aliud est quam scientia de numero generali sive incerto (ut de C, D, E loco 3, 4, 5), simul sit Scientia de quantitate in universum, et plus possit quam videtur posse. Hinc etiam comparare interdum possumus†), quae hactenus calculum non subiere. Sic actio puncti A motu uniformi intra duas horas percurrentis duas leucas, est dupla††) puncti B intra horam percurrentis unam leucam; nam quod prior actio continet bis, id posterior semel, cum A†††) intra horam percurrat leucam, et*†) rursus intra horam percurrat leucam; quae consideratio nobis profuit ad veram quantitatem potentiae motus**†) inveniendam.

---

*) Im Original hat Leibniz, nachdem die Abschrift schon genommen, beigeschrieben: Quantitas rei exprimitur numero partium incommunicantium eidem mensurae tanquam unitati congruentium.

**) Für die Worte: Haec est ratio, hat Leibniz später geschrieben: Cum quantitas rei idem sit quod Numerus indefinitus partium, qui varius est prout pars mensurans major minorve assumitur, hinc ut obiter dicam, ratio petenda est, cur Logistica etc.

***) Später hinzugefügt: latissime accepta.

†) Für die Worte von „Hinc — possumus“ schreibt Leibniz später: Ex nostra etiam Quantitatis definitione aestimare discimus, quae hactenus etc.

††) „actionis“ später hinzugesetzt. †††) et B.

*†) für „et“ später geschrieben „sed B“.

**†) für „motus“ später geschrieben „motricis“.

Definitio 2. *Mensura est, cujus numerus quantitatem exprimens est unitas, seu quod congruit cuivis earum partium, quarum numerus facit quantitatem.* Ut pes in exemplo praeced. congruit cuilibet ex quinque partibus inter se congruentibus et incommunicantibus ipsius passus, atque ea ratione pes est mensura passus, seu si pes sit 1, passus est 5.

Si tamen passus notior sit pede, vicissim utiliter passum adhibebimus ut mensuram pedis; nam numerus pedis quantitatem exprimens erit $\frac{1}{5}$ passus, seu unitas passus per 5 divisa, seu pes est ad passum ut $\frac{1}{5}$ ad unitatem, vel etiam est $\frac{1}{5}$ absolute, si ipse passus dicatur unitas. Neque enim tantum numeros intelligimus integros, sed et fractos, imo irrationales; ideo licet mensurandum propositum sit mensurae *incommensurabile*, ut vocant, non ideo minus recte quantitas ipsius exprimetur per numerum irrationalem, posito mensuram exprimi per unitatem. Et vero semper incommensurabilia reduci possunt ad commensurabilia ab iis minus differentia, quam est error datus.

Definitio 3. *Homogenea sunt, quae per eandem mensuram cognoscuntur.* Ita homogenea est linea lineae, superficies superficiei, solidum solido, tempus tempori, celeritas celeritati. Mensura autem communi cognoscuntur etiam curva et recta, aut plana et gibba, imo etiam incommensurabilia. Nec obstat, quod saepe resolutio quaedam in infinitum vel saltem indefinite producibilis consideranda est, antequam rei quantitas per Mensuram inveniatur.*).

Definitio 4. *Aequalia sunt, quorum eadem est quantitas,* seu quae per eandem mensuram eodem modo exprimuntur. Homogenea igitur sint, necesse est.

Definitio 5. *Minus est, quod alterius (majoris) parti aequale est.* Itaque *in majore sumi potest pars aequalis minori;* quo postulato saepe indigemus in demonstrationibus. *Et pars est minor toto;* nam pars est aequalis parti totius (nempe sibi), quod autem parti totius aequale est,

*) Von Leibniz später hinzugesetzt: Interim homogenea incommensurabilia, etsi per eandem Mensuram seu unitatem aestimantur, seu quoad quantitatem cognoscuntur, non tamen eadem mensura duo inter se incommensurabilia metitur, seu non possunt haec ejusdem mensurae repetitione exacte exhauriri.

id toto minus est (per definit. minoris). Itaque pars toto minor est, seu totum est majus parte. *Et totum est aequale summae partium incommunicantium,* cum numerus ejus colligatur ex numero partium. Oportet autem partes esse incommunicantes, alioquin idem bis in calculum veniret.

Definitio 6. *Relatio Quantitatum est modus unam quantitatem inveniendi per aliam.*

Definitio 7. *Ratio seu Proportio est relationum simplicissima, seu potius habetur per Relationem quantitatis simplicissimam, nempe quae est inter duo homogenea sine assumtione homogenei tertii.* Itaque sufficit, dato numero exprimente quantitatem unius, dari numerum exprimentem quantitatem alterius; ut si dicam A esse 2, posito B esse 3; seu A esse $\frac{2}{3}$ ipsius B; item si dicam esse latus quadrati quod sit duplum quadrati ipsius B. Et ita (in triangulo) ordinatae (seu Basi parallelae) a recta (ut hypotenusa) ad axem (ut cathetum) ductae habent relationem simplicem communem seu rationem constantem ad respondentes abscissas seu partes axis inde a puncto fixo sumtas. Sed in circulo relatio communis inter ordinatam et abscissam, verbi gratia inter sinum rectum et sinum complementi, non est ratio communis, vel quod idem est, sinus complementi non sunt sinubus rectis proportionales, cum assumendum sit aliquid tertium homogeneum utrique, nempe radius; nam relatio generalis inter sinum rectum et sinum complementi in eo consistit, quod eorum quadrata simul aequantur quadrato radii.

Ex hac definitione rationis sequitur (ut obiter moneam), aequationes hujusmodi (in quibus x et y sunt ordinatae et abscissae) $xx + ayy = bxy$, vel $cx^3 + yyx + exxy = fy^3$, et similes in infinitum, esse ad lineam rectam, quia salva lege homogeneorum, constantes a, b, c, e, f pro numeris haberi possunt, ita ut nulla tertia homogenea praeter x et y assumatur; unde inter ipsas datur ratio constans.

Cum ratio A ad B rationis C ad D multipla dicitur, tunc intelligitur numerum, qui exprimit quantitatem seu valorem ipsius A, posito B esse unitatem, esse multiplum numeri, qui exprimit valorem ipsius C, posito D esse unitatem. Sic ratio novenarii ad binarium tripla est rationis ternarii ad binarium.

Componitur ratio A ad B ex rationibus L ad N, et M ad P, si sumta quadam E sit A ad E ut L ad N, et E ad B ut M ad P. Et numerus ipsius A est ad numerum ipsius B, ut factum multiplicando numeros L, M ad factum multiplicando numeros N, P.

Cum ratio A ad B multiplicata dicitur rationis C ad D, intelligitur numerus rationum aequalium rationi C ad D, interponibilium inter rationem A ad B, seu logarithmus, esse multiplus, vel quoties sumenda sit ratio C ad D, ut inde componatur ratio A ad B. Veluti si sit A ad E ut C ad D, et E ad F ut C ad D, et F ad B ut C ad D, dicetur ratio A ad B esse triplicata rationis C ad D, composita scilicet ex ipsa ter sumta et multiplicatione instituta reperietur esse A ad B ut cubus de C ad cubum de D.

Caput II.

De quantitate materiae seu volumine et densitate*).

Definitio 1. Volumen seu Extensio Materiae est magnitudo loci, quem occupat Materia, loci scilicet (proprii id est) congruentis seu minimi quem tunc habet.

Ut si (fig. 34) mobile A ex loco $_{1}A$ sit translatum in locum $_{2}A$ intra sphaeram B(B), et ipsius $_{2}A$ magnitudo sit pes cubicus, dicemus pedem cubicum esse volumen mobilis A in $_{2}A$ existentis. Etsi autem A existens in $_{2}A$ etiam existat in Sphaera B(B), locus tamen, qui volumen ejus determinat, proprius intelligitur seu minimus, qui ei ut nunc situm est assignari potest. Itaque licet sphaera quoque sit locus ipsius A, est tamen communis, non proprius, quia pars ut (B) a sphaera potest resecari salvo loco mobilis minoris inclusi. Unde (ut obiter dicam) locus non est superficies ambientis, alioqui puncta et lineae non forent in locis sibi propriis. Intelligitur autem locus proprius praesens seu quem mobile nunc habet, fieri enim potest fortasse ut alio tempore rarefactum aut condensatum majorem aut minorem occupet, sed tunc etiam aliud quam nunc volumen habere dicetur.

Definitio 2. Densitas (seu Intensio Materiae) est, cujus quantitates sunt proportionales quantitatibus

---

*) Consulatur Ghetaldi Archimedes promotus. Bemerkung von Leibniz.

materiae (ad rem facientis seu mobile constituentis) voluminibus aequalibus contentae (in gravibus dicitur Gravitas Specifica); opponitur ei Raritas (aut Levitas Specifica).

Ut si (fig. 35) Aër (similaris) duorum pedum cubicorum A et B comprimendo redigatur intra unum pedem C, erit in pede C duplum materiae ejus quae fuit in pede A, et ideo dicetur aër C duplo densior aëre A, duploque ponderosior, et aër A duplo rarior aëre C, duploque levior. Interim non assero in rigore philosophico eandem materiae quantitatem majus minusve volumen occupare posse, imo contrarium verius puto; nobis vero hic sufficit, ad sensum sic videri, etsi fortasse materia levior revera sit spongiosior, nec volumen suum exacte impleat, interfluente alia materia tenuiore, sed quae ad rem non facit, nec mobile de quo agitur constituit, nec in motu ejus computatur. Caeterum etsi mobile in diversis partibus diversae sit densitatis, nihilominus ipsi certa densitas seu specifica gravitas media attribuitur, ea ipsa scilicet, quam definitio indicat. Et sane non perfectam in rigore philosophico similaritatem necessariam esse ex metallis in unam massam fusis intelligi potest, etsi enim aurum in mixtura salvum maneat pariterque argentum, et proinde nihil aliud quam aequalis distributio per partes voluminis sensibiles postuletur, perinde tamen loquimur ac si nullum esset punctum, in quo non gravitas specifica nova ex auro argentoque mistis resultans existat. Interim notandum, corpus posse esse dissimilare, et tamen aequabilis ubique seu uniformis gravitatis, ut si pars sit argentea, pars ex stanno per plumbum ita temperato, ut ligatura argentum gravitate specifica aequet.

Definitio 3. Moles est quantitas materiae in mobili contentae (et in gravibus dicitur Pondus), itaque moles sunt ut mobilia.

Sunt qui molem pro volumine accipiunt, ego pro pondere malim, quod movere utique majoris molis esse Latini dicent. Itaque in auro caeteris paribus plus dicimus materiae ad rem facientis sive molis esse, quam in pumice, minus tamen in nummo aureo, quam in frusto pumicis cubitali; in libra autem plumbi tantum erit materiae, quantum in libra ex levissimis plumis congestis facta. Pondus autem nobis indicat quantitatem materiae ad rem facientis, seu quae a nobis percipi potest. Nec unquam pondera nisi proportione additorum aut detractorum ponderosorum augeri minuive compertum est. Hic tamen abstrahendo animum a sensibus generaliter intelligo quantitatem materiae ad rem facientis seu ad mobile pertinentis; unde aliquando excluditur quod est in poris. Et si vas vel corpus porosum ponderetur in aqua, non computatur pondus aquae quod continetur in vase aut in poris.

Propositio 1.

Moles ejusdem densitatis, seu quarum quaeque densitatem ubique aequalem vel constantem habet, sunt ut volumina.

Hoc per se manifestum est, globum aureum esse ad cubum aureum, ut globus ad cubum.

Propositio 2.

Moles aequalis voluminis sunt inter se ut densitates.

Consectarium est definitionis 2 hic. Ita si per idem foramen ducendo metalla obtineantur duo fila ejusdem longitudinis, unum aureum, alterum argenteum, pondera eorum erunt ut gravitates specificae, id est pondus fili aurei erit paulo minus duplo ponderis fili argentei.

Propositio 3.

Moles mobilium, vel ipsa mobilia, sunt in ratione composita voluminum et densitatum, seu extensionum et intensionum materiae.

Sint (fig. 36) moles ACL et DEM, quarum volumina sint ut AC ad DE; at densitates ut F ad G. Si quidem aequalia essent volumina, forent moles ut densitates (per prop. 2) id est in ratione composita densitatum et voluminum, quia ratio aequalitatis nil mutat. Si volumina sint inaequalia, tunc id, quod est majus, vel aequabilis ubique sive constantis est densitatis, vel non; hoc est, vel eandem in suis partibus omnibus densitatem habet, vel diversam. Si aequabilis ubique est densitatis, sumatur ejus Pars ABN, volumine ut AB aequalis ipsi DE. Jam moles ACL est ad molem ABN, ut volumen AC ad volumen AB seu DE (per prop. 1), nam densitates sunt aequales. Et moles ABN est ad molem DEM, ut densitas F ad densitatem G (per prop. 2), quia volumina sunt aequalia. Ergo jungendo prima postremis moles densitate aequabilis ACL est ad molem quamcunque volumine minorem DEM

in ratione voluminum AC ad DE et densitatum F ad G. Quod in ACL moles volumine major non sit constantis seu aequabilis ubique densitatis, assumatur alia quaecunque moles PQR cujus volumen ut PQ sit majus quam AC, adeoque et quam DE, densitas autem sit quaecunque ut S ubique eadem. Cum igitur (per jam demonstrata) sit moles DEM ad molem volumine majorem ac densitate similarem seu uniformem PQR in ratione composita DE et G ad PQ et S; similiterque moles eadem PQR ad molem ACL in ratione composita PQ et S ad AC et F; ergo jungendo prima postremis erit moles DEM ad molem ACL in ratione composita DE et G ad AC et F, voluminum scilicet et densitatum.

Habet aliquid notatu dignum haec demonstratio generalis circa molem quamcunque mobilis etiam densitatem in diversis partibus variam habentis; quae tamen semper ostenditur esse in ratione composita voluminum et densitatum, licet densitas quaedam media inter variarum partium densitates pro ipsa mobilis densitate ex definitionis praescripto assumatur. Itaque si massa quaedam ex variis constet partibus diversae densitatis sive gravitatis specificae, qualis esse possit aggregatum mille nummorum pondere et ligatura metalli valde variantium, poterit nihilominus toti massae communis quaedam assignari gravitas specifica seu densitas singulis licet nummis non exanimatis, si scilicet ope aquae exploretur quantum tota massa spatii occupet, et ope librae quantum ponderet. Et eadem quoque futura esset gravitas specifica constans massae quae fieret ex omnibus in unum conflatis; quae clarius habebuntur exemplo problematum mox secuturorum.

Propositio 4.

Si plures sint moles, quarum densitates (constantes vel inconstantes) sint aequales, ipsae moles erunt ut volumina, et vicissim, si moles sint ut volumina, densitates erunt aequales.

Patet ex prop. praecedenti 3, quia ratio aequalitatis quae est densitatum in rationum compositione abjici vel adjici possit. In propositione 1 tantummodo habebatur veritas in casu constantium densitatum, et cum ejus ope demonstrata sit propositio 3, nunc vicissim ope propositionis 3 ipsa prop. 1 redditur generalior. Nimirum si duo sint fila per idem foramen ducendo obtenta, unum altero longius duplo, et ponamus volumina eorum (hoc loco longitudines) esse ut pondera, erunt ipsa gravitatis specificae aequalis; idque verum foret, etiamsi unumquodque filum esset compositum ex diversorum metallorum filis (ejusdem semper foraminis seu crassitiei), reperietur enim, unoquoque filo composito in unam massam fuso, massas factas fore gravitatis specificae aequalis.

Propositio 5.

Si moles sint ut densitates, volumina sunt aequalia.

Sequitur itidem ex prop. 3. Nam aequalia esse necesse est volumina, ut ratio eorum in compositione adimi possit salva manente ratione composita seu ut ratio composita voluminum et densitatum eadem sit, quae densitatum.

Est conversa prop. 2. Ut si duo sint nummi ejusdem ligaturae (seu proportionis eorundem metallorum) et ponderis, erunt ejusdem voluminis et inde per idem foramen duci possent aequalis longitudinis fila. Idem esset de vasis, licet alterius metalli esset pes, quam caput, modo media gravitas specifica (quae scilicet fundendo oriretur) esset eadem et tunc longitudo fili integri licet filis diversarum partium diversorum metallorum compositi utrobique aequalis prodibit.

Propositio 6.

Si moles sint aequales, volumina et densitates sunt reciproce proportionales.

Patet etiam ex prop. 3, nam in omni ratione composita hoc locum habere constat ex Elementis. Itaque si sint duo nummi, unus aureus, alter argenteus, ejusdem ponderis, necesse est argenteum aureo magnitudine circiter esse duplum, quoniam auri gravitas specifica duplo circiter major est, quam argenti. Et ideo, si per idem foramen ambo ducantur, argenteus duplo fere longius filum dabit. Idemque verum est de duobus vasis aequalis ponderis, quorum quodque sit ex dissimilibus partibus compositum, ut fila dent in contraria ratione gravitatum specificarum mediarum, quae ex fusione orirentur.

Propositio 7. Problema.

Data proportione voluminum et densitatum in partibus componentibus, definire densitatem seu gravitatem specificam compositi.

Specificae gravitates seu densitates, ut auri, argenti, aeris (Solis, Lunae, Veneris) notentur per numeros s, l, v; et volumina seu extensiones partium cujusque metalli per numeros a, b, c; erit gravitas specifica compositi, ut numerus $as + bl + cv$ divisus per numerum $a + b + c$. Nam as, bl, cv notant partium moles (per prop. 3) quae componunt molem totius. Et $a + b + c$ notat volumen totius compositum ex voluminibus partium. Quoniam igitur numerus voluminis $a + b + c$ multiplicans numerum gravitatis specificae dat molis quantitatem $as + bl + cv$ (per prop. 3), ideo vicissim numerus molis seu ponderis divisus per numerum voluminis dabit numerum gravitatis specificae. In exemplo, si tria fila ejusdem crassitiei sumantur, aureum, argenteum et aereum, quorum longitudines sint pedum 3, 4, 5 (seu a, b, c) respective, ex his fusis fieri debet massa. Jam auri, argenti et aeris gravitates specificae sunt circiter ut 10, $5\frac{1}{2}$, $4\frac{4}{5}$, seu filorum unus pes 10, $5\frac{1}{2}$, $4\frac{4}{5}$ granorum (s, l, v) et pondera partium (as, bl, cv) erunt 30, 22, 24 granorum, quorum summa seu pondus totius 76 granorum divisum per volumen totius $3 + 4 + 5$ seu 12 pedes dabit $76:12$ seu $6\frac{1}{3}$ pro gravitate specifica massae ex filis, seu si ex filis dictis confletur massa, filum unius pedis ejus massae erit $6\frac{1}{3}$ granorum. Ita si plurium vasorum vinariorum detur capacitas, et vinorum bonitas seu pretium, eodem modo dabitur bonitas vini ex omnibus commixti.

Propositio 8. Problema.

Data proportione molium et densitatum in partibus, definire densitatem compositi.

Datis densitatibus et ponderibus partium dantur volumina (dividendo numeros ponderum per numeros densitatum, prop. 3). Datis jam voluminibus et densitatibus partium datur (per prop. 7) densitas totius. In priori exemplo ponamus sumi auri grana 30, argenti 22, aeris 24, et dividendo haec pondera seu has moles per densitates seu gravitates specificas respective 10, $5\frac{1}{2}$, $4\frac{4}{5}$, prodibunt volumina 3, 4, 5, quorum summa est ut 12; pondus vero totius granorum 76, quod divisum per 12 dabit gravitatem specificam $6\frac{1}{3}$. Canon generalis talis erit: Sint pondera partium f, g, h; gravitates specificae auri, argenti, aeris, s, l, v; erit gravitas specifica totius: $f + g + h$ divis. per $\overline{f:s} + \overline{g:l} + \overline{h:v}$. Significat autem mihi $\overline{f:s}$ idem quod f divis. per s, et ita in reliquis.

Si quis fractiones tollere velit, fiet: $f+g+h$ multipl. per slv et divis. per $flv+gsv+hsl$, et proveniens erit numerus gravitatis specificae.

Propositio 9. Problema.

Data gravitate specifica partium et data gravitate specifica, quae desideratur in composito, invenire proportiones voluminum vel ponderum inter partes, seu regulam alligationis.

Hoc problema est determinatum in eo casu quo duae sunt tantum diversae gravitates specificae in componentibus; nam si plures sint, infinitis modis quaesito satisfieri potest. Itaque in casu duarum gravitatum specificarum datarum, detrahatur numerus repraesentans gravitatem specificam mediam seu desideratam in ligatura a numero majoris specificae gravitatis partium, et rursus a numero gravitatis specificae in ligatura desideratae seu mediae detrahatur numerus minoris gravitatis specificae partium, et residuum prius erit ad residuum posterius, ut volumen minori gravitati specificae assignandum ad volumen assignandum gravitati specificae majori. Ex voluminibus autem habitis et gravitatibus specificis habentur et pondera partium multiplicando gravitates specificas per volumina (per prop. 3).

Si plures sint duabus datae gravitates specificae partiales, in omnibus praeter unam assumantur proportiones ponderum vel voluminum pro arbitrio, et ex his omnibus praeter unam sumptis componetur novum compositum certae gravitatis specificae, et reductum est problema ad casum duarum datarum gravitatum specificarum jam solutum. Sed demonstrationem subjiciamus: Sint duae gravitates specificae, una auri s, altera argenti l; quaeritur, volumen auri a et argenti b quantam proportionem inter se habere debeant, ut compositum volumen $a+b$ habeat gravitatem specificam datam d. Quoniam pondus auri est as, et pondus argenti bl (per prop. 3), erit pondus massae $as+bl$; sed idem pondus (per dictam prop. 3) est $\overline{a+b}$ in d, et fit $as+bl$ aequ. $ad+bd$, seu $as-ad$ aequ. $bd-bl$; ergo fiet b ad a, ut $s-d$ ad $d-l$, seu b volumen minori gravitati specificae (argenti nempe) assignandum se habet ad a volumen assignandum majori (auri scilicet) ut $s-d$ excessus majoris gravitatis specificae datae s super mediam praescriptam d, ad $d-l$ excessum mediae d super

minorem datam l. Ex voluminum autem auri et argenti proportione jam reperta habentur et pondera, ducendo rationem voluminum inventam in rationem gravitatum suarum specificarum. Operae tamen pretium est notare, peculiarem dari canonem pro ponderum ratione invenienda sine mentione voluminum et gravitatum specificarum. Nam sint duae massae, una melior in qua sit pondus auri ad pondus totum ut e ad unitatem, seu certa portio marcae verbi gratia $\frac{13}{16}$ seu 13 lotones ad unam marcam; altera deterior, in qua sit pondus auri ad pondus totum ut h ad unitatem, seu certa portio marcae verbi gratia $\frac{9}{16}$ seu 9 lotones ad unam marcam, et componenda inde sit massa nova, in qua sit pondus auri ad pondus totum ut n ad unitatem, seu ut 12 lotones ad marcam; quaeritur, quae sit proportio ponderum sumendorum de massis datis, ut componatur massa nova? Pondus massae melioris sit m, pejoris seu minus auri habentis p; ad componendum pondus massae novae quod sumatur 1 seu una (si placet) marca, fiet 1 aequ. $m+p$ et $me+ph$ aequ. n (aurum enim in pondere m de massa meliore sumto contentum est ut me, seu in ratione composita ponderis sumti m et bonitatis ejus seu proportione auri e in unitate ejus contenti; similiterque aurum in pondere p est ut ph). Ergo fiet n in $m+p$ seu $mn+pn$ aequ. $me+ph$, seu $me-mn$ aequ. $pn-ph$, seu p ad m est ut $e-n$ ad $n-h$, proditque canon prorsus similis priori, etsi in aliis subjectis. Nempe p pondus massae deterioris est ad m pondus massae melioris, ut $e-n$ (seu $13-12$ seu 1) excessus ipsius e seu auri in massa meliore super n seu aurum in massa media componenda ad $n-h$ (seu $12-9$ seu 3) excessum ipsius n auri in massa media componenda super h aurum in massa deteriore. Et haec praxis monetariorum usibus magis accommodata est.

In numeris ponamus (cum Germanis) marcam esse 16 lotonum, et duas esse massas diversarum bonitatum seu gravitatum specificarum ex auro et argento mistis factas. In melioris marca esse 13 lotones auri et 3 lotones argenti; in marca deterioris esse 9 lotones auri et 7 argenti. Quaeritur quomodo ex his componenda sit massa mediae bonitatis, habens in marca lotones auri 12 et argenti 4. Placet autem in exemplo hoc, simul volumina et gravitates specificas indagandas exponere. Auri gravitas specifica sit ut 2, argenti ut 1. Erit in massa meliore 13 lotonum auri volumen $\frac{13}{2}$ (id est 13 divis. per 2) et 3 lotonum argenti $\frac{3}{1}$

seu 3; et in massa meliore volumen marcae erit $\frac{13}{2}+3$ seu $\frac{19}{2}$ (per prop. 3). Ergo dividendo pondus marcae melioris per volumen seu 16 per $\frac{19}{2}$, fit $\frac{32}{19}$ gravitas specifica massae melioris (ob eandem prop. 3). Et similiter in massa deteriore volumen 9 lotonum auri est $\frac{9}{2}$ et volumen 7 lotonum argenti $\frac{7}{1}$ seu 7, et volumen marcae $\frac{9}{2}+7$, seu $\frac{23}{2}$, et gravitas specifica 16 divis. per $\frac{23}{2}$ seu $\frac{32}{23}$. Et in massa media desiderata volumen 12 lotonum auri est $\frac{12}{2}$ seu 6, et 4 lotonum argenti est $\frac{4}{1}$ seu 4, et volumen marcae est $6+4$ seu 10; et gravitas specifica massae fit $\frac{16}{10}$ seu $\frac{32}{20}$. Quaeritur quantum voluminis aut ponderis a massis extremis capiendum ad faciendam mediam. Et primum, si volumina capienda desideremus, ob regulam praesentis problematis fiat volumen massae deterioris capiendum ad volumen capiendum melioris, ut $\frac{32}{19}-\frac{32}{20}$ excessus gravitatis specificae maximae super mediam ad $\frac{32}{20}-\frac{32}{23}$ excessum mediae super minimam, seu ut $\frac{1}{19}$ demto $\frac{1}{20}$ ad $\frac{1}{20}$ demto $\frac{1}{23}$, seu ut $\frac{1}{19}$ ad $\frac{3}{23}$, seu ut 23 ad 57. Cumque pondera capienda fiant multiplicatione voluminum per gravitates specificas, itaque mutiplicando volumen deterioris $\frac{1}{19}$ per suam gravitatem specificam $\frac{32}{23}$, fit pondus massae deterioris ut $\frac{1}{19}$ multipl. per $\frac{32}{23}$; similiter pondus massae melioris fit ut $\frac{3}{23}$ multipl. per $\frac{32}{19}$. Unde postremo sublatis 32, 23, 19, quae utrobique eodem modo reperiuntur, erunt pondera capienda ut 1 ad 3, sive pro uno pondere massae deterioris capiendum est triplum massae melioris, seu in marca massae mediae erunt 12 lotones massae melioris, et 4 massae deterioris. Quod examine comprobatur: nam 12 lotones massae melioris continent $\frac{3.13}{4}$ seu $\frac{39}{4}$ lotones auri et $\frac{3.3}{4}$ seu $\frac{9}{4}$ argenti. At 4 lotones massae deterioris continent $\frac{9}{4}$ auri et $\frac{7}{4}$ argenti. Ergo addendo in unum $\frac{39}{4}$ auri in massae meliore et $\frac{9}{4}$ in deteriore, fiunt $\frac{48}{4}$ seu 12 lotones auri in marca massae mediae seu compositae, et addendo $\frac{9}{4}$ argenti in massa meliore, et $\frac{7}{4}$ in deteriore, fiunt $\frac{16}{4}$ seu 4 lotones argenti in marca massae mediae compositae. Quod desiderabatur.

Sed idem in praesenti casu brevius consequi poteramus, nec opus erat gravitatem specificam aut volumina massarum investigare; quod tamen ideo praestitimus, ut ostenderemus praxin calculandi, quando his opus est, sequenti etiam problemati profuturam. Hic vero ex eo solo, quod constat, quotnam lotones auri sint in massis meliore et deteriore, et quot requirantur in media

componenda, nempe in meliore 13, deteriore 9, et media 12, haberi potest pondus secundum Canonem problematis (ut volumina ex gravitatibus specificis paulo ante investigavimus), nempe pondus capiendum de deteriore est ad pondus capiendum de meliore, ut excessus auri in meliore super aurum in media (id est $13-12$ seu 1) ad excessum auri in media super aurum in deteriore (id est $12-9$ seu 3), hoc est pondus capiendum de meliore est triplum capiendi de deteriore, ut ante.

Propositio 10. Problema.

Datis densitatibus duorum componentium massam datam invenire sine separatione, qua proportione componant, modo volumen ejus et pondus scire liceat. Quod est problema coronarium Archimedis.

Ponamus coronam auream Hieronis regis ab artifice admixto argento esse nonnihil adulteratam, et quaeri quantum sit argenti in ea, quantum auri, ita tamen ut coronam refundi necesse non sit. Datur coronae pondus quod sit 10 librarum seu 20 marcarum, datur et auri gravitas specifica argentique, illa hujus circiter dupla. Postremo datur nobis coronae volumen comparandum cum volumine auri argentive puri, paris ponderis. Quod sciri commode potest immersione in aquam; ponamus enim libram auri immersam in vas cylindricum, in pollices altitudinis destinctum, facere assurgere aquam ad pollicem 1, tunc argenti libra faciet assurgere ad pollices 2. Ponamus jam coronam immersam 10 librarum facere aquam assurgere ad pollices 11, et volumen unius librae talis massae qualis est corona erit $\frac{11}{10}$ seu ad $\frac{11}{10}$ pollicis aquam attollet, gravitasque specifica, quae in auro 1, in argento $\frac{1}{2}$, in corona erit $\frac{10}{11}$, dividendo scilicet pondus librae per volumina, in auro 1, in argento 2 et in corona $\frac{11}{10}$. Jam ergo quaerendum est, qua proportione aurum et argentum misceri debeat, ut gravitas specifica compositi fiat $\frac{10}{11}$ gravitatis specificae auri. Solutio habetur per problema praecedens seu prop. 9. Nempe volumen capiendum de deteriore (argento) est ad capiendum de meliore (auro) ut excessus gravitatis specificae maximae seu auri super mediam seu coronae (sive ut 1 dempto $\frac{10}{11}$, hoc est ut $\frac{1}{11}$) est ad excessum mediae seu coronae super minimam seu argenti (sive ad $\frac{10}{11}$ demto $\frac{1}{2}$, hoc est ad $\frac{9}{22}$), itaque volumen capiendum de argento est ad volumen capiendum de auro ut $\frac{1}{11}$

ad $^{9}/_{2}$, seu ut 2 ad 9. Sed pondera habentur multiplicando volumina 2 deterioris seu argenti et 9 melioris seu auri per gravitates specificas $\frac{1}{2}$ argenti et 1 auri. Jam 2 multipl. per $\frac{1}{2}$ dat 1 et 9 multipl. per 1 manet 9. Itaque in corona pondus argenti est ad pondus auri, ut 1 ad 9, id est in 10 libris auri coronarii est una argenti et novem auri obryzi. Ita enim cum una libra auri aquam faciat assurgere ad pollicem unum, una argenti ad duos, utique novem librae auri aquam attollent ad pollices 9; et corona composita ex una argenti et 9 auri attollet aquam ad pollices 11.

Sed utile erit rem in figura oculis subjicere. ABCD (fig. 37) sunt novem librae auri, et CEFG est una argenti. Volumen auri est AC pollicum 9, et volumen argenti CF pollicum 2, at volumen totius coronae pollicum 11. Gravitas specifica auri AL, et argenti FG, dimidia ejus (circiter scilicet) quae est auri. Pondera fiunt ex multiplicatione seu ductu voluminum in gravitates, seu ABCD, CEFG, pondera auri et argenti sunt rectangula sub AB et AC, item sub FG et CF. Gravitas autem specifica totius coronae est AL, quae ducta in volumen AF dat rectangulum ACHF aequale rectangulis duobus prioribus, seu pondus coronae repraesentat; eritque adeo AL (vel FH) idem quod $\frac{10}{11}$ ipsius AB, vel quod idem est, medium Arithmeticum inter undecim quantitates, ex quibus novem sunt ut AB, duae ut FG seu ut dimidia AB.

Eodem res redit, si idem corpus modo in aëre, modo in aqua seu aliquo liquore noto ponderemus, quod Monetariis quibusdam audit examen per aquam. Nam differentia ponderum aequalis est ponderi liquoris, qui corpori ponderato volumine est aequalis, ut Archimedes in aequiponderantibus ostendit. Datur jam aliunde volumen liquoris ex dato pondere, pondus scilicet per gravitatem ejus specificam dividendo; itaque habemus volumen etiam corporis dati. Datis autem volumine et pondere, datur ejus gravitas specifica. Itaque, si constet, corpus ex duobus componentibus notae gravitatis specificae constare, habetur desideratum per problema praesens. Unde etiam intelligitur nihil aliud efficere ponderationem in liquore, quam ut doceat nos volumen corporis dati, ne scilicet opus sit vase cylindrico in gradus diviso. Patet etiam plures ponderationes in pluribus liquoribus nihil nos novi docere. Unde etiam porro, quando componentes sunt plures duobus, tunc proportionem eorum (infinitis quippe modis variabi-

lem) designare non licet, nisi aliquid praeterea sit cognitum. Ut si nummus constet ex auro, argento et aere, non potest ex volumine ejus et pondere datis definiri, quantum in eo cujusque metalli, nisi forte constet, qua proportione argentum et aes sint commixta, quae solet esse aequalis sive (ut loquuntur) anatica; compertum enim est eam maxime accedere ad auri valorem. Usi autem sumus proportione gravitatis specificae auri ad argenti specificam, quasi illa hujus esset dupla, compendii causa, etsi exactius constituenda sit proportio, quae 10 ad $5\frac{1}{2}$ circiter.

Caput III.

De Ductibus seu de aestimationum compositione.

Definitio 1. Ductus seu Factum ex pluribus unius seriei in plura alterius seriei ordinatim ductis est quantitas, quae fit cuilibet eorum quae insunt uni seriei accommodando unum respondens ex his quae insunt alteri, eo modo quo fit pondus aggregati ex pluribus mobilibus, si cuilibet eorum, quae cuique mobili insunt, attribuatur gravitas specifica respondens, ita ut species mobilium ordinatim ducatur in seriem gravitatum ad mobilia pertinentium. Et Ductus dicentur esse in ratione ordinatim composita eorum quae invicem ducuntur, ut hoc loco pondus integrum in ratione ordinatim composita mobilium et specificarum gravitatum.

Scilicet analogia ponderis uti volo, quae omnium captui exposita est, ne rem cogar hoc loco altius repetere ex profundiore continui consideratione. Natura autem Ponderis et Gravitatis specificae seu molis et densitatis explicata est capite peculiari independente a praesenti capite de Ductibus.

Ponamus AB (fig. 38) liquorem esse, cujus partes fundo B propiores sint graviores; totum ejus pondus aestimari non potest, nisi cuilibet sectioni ad horizontem parallelae, ut CD, suam gravitatem specificam attribuendo. Et eodem modo, si ponamus hunc liquorem ejusdem quidem gravitatis ubique esse, sed inverse situm, ut quod paulo ante erat infra, nunc sit supra, seu ut A sit imum, et B summum; figura de reliquo servata, sed partes tunc superiores seu ipsi B propiores moveri velocius; et quaeri totum impetum seu totam quantitatem motus, quam aqua in illo alvei loco habet; cuilibet sectioni sua attribuenda est velocitas et ponendo velocitates eadem proportione crescere ab A versus B, qua paulo ante gravitates specificae creverunt, utique quae antea ponderis eadem nunc impetus aestimatio erit. Atque hoc vocamus velocitates ordinatim ducere in magnitudines, sectionum scilicet hoc loco, quarum quaeque ut CD suam velocitatem certam habere asseritur. Et impetus dicemus esse in ratione ordinatim composita magnitudinum seu sectionum et velocitatum.

Definitio 2. Unum in aliud ducitur absolute, cum in omnia quae insunt uni ducitur aequale alteri.

Ut cum gravitas specifica auri ducitur in magnitudinem cubi pollicaris, ut aestimetur, quantum futurum esset pondus cubi pollicaris aurei: patet enim nullam ejus esse partem, in quam non gravitas specifica auri (adeoque semper aequalis) ducatur, sic si campus ubique sit aeque latus, habetur ejus magnitudo ducendo latitudinem in longitudinem.

Definitio 3. Plura in unum ordinatim ducuntur, vel contra, cum series plurium ordinatim ducitur in seriem constituentem unum illud.

Sic in magnitudinem liquoris supra dicti AB gravitates specificae diversae, quas habet, ordinatim duci dicuntur, quia in plures sectiones ut CD, quae ipsi insunt ejusque magnitudinem constituunt, ducuntur ordinatim respondentes gravitates specificae.

Unum autem in aliud ordinatim ducitur, cum quae uni insunt, in respondentia alterius ducuntur.

Ut si magnitudo liquoris in gravitatum specificarum aggregatum ordinatim ducatur, nempe unaquaeque sectio ut CD, quae magnitudini liquoris inest, in gravitatem suam.

Propositio 1.

Si mobilia sint proportionalia ductum recipientibus, et gravitates specificae ducendis, pondera erunt ut ductus.

Constat ex definitione ductus. Ut si corpus A in diversis suis punctis varias habeat velocitates, et velocitates ordinatim ducendo quaeratur integra quantitas motus, quam habet corpus A, idemque contingat in corpore B; dico si loco velocitatis unumquodque punctum horum corporum (aut proportionalium) poneretur recipere gravitatem specificam proportionalem ei, quam habet, velo-

citati, fore quantitatem motus in corpore B, ut pondus ipsius A ad pondus ipsius B (per def. 1).

Propositio 2.

Si absolute ducantur duo in se invicem, quantitas ductus erit ut numerus factus ex numeris quantitatem ducendorum exprimentibus invicem multiplicatis, unitate ductum aestimante seu mensura existente ea, quae fit ex unitatibus ducendorum invicem ductis.

Sit mobile trium pedum cubicorum ducendum in gravitatem specificam duorum graduum (quod est unum in aliud duci absolute, per def. 2), et unus pes cubicus gravitate praeditus, unius gradus, sit unius (si placet) librae, adeoque pes gravitate duorum graduum praeditus sit duarum librarum; manifestum est bis ter repeti libram, seu pondus fore librarum sex; et quod in ponderibus, idem in aliis quoque ductibus intelligendum esse patet ex ductus definitione.

Propositio 3.

Si absolute ducantur duo in se invicem, ductus est in ratione composita eorum, quae ducuntur.

In rationibus commensurabilibus patet ex praecedenti; nam factum ex tribus pedibus in duos gradus ductis est ad factum ex quinque pedibus in septem gradus ductis in ratione composita 3 ad 5 et 2 ad 7, seu in ratione 3 in 2 (hoc est 6) ad 5 in 7 (hoc est 35). Idem est in ipsis incommensurabilibus, quia semper dari possunt commensurabiles, quae ab incommensurabilibus minus differant errore dato; itaque error minor est, quam assumebatur, id est, nullus assumi potest.

Propositio 4.

Si duo quae in se invicem absolute ducuntur, sint ut latera, ductus sunt ut rectangula.

Est enim (fig. 39) rectangulum ABC ad rectangulum DEF in ratione composita AB ad DE et BC ad EF; sed (per praeced.) ductus sunt eodem modo.

Propositio 5.

Si duorum quae invicem ducuntur sit unum ut basis, alterum ut altitudo, ductus est ut figura super basi ejusque ubique altitudinis.

Ut si sit (fig. 40) mobile L ad mobile M ut basis AB ad basim DE, et gravitas specifica mobilis L ad gravitatem specificam mobilis M ut altitudo AC ad altitudinem EF, erit pondus L ad pondus M, ut figura ABC ad figuram DEF. Nam ut ductus sunt (per prop. 3) in ratione composita eorum, quae invicem ducuntur, ita et figurae in ratione sunt composita basium et altitudinum.

Tales figurae sunt vel planae, ut parallelogramma, vel solidae ut parallelepipeda, columnaria, aut cylindrica.

Propositio 6.

Si plurium series in unum aliquod recipiens ordinatim ducatur, ductus est ut figura scalaris composita ex omnibus rectangulis, quorum altitudines sint ut termini ipsius seriei, bases vero sint partes rectam constituentes, proportionales partibus recipientis.

Nam si (fig. 41) gravis AE partes AB, BC, CD, DE sint proportionales rectae FM partibus respondentibus FG, GH, HL, LM, et utraeque partes sint constituentes sui totius, sintque rectae FN, GO, HP, LQ proportionales gravitatibus specificis partium gravis AB, BC, CD, DE etc., erit (per prop. 4) rectangulum quodque ut NFG proportionale ponderi partis respondentis ut AB. Ergo et FNOPRSM figura scalaris ex omnibus rectangulis composita ipsi ponderi gravis AE proportionalis erit.

Propositio 7.

Iisdem positis, si nulla sit pars recipientis, in quam non varia sint ordinatim ducenda, tunc figura scalaris abit in isogonium curvilineum ductui proportionale.

Ut si quae (eadem fig. 41) fundo E propiora sunt in gravi AE, ponantur esse graviora, utique in quavis sectione ut TV diversa erit gravitas, cui inter FN et GO proportionalis XY respondeat, atque ita semper continuando interpolationem, ut rectangula velut YXG perpetuo fiant minora, donec tandem latitudo eorum sit evanescens, figura scalaris desinet in isogonium curvilineum NYOPRL proportionale ponderi partis respondentis AD. Isogonium curvilineum voco, quia omnes rectae ut FN, GO seriei ducendorum proportionales (nempe gravitatibus specificis) angulum eundem faciunt ad rectam FM magnitudini ipsius gravis AE respondentem; si angulus sit rectus, vocabo orthogonium curvilineum. Figuram scalarem simpliciter vocabo isogonium rectilineum, et tam scalarem, quam isogoniam curvilineam communi nomine figuram isogoniam appellabo, et ipsa quae eodem angulo insistunt, dicentur ordinatim applicata, ut FN vel GO, terminis scilicet seriei respondentia. Sed partes rectae FM ab initio aliquo sumtae dicantur Abscissae; ut si HP sit ordinatim applicata respondens termino seriei, FH erit abscissa, quae proportionalis erit numero exprimenti, quotus in serie sit terminus, si ponatur recta applicationes recipiens uniformiter crescere ab F versus M.

Propositio 8.

Serie in seriem ordinatim ducta, ductus est proportionalis solido facto ex duabus figuris isogoniis, quarum ordinatim applicatae sint terminis serierum respondentes.

Ut si grave dictum (in prop. 7. fig. 41) AE non tantum gravitatem specificam augeat, quo magis ad fundum E accedit, sed et ubique varias habet crassities seu magnitudines sectionum factarum per plana fundo parallela; patet sectionum magnitudines ducendas ordinatim in gravitates specificas. Sit jam isogonium (P)(Q)(F)(C)(B) (in fig. 42), cujus ordinatae ut (K)(F) sint proportionales gravitatibus specificis in sectionibus gravis respondentibus, ut C, si scilicet abscissae (P)(K) sint proportionales ipsis EC distantiis a fundo; et eodem modo sit isogonium (P)(R)(G)(L)(B), cujus ordinatae ut (K)(G) proportionales sint magnitudinibus sectionum gravis respondentium ut in C, eritque ductus solidus (P)(R)(G)(L)(C)(F)(Q)(S)(T)(M) proportionalis ponderi totius AE. Singulae enim sectiones gravis in suas gravitates specificas ductae repraesentantur rectangulis vel aliis parallelogrammis isogoniis ut (G)(K)(F)(T), quae in partes ipsius rectae (B)(P) respondentes ducta constituunt totidem parallelepipeda isogonia ut (K)(F) aut (T)(N), componentia ductum solidum ut sectiones gravis componunt grave; prorsus scilicet ut CQ sectio ipsius gravis per planum fundo parallelum ducta in suam gravitatem, et praeterea in CZ particulam altitudinis gravis, ipsi KN in ductu solido assumti proportione respondentem, componit cum reliquis similiter tractatis integrum gravis pondus, id tantum observando, quod altitudines CZ vel KN evanescunt, cum nulla est assignabilis portio gravis ut QCZ quae eandem ubique habeat gravitatem specificam.

Haec solida primus consideravit Gregorius a S. Vincentio.

Propositio 9.

Ductus est factum ex ordinatim ducendis in elementa recipientis, proportionale figurae isogoniae, cujus abscissarum elementa sunt ut elementa recipientis, ordinatim vero applicatae sunt proportionales ordinatim in recipientis elementa ducendis.

Gravitates specificae majores versus fundum ducendae sint respective in CD sectiones liquoris per plana fundo horizontali parallela. Sumatur (fig. 43) recta LM et in ea puncta N quotlibet sic assignentur, ut sit LN ad LM uti spatium liquoris vel extensio ACD ad totam ejus extensionem seu volumen; et tunc portiones rectae LM inter duo N distantiam evanescentem habentia interceptae, seu rectae LM partes elementares, quales sunt ${}_1N_2N$, ${}_2N_3N$, erunt proportionales ipsis elementis spatiorum liquoris inter respondentes sectiones interceptis, quales sunt ${}_1C_1D_2D_2C$, ${}_2C_2D_3D_3C$. Quod si crassities spatiorum ${}_1C_2C$, ${}_2C_3C$ assumantur aequales, ita ut ipsae AC crescant uniformiter, erunt spatia intercepta ut ipsae sectiones, et erit ${}_1N_2N$ ad ${}_2N_3N$, ut ${}_1C_1D$ ad ${}_2C_2D$. Itaque sectiones CD sunt ut abscissarum LN elementa ${}_1N_2N$, ${}_2N_3N$. Si jam ad abscissas ordinatim applicantur NG gravitatibus specificis sectionum CD proportionales, patet ductum LNG vel LMP esse ut compositum ex ductibus gravitatum specificarum (veluti NG) in sectiones respondentes (veluti ${}_1N_2N$) adeoque esse ponderi proportionalem; pondus scilicet liquoris ACD esse ad pondus liquoris ABE, ut isogonium LQGN ad isogonium LQPM.

Propositio 10.

Si plurium series in unum recipiens ordinatim (scilicet secundum ipsius respondentia cuique elementa) ducatur, quantitas ductus eadem est, quae alterius ductus, qui fieret, si aggregata elementorum recipientis ducerentur in ipsa crementa seriei ducendorum.

Sequitur ex praecedenti, quia ut MN (verbi gratia) sunt ab-

scissae et NG ordinatae, ita vicissim intelligi possunt MR ipsis NG aequales esse abscissae, et RG ipsis MN aequales esse ordinatae; itaque ut area isogonii fit ex ductu ordinatarum in elementa abscissarum, ita et fit ex ductu abscissarum in elementa ordinatarum. Et in exemplo ut pondus liquoris ABE seu proportionale ipsi isogonium LQGPM factum est, ipsas NG gravitates specificas liquoris ducendo in ${}_1N_2N$ vel ${}_2N_3N$ quae sunt ut elementa liquoris, vel abscissarum MN incrementa liquoris a fundo sursum versus repraesentantium; ita idem pondus vel isogonium fit, RG aggregata elementorum liquoris seu terminos seriei liquorum in vase a fundo B sursum crescentium versus A ducendo in ${}_1R_2R$, ${}_2R_3R$, quae sunt aequalia crementis gravitatum specificarum ordine respondentium.

Eadem et ad ductus solidos applicari possunt, et magnum habent fructum, quia scilicet uno saepe modo facilius, quam alio totus ductus seu aggregatum ex singulis ductibus invenitur.

Definitio 4. Si uni comparabilia infinita nullam partem communem habentia in alio ponantur secundum seriem punctorum quae in recta linea assumi possunt, posterius est una dimensione altius priori.

Sic (fig. 44) linea AB est una dimensione altior puncto C. Nam ex quovis puncto rectae DE ducantur plana inter se parallela FG secantia lineam AB in punctis F, patet normalis ad eam FG infinita in AB poni puncta F comparabilia ipsi C, secundum seriem punctorum G rectae DE. Sed superficies HLM est rursus una dimensione altior linea AB; nam per quaevis rectae DE puncta ut G transeant plana GN secantia superficiem in linea PQ utique comparabili cum linea AB. Et eodem modo solidum RSTU est una dimensione altius superficie HLM, quia quodvis ex dictis planis solidum secat in superficie ut XYZ, quae ipsi superficiei HLM est comparabilis.

Propositio 11.

Itaque id quod secundum ordinem punctorum rectae alteri comparabilia continet infinities, vel infinitesies infinities, vel infinitis vicibus infinitesies infinities, et ita porro, altius ipso est dimensione una, duabus, tribus, etc.

Propositio 12.

Si unum in aliud ducatur absolute, numerus dimensionum ductus inde facti est summa numerorum indicantium dimensiones eorum, quae invicem ducuntur; et, si series ordinatim ducatur in seriem, numerus dimensionum ductus est summa numerorum indicantium dimensiones terminorum seriei utriusque, unitate aucta.

Ut si sit recta ducenda in planum, elementa quae in recta sunt infinities, ea in plano sunt infinitesies infinities; ergo in ductu sunt infinitis vicibus infinitesies infinities; et cum dimensio rectae sit 1, et dimensio plani sit 2, utique dimensio ductus (solidi) erit 1 plus 2 seu 3. Quod si series rectarum ducatur in aliam seriem rectarum ordinatim, seu isogonium in isogonium, elementa quae in recta sunt infinities, ea in ductu quovis rectae in rectam respondentem sunt infinitesies infinities, nempe vicibus 1 plus 1 seu 2, sive bis infinities; ergo in ductu integro ex infinitis ductibus singularibus composito elementa sunt infinitis vicibus infinitesies infinities, hoc est, bis et praeterea semel infinities, et ductus erit trium dimensionum.

Propositio 13. Problema 1.

Exhibere quantitatem plus quam trium dimensionum.

Solidum ABCD (fig. 45) est trium dimensionum. Jam si quodvis ejus elementum in suam gravitatem specificam ducatur, fit pondus, quod est quatuor dimensionum; si praeterea ponderis cujusque elementum in distantiam a plano ad horizontem normali, per axem aequilibrii EF transeunte ducatur, habetur momentum, quod est quinque dimensionum. Et altius iri potest in infinitum, quia ductus quoque seu rationum compositiones in infinitum multiplicari possunt.

Propositio 14.

Fieri non potest, ut diversorum superficiei aut corporis punctorum quodlibet certae cujusdam denominationis quantitatem (ut velocitatis, gravitatis specificae etc.) sibi propriam seu diversam a quovis alio puncto ejusdem recipiat. Et necesse est semper infinita in superficie, infinities infinita in corpore dari, easdem quantitates recipientia, paucis determinatis aliquando exceptis.

Sit (fig. 46) superficies CED, cujus puncta sint E; ajo fieri non posse, ut quodvis punctum E habeat gravitatem specificam sibi propriam. Sit recta ex puncto A educta et ab altera parte indeterminata ABB; et sint gravitates specificae diversae quotcunque, poterunt semper exhiberi rectae AB ipsis proportionales, et ita cuivis puncto B sua respondebit gravitas specifica. Jam per quodvis punctum B transeat planum secans superficiem CED, sectiones CD erunt totidem numero infinitae inter se diversae (exceptis paucis numeri determinati aliquando coincidentibus), et proinde in superficie non potest assignari velocitas, cui non aliqua hujusmodi linea respondeat, seu velocitates assignabiles sunt numero infinitae primi gradus. Sed puncta in superficie sunt infinities infinita, cum quaelibet linea rursus infinita habeat puncta. Itaque fieri non potest, ut tot sint gravitates diversae, quot in superficie sunt puncta, et (paucis determinatis exceptis) necesse est infinita puncta habere communem gravitatem. Idem magis adhuc locum habet, si CED sit corpus, sectiones enim CD erunt superficies; itaque infinities infinita puncta corporis debent habere gravitatem specificam eandem.

Idem est de momento, velocitate, aliisque quantitatem habentibus quibuscunque.

Finge enim corpus propositum transformari in ipsum CED, ita ut quaelibet puncta transferantur in planum suae respondens velocitati, utique necesse est, ut puncta superficies in planis seu partes planorum constituant, alioqui si in planis constituerent puncta tantum, seu in uno plano esset non nisi unum punctum, non corpus ex omnibus fieret, sed linea a planis secta; si lineam in suo quaeque plano formarent, non fieret ex ipsis corpus, sed superficies in illis lineis a planis secta.

Propositio 15.

Iisdem positis, corporis puncta eandem quantitatem recipientia cadunt in superficiem vel superficies, et superficiei in lineam vel lineas (exceptis quibusdam determinatis seu numero finitis lineis vel punctis in corpore, punctis in superficie).

Ponamus enim (si fieri potest) in superficie quodvis punctum a quovis alio ejusdem quantitatis esse disjunctum, ita ut linea conjungens non possit incedere per puncta conformia (ejusdem v. gr. velocitatis) nisi numero finita; et sint eae lineae minimae, quae in superficie a puncto ad punctum conforme duci possunt. Assumatur (fig. 47) punctum A et inde ad quaevis puncta conformia ducantur lineae AB, AC, AD, AE, AF minimae quae in hac superficie duci possunt. Harum quaevis non potest transire, nisi per numero finita puncta ipsi A conformia. Sit jam X maximus numerus finitus conformium punctorum in unam ex his lineis cadentium, verbi gratia si ea, quae maximum numerum punctorum conformium habet est AEMN, erit numerus punctorum ejus X. Utique igitur numerus omnium punctorum in omnibus lineis non est major numero punctorum conformium ipsi A proximorum ut B, C, D etc. per numerum X multiplicato; proxima scilicet puncta voco, inter quae et punctum A in lineis istis minimis ductis nullum aliud conforme cadit punctum. Tot enim sunt lineae, quot puncta proxima, et numerus omnium punctorum non potest esse major numero linearum multiplicato per X. Sed puncta proxima et ipsa sunt numero finita, alioqui inciderent in lineam continuam, contra hypothesin. Ergo numerus omnium punctorum conformium est finitus per X finitum multiplicatus seu est omnino finitus, quod est absurdum (per prop. praecedentem). Itaque fieri non potest, ut puncta conformia quaevis in superficie a se invicem sint discreta, nec componant lineas. Idem argumentum in corpore valet, ut puncta conformia superficies componere intelligantur.

Propositio 16. Problema 2.

Quantitati dimensionum plurium proportionalem exhibere quantitatem dimensionum pauciorum.

Constat solidis vel superficiebus exhiberi posse lineas ordinatim respondentes, ut si sit (fig. 44) isogonium planum OKG cujus quaevis ordinata GK sit proportionalis ipsi PQ, vel ipsi XYZ sectioni superficiei vel solidi per unum ex planis ad rectam DE isogoniis factae, quae et planum OKG secant in KG; patet isogonium OKG ipsi superficiei vel solido esse proportionale. Sed dimensionibus, quae solidum transcendunt nec proinde figuris perfecte exhibentur, nihilominus exhiberi possunt figurae, planae (si lubet) perfecte proportionales. Etsi enim infinitae sint varietates gravitatum specificarum in aliquo solido, fieri tamen non potest,

ut quodlibet ejus punctum habeat gravitatem specificam nulli alteri ejus puncto communem, nam gravitates solidi variantur tantum infinities, cum rectae ipsis proportionales assumi possint; sed puncta solidi variantur infinitis vicibus infinitesies infinities, necesse est ergo in solido infinities infinita puncta solidi eandem habere gravitatem specificam (per prop. 14) et proinde cadere in superficiem (per prop. 15). Unde solidum in sua elementa solida proxima dividitur seu resolvitur per infinitas superficies, et his elementis solidis totidem per ordinatas in figura plana isogonia applicatas elementa plana proportionalia exhiberi possunt. His autem superficiebus solidum constitui dico, non quod componant, sed quia omnia ejus puncta lineasque absorbent, exceptis forte quibusdam determinatis, ubi superficies cylindricae cylindro inscriptae absumunt omnia ejus puncta et lineas, praeter axem.

Sed placet methodum exhibere in exemplo. Sit (fig. 48) solidum ABCD, quod gyratur circa axem QE; quaeritur ejus impetus seu quantitas ipsa motus, quae est quatuor dimensionum, si solidum uniformem habeat partium gravitatem. Jam per QE axem transeat planum QEF et circa QE describantur quotlibet superficies cylindrorum rectorum quorum hic est axis, qualis superficies est GHIKML, secans planum in LM, et solidum portione sui IKML. Cum ergo omnia sectionis IKML puncta sint ejusdem velocitatis, sumantur quot superficies cylindricae, tot rectae MN in ipsis LM (si opus continuatis) ad easdem partes applicatae ad rectam AM, et rectae istae MN sint in composita ratione sectionum solidi et velocitatum, quas habent sectiones (cum eadem sit in quovis sectionis ejusdem puncto velocitas) adeoque impetui cujusque sectionis proportionales. Idemque faciendo ubique habebimus figuram quantitati motus proportionalem, ita ut portio ejus ANM sit ad totam ANP, ut impetus portionis a superficie cylindrica abscectae ABIKML est ad impetum totius solidi. Et similiter ut figura ANP est ad figuram aliam secundum aliud solidum eodem modo factum, ita erit impetus solidi hujus ABCD ad impetum solidi alterius.

Definitio 5. Applicatum totius ex ejusdem nominis applicatis constituentium resultans est id quod absolute ductum in totum tantundem efficit, quantum factum ex omnibus ejusdem nominis in constituentia ordinatim ductis.

Ut si (fig. 49) sit virga metallica A(B)B, ex auro argentoque composita, cujus partes viciniores extremo B sint graviores plusque auri habeant, ita ut gravitates specificae crescant in ratione rectarum AB; tunc ipsi virgae attribuemus gravitatem specificam mediam, quam si ubique aequalem haberet, tantum ponderis haberet, quantum nunc, seu eam quam acciperet, si funderetur in massam homogeneam, ita ut aurum et argentum aequaliter distribuerentur. Nempe in exemplo proposito, si BC repraesentet gravitatem specificam in B, tunc triangulum normale ABC repraesentabit pondus integrum virgae, cui fiat aequale rectangulum ABGH ejusdem cum triangulo altitudinis AB, et ejus basis AH seu BG repraesentabit mediam gravitatem specificam, attribuendam toti virgae.

Propositio 17.

Si factum ex applicatis in totum aliquod ordinatim ductis repraesentetur per figuram, cujus basis repraesentet totum, altitudines variae repraesentent ordinatim ducta; applicatum totius resultans repraesentabitur per rectam constantem quae in totam basin ducta figuram priori aequalem producit.

Ut si (fig. 50) AB sit virga diversarum in diversis punctis (B) gravitatum (B)(C), gravitas ipsius virgae seu media erit LM, id est AH vel BG basis rectanguli ABG aequalis figurae planae AD(C)KB ex variis rectis ordinatim ad AB applicatis factae. Patet ex definitione 5; addatur prop. 7 et 8.

Definitio 6. Medium arithmeticum est summa quotcunque quantitatum divisa per quantitatum numerum.

Sic medium Arithmeticum inter 3 et 5 est 4, nempe summa 3 plus 5 seu 8, divisa per numerum quantitatum, seu per 2, fit 4; sed medium arithmeticum inter tres quantitates, 3, 5, 8 est $\frac{16}{3}$.

Hujus medii tam late sumti maximus est usus; exempli causa in alternativis aestimandis, ut si tres aestimatores a judice deputati rem aestiment, unus 81, alter 90, tertius 96 numerorum aureorum, medium pretium eligendum erit $\frac{267}{3}$ seu 89 aureorum. Idem in alea et aestimatione spei obtinet. Eodem autem modo et

medium Geometricum inter plures quantitates (quantuscunque sit earum numerus) intelligi potest, cujus scilicet Logarithmus est medium arithmeticum inter logarithmos quantitatum.

Propositio 18.

Applicatum totius resultans ex applicatis constituentium est medium arithmeticum inter omnia applicata aequalium totius elementorum.

Sint (fig. 51) ipsius AB elementa aequalia 01, 12, 23 etc., in quae ordinatim ducantur quantitates 0 . 10, et 1 . 11, et 2 . 12 etc., ut si elementa 01, 12 etc. sint partes virgae, et quantitates 0.10, et 1 . 11 etc. sint ut partium gravitates specificae, erunt partium moles seu pondera ut ipsa rectangula 10 . 0 . 1, et 11 . 1 . 2 etc., quarum summa est pondus totius, quod divisum per AB longitudinem seu volumen virgae dat BG gravitatem ejus specificam (mediam) per def. 5. Sed cum eadem sit rectangulorum ubique latitudo, idem prodit, si dividas summam longitudinum per numerum elementorum aequalium, quorum unumquodque consideratum instar unitatis nihil mutat. Itaque BG est medium Arithmeticum inter omnes ordinatim applicatas 0 . 10, et 1 . 11, et 2. 12 etc. Idemque est, etsi partes ipsius AB sumantur data quavis minores atque adeo si figura scalaris abeat in curvilineam.

Propositio 19. Problema.

Medium Arithmeticum invenire inter quantitates numero infinitas homogeneas, inter quarum duas quasvis aliae ex ipsis cadunt.

Repraesententur (fig. 52) per rectas CE ordinatae ad axem AB, sumtis abscissis AC uniformiter crescentibus, et constituent figuram ADEKB, cui aequale exhibeatur rectangulum sub axe seu altitudine AB, et basi BF vel ordinata (LM) quae erit medium Arithmeticum quaesitum (per prop. praecedentem). Habemus ergo medium Arithmeticum inter infinita dicta.

Fieri potest talem esse flexum, ut plures sint ordinatae LM eidem mediae BF aequales, si scilicet modo crescant, modo decrescant ordinatae seu attributa.