qualiter a medio secundum spatia retardato, seu si mobile (M) feratur in regula rigida (AB) secundum hypothesin praesentem (uti revera sic satis contingit ob frictionem, si globus in regula rigida horizontali recta moveatur), ipsa vero interim regula (AB) sibi parallela manens, uniformiter mota, uno extremo (B) incedat in aliqua recta (BT), describet lineam logarithmicam (AL). Generaliter enim, si mobile feratur motu composito ex uniformi et alterius legis, describet lineam ordinatis suis et abscissis relationem inter tempora et spatia dictae legis exprimentem, quod est memorabile Theorema. Habemus etiam hinc modum Physicum construendi Logarithmos, quos Geometria communis exacte construere non potest.

Artic. II.

Si motus sit a gravitate acceleratus et a medio aequabiliter secundum loca retardatus.

1) Est hoc loco hypothesis prima eadem cum hypothesi unica praecedenti, nempe decrementa virium (id est hoc loco velocitatum) facta a resistentia absoluta, sunt proportionalia incrementis spatiorum.

2) Accessiones velocitatum a gravitate sunt proportionales incrementis temporis, estque hypothesis altera ex natura motus gravium.

3) Dantur rectae proportionales temporibus insumtis, a quarum unaquaque si detrahatur recta aequalis respondenti spatio percurso a puncto mobili, residua recta erit proportionalis velocitati acquisitae; nam velocitates impressae sunt proportionales temporibus (per 2), amissae spatiis percursis (per 1 hic, ad modum proposit. 2 articuli praecedentis), ergo residuae acquisitae differentiis.

4) Si velocitatum acquisitarum complementa ad maximam sint ut numeri, tempora insumta erunt ut logarithmi. Nempe, retenta figura priore 15, sit AB velocitas maxima (quam mox patebit esse talem exclusive), AM acquisita, BM vel TL adhuc acquirenda seu complementum acquisitae BT, et ML tempus impensum; ex prop. 1 et 2 reperietur, temporum BT incrementis sumtis aequalibus, velocitatum AM incrementa esse ipsis BM proportionalia. Ergo si BT logarithmi, erunt BM numeri.

5) Hinc patet (ad modum proposit. 4 articuli praecedentis)

ad velocitatem maximam AB nunquam perveniri, seu esse talem exclusive.

Artic. III.

Si grave projiciatur in medio resistentiam habente absolutam,

hoc est si feratur motu composito ex motibus duorum articulorum praecedentium. In figura 16 ponatur grave in A positum, conans descendere in AG et parallelis, projici ex A directione AMB angulo quocunque MAG, et describere lineam AP; sit AB via maxima exclusiva articuli primi; compleantur parallelogramma MAGP, BAGK.

1) Recta horizonti perpendicularis (BK) per (B) limitem penetrationis (seu per punctum, ad quod mobile motu per se uniformi, in medio uniformi et absolute resistente, in recta AM progrediens, penetrare non potest) est lineae projectionis asymptotos, seu lineae duae, videlicet recta BK et curva AP utcunque continuatae sibi quidem semper accedunt, sese tamen nunquam attingunt, quia mobile ad partes B in AB et parallelis eodem modo tendit motu composito, ac si secundum solius articuli primi leges sine gravitate ferretur, nunquam ergo pervenit ad B vel aliquod ei aequivalens punctum in recta BK utcunque producta.

2) Linea projectionis non est ex numero conicarum, non utique parabola, circulus, aut ellipsis, hae enim carent asymptotis, non hyperbola, neque enim hic ut in hyperbola per punctum aliquod in recta utrinque indefinita BK sumtum duci potest adhuc alia linea asymptotos.

3) Datur certa quaedam linea simplex (hoc est paraboloeides aut hyperboloeides), cujus abscissae si sint proportionales spatiis (BM) residuis ad limitem penetrationis (AB) projectioni praescriptum, ordinatae sunt proportionales velocitatibus adhuc deficientibus ad acquirendum limitem velocitatis descensui praescriptum: lineam simplicem hic intelligo, cujus ordinatae sunt in ratione quacunque multiplicata aut submultiplicata abscissarum. Itaque sensus est, velocitates descensui adhuc deficientes esse in ratione spatiorum adhuc limiti penetrationis deficientium, secundum certum aliquem numerum constantem multiplicata. Hoc ex eo demonstratur, quod ambo possunt intelligi progressionis Geometricae, si tempora insumta sint progressionis Arithmeticae per art. 1 prop. 3 et art. 2 prop. 4, et utrobique numeri maximi lo-

garithmus est 0, minimi infinitus, per art. 1 prop. 4 et art. 2 prop. 5. Cum numerus rationem multiplicans est rationalis, oritur aliqua linea paraboloeides aut hyperboloeides Geometriae communis. Porro hic numerus quibusdam experimentis inveniri potest.

4) Inveniri potest linea projectionis AP, seu relatio inter coordinatas AG spatium descensus et AM spatium progressionis per se uniformis. Nam art. 2 propos. 3 datur relatio simplex inter tempus insumtum, spatium descensu percursum AG, et velocitatem descensu acquisitam in G. In hac relatione pro tempore substituatur AM, ope relationis inter ipsa datae artic. 1 propos. 3, restat ergo relatio inter AG et AM, quae etsi sit transcendens, tamen nihil aliud supponit quam logarithmos.

Artic. IV.

De Resistentia Medii respectiva, si motus per se uniformis a medio uniformi retardatur proportione velocitatis,

quemadmodum fit considerata tantum medii densitate, nulla habita ratione tenacitatis.

1) Diminutiones velocitatum sunt in ratione composita velocitatum praesentium et incrementorum spatii. Quae est hypothesis casus praesentis.

2) Si velocitates residuae (ut MB seu LT fig. 15) sint ut numeri, spatia percursa (BT seu ML) sunt ut logarithmi. Eodem modo demonstratur ut art. 1 prop. 3, si pro spatiis illic positis ponas velocitates, et pro temporibus spatia.

3) Si tempora insumta, certa quantitate constanti aucta, sint ut numeri, spatia percursa sunt ut logarithmi. Nam spatii elementis existentibus aequalibus, temporis elementa sunt reciproce ut velocitates, hoc est crescunt progressione Geometrica (per praeced.), ergo (ex quadratura logarithmicae) tempora constanti quantitate aucta etiam sunt progressionis Geometricae.

4) Hinc etiam tempora constanti quantitate aucta sunt reciproce ut velocitates residuae. Patet ex consideratione praecedentis. Constans autem illa quantitas est tempus finitum, quo percurreretur spatium infinitum, si prima velocitas ea proportione cresceret, qua nunc a resistentia medii diminuitur. Et potest inveniri haec quantitas duobus experimentis, ex collatis spatiis et

temporibus, imo unico experimento, in quo considerantur tempus et velocitas.

Artic. V.

Si motus a gravitate acceleratus a medio uniformi retardetur proportione velocitatis.

1) Est hoc loco hypothesis 1. eadem cum hypothesi unica articuli praecedentis.

2) Et hypothesis 2. est eadem cum hypothesi 2. articuli secundi.

3) Resistentia est ad impressionem novam, a gravitate eodem temporis elemento factam (seu diminutio velocitatis ad accessionem) ut quadratum excessus velocitatis maximae super acquisitam est ad quadratum maximae*). Nam ex prop. 4 (hic) sequitur resistentias esse in composita ratione elementorum temporis et quadratorum velocitatum; at impressiones novae sunt ut elementa temporis per prop. 2, et in casu maximae velocitatis diminutio et accessio velocitatis sunt aequales. Unde facile concluditur propositum.

4) Si rationes inter summam et differentiam velocitatis maximae et minoris assumtae sint ut numeri, tempora, quibus assumtae velocitates sunt acquisitae, erunt ut logarithmi. Cum enim incrementum velocitatis sit differentia inter impressionem et resistentiam, hinc (ex praecedenti) statim sequitur impressionem esse ad incrementum velocitatis, ut quadratum velocitatis maximae ad excessum hujus quadrati super quadratum praesentis velocitatis assumtae. Ex quo scimus per quadraturas, summam impressionum inde ab initio, quae est proportionalis insumto tempori, esse ut logarithmum, si numerus sit qualem in propositione hac enuntiavimus.

5) Velocitas maxima est talis exclusive, seu nunquam attingi potest, etsi ad eam intervallo inassignabili accedatur. Nam cum ratio est aequalitatis, seu cum velocitas assumta est incipiens sive infinite parva, tempus (adeoque logar.) est 0, et proinde cum fit ratio infinita, hoc est cum velocitas assumta est ipsamet maxi-

---

*) In der Correspondenz zwischen Leibniz und Hugens (Bd. II. S. 75) findet sich folgende Verbesserung dieser Stelle: Resistentia est ad impressionem gravitatis ut quadratum velocitatis acquisitae ad quadratum velocitatis maximae.

ma, logarithmus rationis est infinitus. Itaque ad eam velocitatem acquirendam infinito tempore opus foret. Inveniri autem potest maxima velocitas per duo experimenta, collatis temporibus et velocitatibus, item per prop. 3.

6) Si velocitates acquisitae (AV fig. 17) sint ut sinus (arcuum HK portionum quadrantis circularis HKB), erunt spatia percursa (AS) ut logarithmi sinuum complementi (VK), posito radium seu sinum totum (AB) esse ut velocitatem maximam. Nam ex hypothesi 2. sequitur incrementa spatii esse in ratione composita velocitatum acquisitarum et impressionum gravitatis, sed impressiones sunt ad incrementa velocitatis, ut enunciatum est in demonstratione prop. 4. Hinc sequitur incrementa spatii esse in ratione composita incrementorum velocitatis et velocitatum directa, et reciproca ratione excessus quadrati maximae velocitatis super quadratum assumtae. Unde scimus per quadraturas sequi propositum. Patet hinc logarithmum sinus totius esse 0 (cum velocitas est 0), at evanescentis sinus complementi (cum velocitas est maxima) logarithmum seu spatium esse infinitum, unde rursus patet velocitatem maximam nusquam attingi.

7) Si spatia percursa (AS fig. 17) sint ut logarithmi sinuum (KV arcuum BK), tempora insumta sunt ut logarithmi rationum, quae sunt inter sinum versum (BV) et (VD) complementum ejus ad (BD) diametrum seu duplum sinus totius (AB). Patet ex collatis propositionibus 4 et 6.

Artic. VI.

Si grave projiciatur in medio uniformi resistentiam habente respectivam,

seu feratur motu composito ex motibus duorum articulorum praecedentium. Sit (fig. 17) projectio in AM et parallelis, descensus in AS et parallelis, angulo MAS quocunque; locus motus compositi P habetur completo parallelogrammo MASP.

1) Inveniri potest linea projectionis (seu relatio inter AS et AM). Ex spatio AS datur (per artic. 5 prop. 6) AV velocitas descendendi in S seu in P. Ex hac (per prop. 7) datur tempus insumtum. Ex hoc (per artic. 4 prop. 3) datur spatium AM seu SP. Ex datis igitur lineis abscissis AS dantur ordinatae SP, ac proinde lineae puncta inveniri possunt.

2) Inveniri potest lineae tangens, seu ipsius mobilis in ea

directio. In AM sumatur MN, quae sit ad MP, ut velocitas in M, inventa per tempus insumtum (artic. 4. prop. 4) ad velocitatem in S, inventam per idem tempus (artic. 5 prop. 4), et juncta NP tanget curvam in puncto P. Et cum eadem sit velocitas descendendi in P, quae in S, itemque velocitas persequendi projectionis directionem in P, quae in M, patet qualis illa sit in puncto P; patet etiam qua vi mobile in ipsa linea projectionis feratur, velocitas enim in linea est ad velocitatem descensus, ut NP ad MP.

Possemus etiam in unum componere resistentiam absolutam ex articulis 1, 2, 3, et respectivam ex artic. 4, 5, 6, uti certe revera concurrunt in natura, sed prolixitas hic vitanda est. Multa ex his deduci possent praxi accommodata, sed nobis nunc fundamenta Geometrica jecisse suffecerit, in quibus maxima consistebat difficultas. Et fortassis attente consideranti vias quasdam novas vel certe satis antea impeditas aperuisse videbimur. Omnia autem respondent nostrae Analysi infinitorum, hoc est calculo summarum et differentiarum (cujus elementa quaedam in his Actis dedimus), communibus quoad licuit verbis his expresso.

Occasione eorum quae de usu pulveris pyrii mechanico in Lipsiensibus pariter Actis ac Roterodamensibus Novellis vidi, dicam primum celeberrimum Thevenotium, quod mihi constet, de tali re cogitasse ad Hydraulica negotia, unde et mihi aliqua porro meditandi materia nata est, quam comprehendat Περιάνδρου Κλεάνθης. Quod obiter hic adjicere volui.

Additio *).

Postquam Meditationes quasdam de Medii resistentia in his Actis publicavi, venere in manus meas, quae Viri in Mathematica naturae cognitione praecellentissimi Hugenius et Newtonus in novissimis operibus de eodem argumento sunt commentati. Animadverti autem eos respectivam tantum (quam voco) resistentiam attigisse, qualem scilicet sentit corpus in liquido tenacitate notabili carente, velut in aëre, non vero absolutam, quae oritur a tenacitate medii aut asperitate superficiei contactus attritum efficiente, inter quas multum interesse jam tum ostendi, cum respectiva

*) Dieser Zusatz findet sich in Act. Erudit. Lips. an. 1691.

habeat respectum ad celeritatem mobilis, eaque aucta crescat, ab-
soluta non item. Circa respectivam video nos iisdem fundamentis
inaedificasse, etsi prima fronte aliud videri possit. Ipsi enim sta-
tuunt resistentias in duplicata ratione velocitatum, ego vero abso-
lute loquendo resistentias (quas decrementis velocitatis a medii
densitate ortis existimo) esse dixi in ratione composita velocitatum
et elementorum spatii, quae scilicet velocitatibus respondentibus
decurri inchoantur; unde jam elementis temporis sumtis aequalibus
(quo casu elementa spatii decurrenda velocitatibus proportiona-
lia sunt) utique resistentiae erunt in duplicata ratione velocita-
tum, quod etiam annotaveram sub art. 5 prop. 3. Nec dissentit
conclusio circa relationem inter tempora et velocitates in gravi
per medium descendente. Hanc enim ad sectorem hyperbolicum
reduxit Newtonus, ad seriem infinitam Hugenius, quam in-
venit pendere a quadratura hyperbolae, nos ad logarithmos artic. 5
prop. 4 tanquam perfectissimum talia exprimendi modum prae-
bentes. Nempe sit velocitas maxima a, praesens v, tempus t
fiet $= \int dv \,.\, aa : \overline{aa - vv}$, quo posito t sunt ut logarithmi rationum
$a + v$ ad $a - v$; fiet etiam $t = \frac{1}{1} v + \frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{5} v^5 + \frac{1}{7} v^7$ etc. posita
a unitate. Circa compositionem motus in medio resistente rectis-
sime monuit celeberrimus Hugenius, eam non ita simplici-
ter locum habere, ut in motu libero, itaque ea quam exposui
articulo 3 et 6 ita accipienda est verbi gratia, ac si corpus ali-
quod moveatur in medio secundum unam legem motus compositi,
et huic ipsi corpori (veluti navi) sit inclusum medium ejusdem
cum priori naturae, in quo iterum aliud corpus feratur, cujus jam
motus ex communi navis motu et ipsius proprio velut projectionem
faciet ita se habentem ut descripsimus.

VIII.

TENTAMEN DE MOTUUM COELESTIUM CAUSIS*).

(Erste Bearbeitung.)

Constat Veteres, praesertim qui Aristotelis et Ptolo-
maei placita secuti sunt, nondum agnovisse naturae majestatem,

*) Leibniz befand sich zu Rom, als er die obige Abhandlung schrieb. Wie aus dem Nachstehenden hervorgeht, scheint er anfangs

quae nostro demum et praecedenti aevo praesentius illuxit, ex quo Copernicus pulcherrimam Pythagoreorum Hypothesin, quam ipsi

die Absicht gehabt zu haben, dieselbe in Rom drucken zu lassen; es schwebte ihm indess das Schicksal Galiläi's lebhaft vor Augen und vorsichtig beschloss er zunächst über die Stimmung des kirchlichen Censurgerichts Genaueres zu erfahren. Er verfasste deshalb das folgende Promemoria und übersandte es einem Priester, um dessen Urtheil zu vernehmen.

Praeclarum Ciceronis dictum est: opinionum commenta delet dies, naturae judicia confirmat. Id nos circa optimam Mundani Systematis explicandi rationem experimur, quae novis quotidie inventis eo pervenit, ut jam vix quisquam sit Insignium Mathematicorum qui non praeferendam fateatur si per superiorum decreta censurasque liceret. Unde jam olim Christophorus Clavius Societatis Jesu, Mathematicus celebris, cum senex nova per Telescopium inventa coelestia et imprimis lunulas Joviales intellexissit, actum esse exclamavit de recepta Astronomia. Videbat enim vim maximam Analogiae, quam postea nova reperta Annuli et Comitum Saturni tam manifestam reddidere, ut vix ei amplius resisti possit. Et Claudius des Chales ex eadem Societate Jesu, vir in his studiis versatissimus, ingenue fassus est vix aliam Hypothesin sperari posse, quae phaenomenis tam pulchre pleneque satisfaciat. Absurdam quidem in Philosophia non esse, ut olim credebatur, concedent hodie plerique omnes. Ricciolus ipse omnia argumenta vulgaria contra eam allata rejecit excepto uno quod sumitur a motu gravium aut projectorum, sed hoc quoque nullam vim habere Gassendus, P. Stephanus de Angelis et Joh. Alphonsus Borellus evicerunt.

Quod attinet ad argumenta Theologica ab auctoritate Scripturae Sacrae sumta fassi sunt P. Mersennus Ordinis Minimorum, et P. Honoratus Fabrius Soc. Jesu nihil prohibere quin Ecclesia post agnitam aliquando ab eruditis rationum naturalium efficaciam pondusque maximum declaret, verba autorum sacrorum sic posse accipi, ut accipiuntur verba omnium Mathematicorum qui licet novum systema sequantur, semper tamen dicent et dicere debent solem occidere et oriri, quoties theoriam planetarum non ex professo tractant.

Interim merito censurae subjecta est eorum audacia, qui minus reverenter de Scriptura Sacra sentire visi sunt, quasi scilicet non satis accurate sit locuta eo praetextu quod finis ejus non sit docere philosophiam sed viam salutis. Honorificentius enim et verius est agnoscere in sacris libris omnes scientiarum quoque thesauros reconditos latere, et de rebus non minus Astronomicis quam aliis omnibus rectissima dici, quod salvo etiam novo systemate asseri potest. Nam autores sacri aliter sine absurditate non poterant sensa animi exprimere, etiamsi millies verum ponatur systema novum. Et ridiculus foret Historicus, fortasse magis suspicione libasse quam recte constituisse videntur, ex tenebris revocatam, summa simplicitate phaenomenis satisfacere

---

quamcunque demum in Mathematicis opinionem secutus, qui non solem sed terram oriri aut occidere dictitaret.

Ut vero res intelligatur exactius, sciendum est Motum ita sumi, ut involvat aliquid respectivum et non posse dari phaenomena ex quibus absolute determinetur motus aut quies; consistit enim motus in mutatione situs seu loci. Et ipse locus rursus aliquid relativum involvit, etiam ex Aristotelis sententia, qui definivit superficie ambientis. Hinc in rigore omne systema defendi potest, ita ut ne ab angelo quidem Metaphysica certitudine aliquid absoluti determinari inde queat, quoniam ipsa conditio est legum motus, ut omnia eodem modo in phaenomenis eveniant, nec dijudicari possit utrum et quatenus corpus aliquod datum quiescat vel moveatur, nisi rationem majoris explicabilitatis habendo, idque adeo verum est ut ne vis quidem agendi verum sit motus absoluti indicium. Ut si globus in navi manu impulsus currat per lineam rectam horizontalem a prora versus puppim, et navis interim aequali celeritate moveatur directione contraria a puppi ad proram, nullus erit motus globi absolute loquendo, absolute enim globus in eodem manet loco spatii ut apparet spectanti ex ripa immota, et tamen globus habet motum respectivum, relatione eorum quae sunt in navi, et licet (ex hypothesi) quiescat absolute et in rigore, tamen aliquid in navi oppositum frangere potest. Itaque quemadmodum quoties de navi et his quae in ea fiant, ut de impressione manus in globum, aut ruptura alicujus vasis vitrei quod in navi forte globo obstiterat, agitur, omnes vere et recte dicemus, globum moveri; respectu vero ripae rursus vere et recte dicemus globum quiescere, cum semper eundem situm ad omnia puncta immota in ripa assumta servet, ita eodem modo dicemus veram esse non minus Doctrinam Sphaericam Ptolemaei, quam Doctrinam Theoricam Copernici; et tam ineptum esse motum terrae infercire explicationi sphaericae primi mobilis quam ineptum est per innumeros epicyclos et eccentricos theoriam planetarum tradere velle, quam Hypothesis nova vel potius antiqua renovata mira simplicitate intellectui exhibet. Unde patet, qui Hypothesin Copernici veram esse dicunt, sic sentire vel intelligi debere, ut sit optima, hoc est ad explicanda phaenomena aptissima, neque aliam in re quae sua natura respectum involvit veritatem locum habere. Atque his recte perceptis quilibet salva censura novum systema sequi et summo gradu Copernicanus esse potest.

Id vero agnosci tandem aliquando summe interest et pietatis et sententiarum quas consistere non posse cum obsequio fidei quidam non sine alterutrius injuria suspicantur, quibus obsistendum esse merito decrevit postremum Concilium in Laterano, sufficit igitur eorum damnari audaciam, qui scripturam minus accurate de rebus astrorum locutam dicere non verentur, de cetero aliis autem . . . .
. . libertate statuendi de veriore Hypothesi; ex quo res ipsa osten-

ostendit. Tycho autem Copernicum in summa systematis (excepta Solis Terraeque transpositione) secutus, ad observationes solito accuratiores animum adjecit, et orbium solidorum apparatum minime decorum ex coelo sustulit. Etsi autem ex Herculeis laboribus suis non satis fructus perceperit, partim praejudiciis quibusdam exclusus, partim morte praeventus, divina tamen providentia factum est, ut observationes ejus et molimina venerint in manus

---

dit, systema novum uti hodie explicatur neque absurdum esse neque temere defendi, sed maximis niti argumentis, et salva fide catholica multos viros magnos doctrinae et pietatis ad ejus defensionem inclinare. Atque hac sane censurae pristinae explicatione tolletur scrupulus qui multos male habet et praeveniet censores revocandi aliquando decreti necessitatem, neque sese torrenti proficientis seculi ac publicae eruditorum voci frustra opponent. Quin et falsis eorum improperationibus occurretur qui veritatem apud Catholicos opprimi jactant et evectas mentes ab Ecclesiae communione avertunt. Idem honoris Italiae interest; ita enim praestantia ingenia non ibi minus quam apud alias gentes frui poterunt luce seculi, et praeclaris inventis incumbere, quae nunc ab aliis praeripiuntur. Neque aliam ego summorum virorum mentem esse puto, penes quos Censurae vis est.

Et vero tanta est Copernicani systematis praestantia ad explicanda phaenomena planetarum, ut fatendum sit Astronomum qui id non intelligeret in meris tenebris versaturum, tantaque in dies nova inventa ejus harmoniam et simplicitatem confirmant, ut verendum sit ne qui ipso uti nolunt, ipsius Dei gloriam obscurent, ademta agnoscendae in tantis operibus admirabilis ejus sapientiae occasione. Id vero nunc maxime (si unquam) dici posse videtur, ex quo nova quaedem lux exorta est de physicis motus planetarii causis, cujus leges universales mira felicitate explicantur motu composito ex circulatione harmonica circa solem et solicitate quadam velut magnetica planetae ad solem tanquam gravis ad centrum, quae non tam per modum hypotheseos assumuntur quam per regressum geometricum ex phaenomenis demonstrantur, ut jam de optimo systemate vix amplius dubitandi locus aliquis relictus esse videatur.

Das Vorstehende übersandte Leibniz mit folgendem Schreiben:

Ad R. P. B.

Rogo Reverentiam Vestram ut mihi sententiam suam circa doctrinam in charta adjecta expressam schedula consignet, utrum nimirum qui ita statuit, in censuras contra absolutam Copernicani Systematis defensionem latas non incurrat. Quod vel ideo expeto, quia fieri potest, ut mihi quam primum circa haec publicandi aliquid occasio nascatur. Atque ita R^a V^a fortasse non me tantum, sed et rem publicam literariam obstringet. Me commendo R^{ae} V^{ae} servus humillimus

G. L.

Viri incomparabilis Johannis Kepleri, cui fata servaverant, ut primus publicaret mortalibus.

Jura poli, rerumque fidem legesque Deorum.

Hic ergo invenit, quemlibet planetam primarium orbitam describere ellipticam, in cujus altero focorum sit Sol, ea lege motus, ut radiis e Sole ad planetam ductis, areae semper abscindantur temporibus proportionales. Idem deprehendit, plures planetas ejusdem systematis habere tempora periodica in sesquiplicata ratione distantiarum mediarum a Sole, mire profecto triumphaturus, si scivisset (quod praeclare Cassinus notavit) etiam Jovis et Saturni satellites easdem leges servare respectu suorum planetarum primariorum, quas isti erga Solem. Sed tantarum tamque constantium veritatum causas dare nondum potuit, tum quod Intelligentiis aut sympathiarum radiationibus inexplicatis haberet praepeditam mentem, tum quod nondum illius tempore Geometria interior et scientia motuum eo, quo nunc, profecissent. Aperuit tamen et rationibus indagandis aditum. Nam ipsi primum indicium debetur verae causae gravitatis, et hujus naturae legis, a qua gravitas pendet, quod corpora rotata conantur a centro recedere per tangentem, et ideo si in aqua festucae vel paleae innatent, rotato vase aqua in vorticem acta, festucis densior atque ideo fortius quam ipsae excussa a medio, festucas versus centrum compellit, quemadmodum ipse diserte duobus et amplius locis in Epitome Astronomiae exposuit, quamquam adhuc subdubitabundus et suas ipse opes ignorans, nec satis conscius quanta inde sequerentur tum in Physica tum speciatim in Astronomia. Sed his deinde egregie usus est Cartesius, etsi more suo autorem dissimulavit. Miratus autem saepe sum, quod Cartesius legum coelestium a Keplero inventarum rationes reddere ne aggressus est quidem, quantum constat, sive quod non satis conciliare posset cum suis placitis, sive quod felicitatem inventi ignoraret nec putaret tam studiose a natura observari.

Porro cum minime physicum videatur, imo nec admirandis Dei machinamentis dignum, Intelligentias peculiares itineris directrices assignare sideribus, quasi Deo deessent rationes eadem corporeis legibus perficiendi, et vero orbes solidi dudum sint explosi, sympathiae autem et magnetismi aliaeque id genus abstrusae qualitates aut non intelligantur, aut ubi intelliguntur, corporearum impressionum effectus apparituae judicentur; nihil aliud ego quidem superesse judico, quam ut causa motuum coelestium

a motibus aetheris, sive ut astronomice loquar, ab orbibus deferentibus quidem, sed fluidis, oriantur. Haec sententia vetustissima est, etsi neglecta: nam Leucippus Epicuro prior eam adeo expressit, ut in systemate formando ipsum adhibuerit δίνης (vorticis) nomen, et audivimus, quomodo Keplerus motu aquae in vorticem actae gravitatem adumbraverit. Et ex itinerario Monconisii discimus, jam tum Torricellii fuisse sententiam (et ut suspicor, etiam Galilaei, cujus iste discipulus erat), totum aetherem cum planetis motu Solis circa suum centrum acti circumagi, ut aqua a baculo in medio vasis quiescentis circa suum axem rotato, et ut paleas seu festucas aquae innatantes, sic astra medio propiora celerius circumire. Sed haec generaliora non difficulter in mentem veniunt. Nobis vero propositum est, ipsas motuum leges distinctius explicare, quod longe altioris indaginis esse res docebit. Et cum aliqua in eo genere nobis lux affulserit, et inquisitio commode admodum et naturaliter successisse videatur, in eam spem erectus sum, veris motuum coelestium causis a nobis appropinquatum esse.

1) Ut ergo rem ipsam aggrediamur, ante omnia demonstrare potest, secundum naturae leges omnia corpora, quae in fluido lineam curvam describunt, ab ipsius fluidi motu agi. Omnia enim curvam describentia ab ea recedere conantur per rectam tangentem (ex natura motus), opportet ergo esse quod coerceat. Nihil autem contiguum est nisi fluidum (ex hypothesi) et nullus conatus coercetur nisi a contiguo et moto (ex natura corporis), fluidum ergo ipsum in motu esse necesse est.

2) Hinc sequitur, planetas moveri a suo aethere, seu habere orbes fluidos deferentes vel moventes. Omnium enim consensu lineas curvas describunt, nec possibile est phaenomena explicari, suppositis motibus rectilineis tantum. Itaque (per praecedentem) moventur a fluido ambiente. Idem aliter demonstrari potest ex eo quod motus planetae non est aequabilis, seu aequalibus temporibus aequalia spatia describens. Unde etiam necesse est, ut a motu ambientis agatur.

3) Circulationem voco Harmonicam, si velocitates circulandi, quae sunt in aliquo corpore, sint radiis seu distantiis a centro circulationis reciproce proportionales, vel (quod idem) si ea proportione decrescant velocitates circulandi circa centrum, in qua crescunt distantiae a centro, vel brevissime, si crescant velo-

citates circulandi proportione viciniarum. Ita enim si radii seu distantiae crescant aequabiliter seu arithmetice, velocitates decrescent harmonica progressione. Itaque non tantum in arcubus circuli, sed et in curva alia quacunque describenda circulatio harmonica locum invenire potest. Ponamus mobile M (fig. 18) ferri in curva quavis ${}_3M\,{}_2M\,{}_1M$ (vel ${}_1M\,{}_2M\,{}_3M$) et aequalibus temporis elementis describere elementa curvae ${}_3M\,{}_2M$, ${}_2M\,{}_1M$, intelligi potest motus compositus ex circulari circa centrum aliquod ut $\odot$ (velut ${}_3M\,{}_2T$, ${}_2M\,{}_1T$) et rectilineo velut ${}_2T\,{}_2M$, ${}_1T\,{}_1M$ (sumtis $\odot{}_2T$ aequ. $\odot{}_3M$, et $\odot{}_1T$ aequ. $\odot{}_2M$), qualis motus intelligi etiam potest, dum regula seu recta rigida indefinita $\odot\sqcap$ movetur circa centrum $\odot$, et interim mobile M movetur in recta $\odot\sqcap$. Nihil autem refert, quis sit motus rectilineus, quo ad centrum acceditur vel ab ipso receditur (quem voco *motum paracentricum*), modo circulatio ipsius mobilis M, ut ${}_3M\,{}_2T$, sit ad circulationem aliam ejusdem mobilis, ${}_2M\,{}_1T$, ut $\odot{}_1M$ ad $\odot{}_2M$, hoc est si circulationes aequalibus temporum elementis factae sint reciproce ut radii. Cum enim arcus isti elementarium circulationum sunt in ratione composita temporum et velocitatum, tempora autem elementaria assumantur aequalia, erunt circulationes ut velocitates, itaque et velocitates reciproce ut radii erunt, adeoque circulatio dicetur harmonica.

4) *Si mobile feratur circulatione Harmonica* (quicunque sit motus Paracentricus), *erunt areae radiis ex centro circulationis ad mobile ductis abscissae temporibus insumtis proportionales, et vicissim.* Cum enim arcus Circulares Elementares, ut ${}_1T\,{}_2M$, ${}_2T\,{}_3M$, sint incomparabiliter parvi respectu radiorum $\odot{}_2M$, $\odot{}_3M$, erunt differentiae inter arcus et sinus eorum rectos (ut inter ${}_1T\,{}_2M$ et ${}_1D\,{}_2M$) ipsismet differentibus incomparabiles, ac proinde (per *Analysin nostram infinitorum*) habentur ea pro nullis, et arcus ac sinus pro coincidentibus. Ergo ${}_1D\,{}_2M$ ad ${}_2D\,{}_3M$ ut $\odot{}_2M$ ad $\odot{}_1M$, seu $\odot{}_1M$ in ${}_1D\,{}_2M$ aequ. $\odot{}_2M$ in ${}_2D\,{}_3M$, ergo et aequantur horum dimidia triangula nempe ${}_1M\,{}_2M\,\odot$ et ${}_2M\,{}_3M\,\odot$, quae cum sint elementa areae $A\odot MA$, itaque aequalibus ex hypothesi sumtis temporis elementis, etiam areae elementa sunt aequalia, et vicissim, ac proinde areae $A\odot MA$ sunt temporibus, quibus percursi sunt arcus AM, proportionales.

5) Assumsi inter demonstrandum *quantitates incomparabiliter parvas*, verbi gratia differentiam duarum quantitatum communium ipsis quantitatibus incomparabilem. Sic enim talia, ni fallor, lucidissime exponi possunt. Itaque si quis nolit adhibere *infinite parvas*, potest assumere tam parvas quam sufficere judicat, ut sint incomparabiles et errorem nullius momenti, imo dato minorem, producant. Quemadmodum terra pro puncto, seu diameter terrae pro linea infinite parva habetur respectu coeli, sic demonstrari potest, si anguli latera habeant basin ipsis incomparabiliter minorem, angulum comprehensum fore recto incomparabiliter minorem, et differentiam laterum fore ipsis differentibus incomparabilem; item differentiam sinus totius, sinus complementi et secantis fore differentibus incomparabilem; item differentiam chordae, arcus et tangentis. Unde cum hae sint ipsae infinite parvae, erunt differentiae *infinities infinite parvae*, et sinus versus etiam erit infinities inifinite parvus adeoque recto incomparabilis. Et infiniti sunt gradus tam infinitorum, quam infinite parvorum. Et possunt adhiberi triangula communia *inassignabilibus* illis similia, quae in Tangentibus, Maximisque et Minimis, et explicanda curvedine linearum usum habent maximum; item in omni pene translatione Geometriae ad naturam, nam si motus exponatur per lineam communem, quam dato tempore mobile absolvit, impetus seu velocitas exponetur per lineam infinite parvam, et ipsum elementum velocitatis, quale est gravitatis solicitatio, vel conatus centrifugus, per lineam infinities infinite parvam. Atque haec *Lemmatum* loco annotanda duxi pro *Methodo nostra quantitatum incomparabilium* et *Analysi infinitorum* tanquam Doctrinae hujus novae *Elementa*.

6) Ex his jam consequens est, *planetas moveri circulatione Harmonica*, primarios circa Solem, satellites circa suum primarium, tanquam centrum. Radiis enim ex centro circulationis ductis areas describunt temporibus proportionales (per observationes). Ergo temporum elementis positis aequalibus est triang. ${}_1M\,{}_2M\,\odot$ aequ. triang. ${}_2M\,{}_3M\,\odot$ et proinde $\odot{}_1M$ ad $\odot{}_2M$ est ut ${}_2D\,{}_3M$ ad ${}_1D\,{}_2M$, quod est circulationem harmonicam esse.

7) Consentaneum etiam est, Aetherem seu *Orbem fluidum cujusque planetae moveri circulatione harmonica*; nam supra ostensum est, nullum corpus in fluido sponte moveri linea curva, erit ergo in aethere circulatio, eamque rationis est credere consentientem circulationi planetae, ita ut sit etiam

circulatio aetheris cujusque planetae harmonica, hoc est si orbis planetae fluidus in innumeros orbes circulares concentricos exiguae crassitudinis cogitatione dividatur, quilibet suam habebit propriam circulationem tanto velociorem proportione, quanto quisque erit propior Soli. Sed hujus motus in aethere alias exactius reddetur ratio.

8) Itaque ponemus *planetam moveri motu duplici seu composito ex circulatione harmonica orbis sui fluidi deferentis et motu paracentrico*, quasi cujusdam gravitatis seu attractionis, hoc est *impulsus versus Solem seu planetam primarium*. Facit autem circulatio aetheris, ut planeta circuletur harmonice, non velut motu proprio, sed quasi tranquilla natatione in fluido deferente cujus motum sequitur, unde nec impetum circulandi velociorem retinet, quem habuerat in orbe inferiore seu propiore, sed eum elanguescentem, dum superiores (majori velocitati quam suae resistentes) trajicit, continue deponit, et sese orbi quem accedit insensibiliter accommodat. Vicissim dum a superioribus ad inferiores tendit, impetum eorum accipit. Idque eo facilius fit, quia ubi semel consensit planetae motus cum praesentis orbis motu, postea a proximis parum differt.

9) Explicata circulatione harmonica, veniendum est ad *Motum paracentricum planetarium, ortum ex impressione excussoria circulationis et attractione solari inter se compositis*. Liceat autem appellare attractionem, licet revera sit impulsus, utique enim Sol quadam ratione tanquam magnes concipi potest; ipsae autem actiones magneticae a fluidorum impulsibus haud dubie derivantur. Unde etiam vocabimus *Solicitationem Gravitatis*, concipiendo planetam tanquam grave tendens ad centrum, nempe Solem. Pendet autem species orbitae a speciali lege attractionis. Videamus igitur quae lex attrahendi lineam ellipticam faciat, idque ut consequamur, in Geometriae adyta parumper ingrediamur necesse est.

10) Cum omne mobile a linea curva quam describit recedere conetur per Tangentem, licebit *conatum* hunc vocare *excussorium*, ut in motu fundae, cui aequalis requiritur vis, quae mobile coërcet, ne evagetur. *Hunc conatum metiri licebit perpendiculari ex puncto sequenti in tangentem puncti praecedentis inassignabiliter distantis.* Et cum linea est circularis, hanc *vim* celeberrimus *Hugenius*,

qui primus eam Geometrice tractavit, appellavit *centrifugam*. Omnis autem conatus excussorius est respectu velocitatis seu impetus ex conatu repetito aliquandiutino concepti infinite parvus, quemadmodum et solicitatio gravitatis, quae homogeneae cum ipso est naturae. Unde et eadem causa utriusque confirmatur. Nec proinde mirum est, quod voluit Galilaeus, percussionem esse infinitam comparatione gravitatis nudae seu, ut ego loquor, simplicis conatus, cujus *vim* ego *mortuam* vocare soleo, quae agendo demum concipiens impetum repetitis impressionibus viva redditur.

11) *Conatus centrifugus* seu conatus excussorius circulationis *exprimi potest per PN sinum versum anguli circulationis* $_1M \odot N$ (vel quod ob differentiam radiorum inassignabilem eodem redit, per $_1D\,_1T$), nam sinus versus aequatur perpendiculari ex uno extremo arcus circuli puncto in tangentem alterius ductae, qua conatum excussorium expressimus in praecedenti (potest etiam exprimi conatus centrifugus per PV, differentiam radii et secantis ejusdem anguli, cujus differentiae discrimen a sinu verso est *infinitesies infinities infinite parvum* adeoque nullissimum respectu radii). Hinc porro cum sinus versus sit in duplicata ratione chordae seu arcus inassignabilis sive velocitatis, sequitur *conatus centrifugos mobilium aequabili motu aequales circulos describentium esse in duplicata ratione velocitatum, inaequales describentium esse in ratione composita ex quadrata velocitatum et reciproca radiorum**).

12) *Conatus centrifugi mobilis harmonice circulantis sunt in ratione radiorum reciproca triplicata.* Sunt enim (per praecedentem) in reciproca radiorum et directa duplicata velocitatum, id est (quia velocitates circulationis harmonicae sunt reciproce ut radii) duplicata reciproca radiorum; ex simplice autem reciproca et duplicata reciproca fit reciproca triplicata. Pro calculo sit ϑa planum constans aequale semper duplo triangulo elementari $_2M\,_3M \odot$ seu rectangulo $_2D\,_3M$ in $\odot\,_2M$ radium seu r, ergo $_2D\,_3M$ erit $\vartheta a : r$ seu ϑa divis. per r, jam $_2D\,_2T$ conatus centrifugus aequ. $_2D\,_3M$ quadr. divis. per bis $\odot\,_3M$, ergo aequ. $\vartheta\vartheta aa : 2r^3$.

---

*) Siehe in Bezug auf die num. 11, 12, 15, 21, 27, 30 die Abhandlung: Illustratio Tentaminis de motuum coelestium causis.

13) Si *motus paracentricus* (recessus a centro Ω vel ad ipsum accessus) *sit aequabilis*, et circulatio harmonica, *linea motus* ΩMG *erit spiralis ex centro* Ω *incipiens, cujus ea est proprietas, ut segmenta* $\Omega GM\Omega$ *sint proportionalia radiis*, id est hoc loco chordis ΩG ex centro eductis, sunt enim tam areae, hoc est segmenta, quam (ob aequabilem recessum) radii temporibus proportionales. Multae sunt aliae notabiles hujus spiralis proprietates, nec difficilis constructio. Imo *generalis datur methodus* in circulatione Harmonica, si ex radiis dentur tempora, aut velocitates paracentrici motus, aut saltem elementa impetuum seu solicitationes gravitatis, construendi lineas saltem suppositis quadraturis.

14) *Solicitatio paracentrica, seu gravitatis vel levitatis* exprimitur recta ${}_3ML$ ex puncto curvae ${}_3M$ in puncti praecedentis inassignabiliter distantis ${}_2M$ tangentem ${}_2ML$ (productam in L) acta, radio praecedenti $\odot\,{}_2M$ (ex centro $\odot$ in punctum praecedens ${}_2M$ ducto) parallela.

15) *In omni circulatione harmonica elementum impetus paracentrici* (hoc est incrementum aut decrementum velocitatis descendendi versus centrum vel ascendendi a centro) *est differentia vel summa solicitationis paracentricae* (hoc est impressionis a gravitate vel levitate, aut causa simili factae) *et dupli conatus centrifugi* (at ipsa circulatione harmonica orti), summa quidem, si levitas adsit; differentia, si gravitas: ubi praevalente gravitatis solicitatione crescit descendendi, vel decrescit ascendendi velocitas, ut praevalente duplo conatu centrifugo, contra. Ex ${}_1M$ et ${}_3M$ normales in $\odot\,{}_2M$ sint ${}_1MN$ et ${}_3M\,{}_2D$; cum ergo triangula ${}_1M\,{}_2M\odot$ et ${}_2M\,{}_3M\odot$ sint aequalia ostensa ob circulationem harmonicam, erunt (ob basin communem $\odot\,{}_2M$) et altitudines ${}_1MN$ et ${}_3M\,{}_2D$ aequales. Jam sumta ${}_2MG$ aequali L_3M, jungatur ${}_3MG$ parallela ipsi ${}_2ML$; igitur congrua erunt triangula ${}_1MN_2M$ et ${}_3M\,{}_2DG$, et erit ${}_1M\,{}_2M$ aequ. G_3M, et N_2M aequ. G_2D. Porro in recta $\odot\,{}_2M$ (si opus producta, quod semper subintelligo) sumatur $\odot P$ aequ. $\odot\,{}_1M$, et $\odot\,{}_2T$ aequ. $\odot\,{}_3M$, erit P_2M differentia inter radios $\odot\,{}_1M$ et $\odot\,{}_2M$, et ${}_2T\,{}_2M$ differentia inter radios $\odot\,{}_2M$ et $\odot\,{}_3M$. Jam P_2M aequ. (N_2M seu) G_2D+NP, et ${}_2T\,{}_3M$ aequ. ${}_2MG+G_2D-{}_2D\,{}_2T$, ergo $P_2M-{}_2T\,{}_2M$ (differentia differentiarum) erit $NP+{}_2D\,{}_2T-{}_2MG$, hoc est (quia NP et ${}_2D\,{}_2T$ sinus versi duorum angulorum et radiorum in-

comparabiliter differentium coincidunt) bis ${}_2D\,{}_2T-{}_2MG$. Jam differentia radiorum exprimit velocitatem paracentricam, differentia differentiarum exprimit elementum velocitatis paracentricae. Est autem ${}_2D\,{}_2T$ vel NP conatus centrifugus circulationis, quippe sinus versus (per 11) et ${}_2MG$ seu ${}_3ML$ est solicitatio gravitatis (per praecedentem). Itaque elementum velocitatis paracentricae aequatur differentiae inter duplum conatum centrifugum NP seu ${}_2D\,{}_2T$ et simplicem solicitationem gravitatis G_2M aut (quod eodem modo concluditur) summae ex duplo conatu centrifugo et simplici solicitatione levitatis.

16) Datis incrementis aut decrementis velocitatis ascendendi aut descendendi, datur solicitatio gravitatis levitatisve, aut vice versa. Patet ex praecedenti, nam conatus centrifugus semper dari censetur, cum sit in ratione triplicata reciproca radiorum (per 12).

17) Aequalibus temporum elementis incrementa angulorum circulationis harmonicae sunt in ratione duplicata reciproca radiorum. Nam circulationes sunt in ratione composita angulorum et radiorum, et circulationes elementares, cum sint harmonicae, sunt in ratione reciproca radiorum, ergo anguli elementares sunt in ratione radiorum reciproca duplicata. Tales sunt fere motus apparentes diurni ex Sole spectati (dies enim hic sufficienter exiguae sunt partes temporis, inprimis pro planetis remotioribus), qui erunt circiter in ratione reciproca quadratorum distantiae, ita ut in distantia dupla tantum quarta pars anguli eodem temporis elemento absolvatur, in tripla tantum nona.

18) *Si ellipsis describatur circulatione mobilis harmonica circa focum tanquam circulationis centrum, erunt inter se haec tria: circulatio* ${}_2T\,{}_3M$ *vel* ${}_2D\,{}_3M$ (haec enim comparabiliter non differunt), *velocitas paracentrica* ${}_2D\,{}_2M$, *et velocitas ipsius mobilis* (ex ipsis composita) *in ipsa orbita elliptica, nempe* ${}_2M\,{}_3M$, *respective ut haec alia tria:* axis transversus BE, media proportionalis inter differentiam et summam distantiae focorum inter se $F\odot$ et differentiae $\odot\varphi$ distantiarum puncti orbitae ${}_3M$ a focis, ac denique dupla media proportionalis inter $\odot\,{}_3M$ et $F\,{}_3M$ distantias ejusdem puncti a duobus focis. *Eadem* haec suo modo *et in hyperbola* vera sunt. In parabola quantitatibus quae ibi infinitae sunt evanescentibus, fient circulatio, velocitas paracentrica, et velocitas ex ipsis composita, quae est in ipsa orbita respective,

ut latus rectum, media proportionalis inter latus rectum et excessum radii super radium omnium minimum (qui est quarta pars lateris recti) et denique dupla media proportionalis inter radium et latus rectum. Horum veritas ex communibus conicorum elementis derivari potest, si ponatur rectam ${}_3MR$ curvae (vel ejus tangenti) perpendicularem in MR Axi $A\Omega$ occurrere in R, et in eam ex focis normales agi FQ, $\odot H$; patet $\odot H$, $H\,{}_3M$, ${}_3M\odot$ esse ipsis ${}_2M\,{}_2D$, ${}_2D\,{}_3M$, ${}_3M\,{}_2M$, hoc est velocitati paracentricae, circulationi et velocitati in ipsa orbita proportionales. Sufficit igitur ostendi latera trianguli ${}_3MH\odot$ esse inter se, ut enuntiavimus. Quod facilius fiet, considerando triangula ${}_3MQF$ et ${}_3MH\odot$ esse similia, et praeterea esse $F\,{}_3M$ ad $\odot\,{}_3M$ ut FR ad $\odot R$, unde per analysin communem propositum concludetur. Sequitur hinc, permutatis licet focis, ut alter pro altero centrum circulationis harmonicae attractionisque fiat, eandem quae ante manere rationem circulationis et velocitatis paracentricae in quovis puncto.

19) *Si mobile quod gravitatem habet*, vel ad centrum aliquod trahitur, qualem planetam respectu Solis ponimus, *feratur in ellipsi* (aut aliâ sectione coni) *circulatione harmonica, sitque in foco ellipseos centrum tam attractionis quam circulationis, erunt attractiones seu gravitatis solicitationes, ut quadrata circulationum directe, seu ut quadrata radiorum sive distantiarum a foco reciproce.* Hoc ita invenimus non ineleganti specimine nostri calculi differentialis vel analyseos infinitorum. $A\Omega$ sit q; $\odot F$, e; BE, b (hoc est $\sqrt{qq-ee}$), $\odot\,{}_2M$ radius r; $\odot\varphi$ (seu $\odot\,{}_2M - F\,{}_2M$) $2r-q$ seu per compendium p; et latus rectum WX sit a aequ. $bb:q$. Duplum elementum areae seu duplum triangulum ${}_1M\,{}_2M\odot$ quod semper aequale est, sit ϑa, posito a latere recto et ϑ repraesentante elementum temporis semper aequale; et ${}_2D\,{}_3M$ circulatio erit $\vartheta a:r$ (vid. jam supra 12); porro differentia radiorum ${}_2D\,{}_2M$ vocetur dr, et differentia differentiarum ddr. Per praecedentem autem est dr (seu ${}_2D\,{}_2M$) ad $\vartheta a:r$ (seu ad ${}_2D\,{}_3M$) ut $\sqrt{ee-pp}$ ad b. Ergo $brdr = \vartheta a\sqrt{ee-pp}$, quae est *aequatio differentialis*. Hujus autem *aequatio differentio-differentialis* (secundum leges calculi a nobis alias in Actis istis explicati) est $b\,dr\,dr + b\,r\,ddr = -2pa\vartheta dr:\sqrt{ee-pp}$, quarum duarum aequationum ope tollendo dr, ut restet tantum ddr, fiet $ddr = bbaa\vartheta\vartheta - 2aaqr\vartheta\vartheta,:bbr^3$, unde habetur propositum. Nam

ddr, velocitatis paracentricae elementum, est differentia inter $bbaa\vartheta\vartheta:bbr^3$, hoc est $aa\vartheta\vartheta:r^3$, qui est duplus conatus centrifugus (per 12 supra) et inter $2aaqr\vartheta\vartheta:bbr^3$, hoc est (quia $bb:q=a$) $2a\vartheta\vartheta:rr$; oportet ergo (per 15) ut $2a\vartheta\vartheta:rr$ sit solicitatio gravitatis, quae ducta in constantem $a:2$ dat $aa\vartheta\vartheta:rr$, quadratum circulationis. Sunt ergo solicitationes gravitatis ut quadrata circulationis directe, et proinde ut quadrata radiorum reciproce. Eadem conclusio et in *hyperbola* et *parabola* succedit, maxime autem in *circulo* qui est simplicissima ellipsis. Ratio autem discriminis inter has conicas sectiones, et quando circuli et ellipses prae aliis generentur, infra apparebit.

20) *Planeta idem attrahitur a Sole diversimode, et quidem in duplicata ratione viciniarum*, ita ut idem duplo vicinior quadruplo fortius, triplo vicinior noncuplo fortius ad descendendum versus Solem nova quadam impressione perpetuo solicitetur. Patet ex praecedenti, posito Planetam ellipsin describere, ac circulari harmonice, ac praeterea continuo impelli versus Solem. Video hanc propositionem jam tum innotuisse etiam viro celeberrimo *Isaaco Newtono*, ut ex relatione Actorum apparet, licet inde non possim judicare, quomodo ad eam pervenerit.

21) Patet etiam *solicitationem gravitatis in Planetam esse ad conatum Planetae centrifugum* (seu excussorium ab ipsa circulatione harmonica eum rapiente in orbem atque adeo excutere conante profectum) *ut distantia praesens a Sole ad quartam partem lateris recti ellipseos planetariae*, seu ut r ad $a:4$, ac proinde rationes ipsae gravitatis ad conatum centrifugum sunt planetae distantiis a Sole proportionales.

22) *Velocitas planetae circa Solem ubique major est velocitate paracentrica, hoc est accedendi ad Solem vel ab eo recedendi.* Cum enim sit circulatio ad paracentricam ut b ad $\sqrt{ee-pp}$ (per 18, adde calculum ad 19), erit major illa quam haec, si $bb+pp$ major quam ee, quod utique fit, cum bb major quam ee, seu b axis transversus quam e distantia focorum. Id vero in ellipsibus planetariis nobis notis semper contingit, quae non usque adeo a circulis differunt.

23) In *Aphelio A et Peripelio Ω sola est circulatio* sine accessu et recessu, in Perihelio *maxima*, in Aphelio *minima*.

In media autem planetae distantia a Sole (quae est in ipsis extremis axis transversi B et E) velocitas accessus recessusve est ad circulationem in ratione distantiae inter focos ad axem transversum, seu c ad b. Ibi enim p evanescit.

24) Maxima est planetae velocitas accedendi ad Solem vel ab eo recedendi, cum W⊙ vel X⊙, distantia planetae a Sole, est aequalis dimidio ellipseos lateri recto, tunc enim (per 19 vel 21) fit $ddr = o$, cum $r = a:2$. Itaque si ex Sole tanquam centro, dimidio latere recto ⊙W tanquam radio, describatur circulus, is ellipsin planetae in duobus punctis maximae paracentricae velocitatis W et X secabit, quae in uno ut W erit accedendi, in altero X recedendi. Minima sive nulla est in Aphelio et Perihelio, sive in ellipsis utroque vertice A et Ω.

25) Semper in ellipsi, adeoque et semper in planeta conatus centrifugus recedendi a Sole, seu conatus excussorius circulationis harmonicae, minor est solicitatione gravitatis, seu attractione centrali Solis. Est enim (per 21) attractio ad conatum centrifugum ut distantia a Sole seu foco ad quartam partem lateris recti, semper autem in ellipsi distantia a foco major quarta lateris recti parte.

26) Impetus quos planeta attractione Solis continuata, durante itinere concepit, sunt ut anguli circulationis, seu quos radii ex Sole ad primum et postremum itineris punctum ducti comprehendunt, sive ut motus apparens seu iter spectatum ex Sole. Sic impetus impressus durante itinere A_1M est ad impetum impressum durante itinere A_3M, ut angulus $A\odot_1M$ ad angulum $A\odot_3M$. Sunt enim angulorum incrementa ut impressiones gravitatis (per 17 et 19), ergo et summae summis proportionales, nempe anguli circulatione absoluti summis impressionum seu impetibus inde conceptis. Hinc in puncto W, ubi normalis ordinata ex Sole ellipsi occurrit, impetus inde ab Aphelio A conceptus, est dimidia pars impetus concepti ab Aphelio ad Perihelium; est autem ibi ⊙W distantia a Sole, ipsum dimidium latus rectum. Et impetus itinere quovis conceptus est ad conceptum semirevolutione, ut angulus circulationis ad duos rectos. Intelligo autem impetus a gravitate vel attractione impressos per se ac solos, non detractis nec computatis impetibus contrariis ab excussorio conatu impressis.

27) Sed operae pretium est distinctius ex causis assignatis

explicare totam Planetae revolutionem gradusque accessus et recessus erga Solem. Planeta igitur in maxima digressione A seu Aphelio positus minorem quidem et conatum centrifugum circulationis excutientis et attractorium gravitatis solicitantis experitur, quam si Soli propior esset. Est tamen in ea distantia, nempe in vertice remotiore a Sole, fortior gravitas quam duplus conatus centrifugus (per 21), quia ⊙A distantia Aphelii seu verticis remotioris a Sole seu foco major est dimidio latere recto ⊙W. Descendit itaque planeta versus Solem itinere AMEWΩ, et continue crescit descendendi impetus, ut in gravibus acceleratis, quam diu manet nova gravitatis solicitatio fortior duplo novo conatu centrifugo; tamdiu enim crescit impressio accedendi super impressionem recedendi, adeoque absolute crescit accedendi velocitas, donec in locum perveniatur, ubi aequantur duae illae novae contrariae impressiones, id est in locum W, ubi distantia a Sole ⊙W aequatur dimidio lateri recto. Ibi ergo velocitas accedendi est maxima, et crescere desinit (per 24). Exinde autem etsi pergat planeta accedere ad Solem usque ad Ω, velocitas tamen accedendi rursus decrescit, praevalente conatu duplo centrifugo super gravitatis impressionem, idque tamdiu continuatur, donec impressiones centrifugae in unum collectae ab initio A hucusque, impressiones gravitatis etiam ab initio hucusque collectas praecise consumunt, seu quando totus impetus recedendi (conceptus ex singulis impressionibus centrifugis collectis) toti impetui accedendi (ex gravitatis impressionibus continue repetitis concepto) tandem aequatur, ubi cessat omnis accessio, atque is locus ipsum est Perihelium Ω, in quo Planeta est Soli maxime vicinus. Postea autem continuato motu, cum hactenus accesserit, nunc recedere incipit, tenditque ab Ω per X versus A. Nam duplus conatus centrifugus qui praevalere coeperat super gravitatem inde a W usque ad Ω, adhuc pergit praevalere ab Ω usque ad X, ac proinde cum ab Ω incipiat planeta quasi de novo moveri, quippe prioribus impetibus contrariis mutuo sublatis, praevalet etiam recessus inde ab Ω, et recedendi velocitas continue crescit usque ad X, sed incrementum tamen ejus seu nova impressio decrescit, donec ista nova impressio ad recedendum, seu duplus conatus centrifugus, novae impressioni ad recedendum seu gravitati iterum fit aequalis, nempe in X. Itaque in X est maxima recedendi velocitas. Et ex eo praevalet gravitas seu nova impressio accedendi, licet adhuc satis diu praevaleat totus recedendi impetus seu summa omnium impressionum recedendi inde ab Ω acquisitarum, super totam impetum accedendi inde ab Ω denuo impressum. Sed cum tamen hic magis crescat quam ille, post X, tandem ei fit aequalis in A, ubi mutuo destruuntur et recessus cessat, id est reditur ad Aphelium A. Atque ita omnibus impressionibus pristinis contrariarum aequalium compensatione consumtis, res redit ad statum primum, atque omnia de integro perpetuis lusibus repetuntur, donec longa dies perfecto temporis orbe, rerum constitutioni mutationem notabilem afferat.

28) Habemus ergo *in motu planetae elliptico sex puncta inprimis notabilia*: quatuor quidem obvia, A et Ω Aphelii et Perihelii, itemque E et B mediae distantiae (nam $\odot$B vel $\odot$E est dimidius axis major AΩ, adeoque medium arithmeticum inter $\odot$A maximam, et $\odot\Omega$ minimam digressionem), et duo a nobis addita, W et X extrema lateris recti WX ad axem in foco $\odot$ ordinatim applicati, quae sunt puncta maximae velocitatis, illud W recedendi, hoc X accedendi (per 24). Ubi etiam (per 26) impetus a continua gravitatis impressione conceptus ab A usque ad W praecise est dimidius ejus, qui toto descensu ab A usque ad Ω concipitur; similiter conceptus ab Ω usque ad X, dimidius ejus qui concipitur ab Ω usque ad A: et omnino impetus a gravitate concepti per AW, WΩ, ΩX, XA sunt aequales.

29) Tempus jam est, ut tradamus *causas, quae speciem ellipseos Planetariae definiunt*. Datur focus ellipseos $\odot$, qui est locus Solis. Dato jam loco A, ubi Planetam Sol trahere incipit, velut maxima planetae distantia, datur remotior ab hoc foco ellipseos vertex. Data porro ratione gravitatis seu virtutis, qua Sol planetam trahere incipit, ad conatum centrifugum, qua ibi circulatio planetam excutere et a Sole repellere nititur, hinc datur et latus rectum ellipseos principale WX seu ordinatim applicata in foco $\odot$. Nam $\odot$A data, est ad $\odot$W semilatus rectum, in ratione data attractionis Solaris ad duplum conatum centrifugum. Quodsi jam quarta pars lateris recti detrahatur a maxima digressione data A$\odot$, erit residuum ad A$\odot$ ut A$\odot$ ad AΩ: datur ergo AΩ major axis ellipseos seu latus transversum. Datis ergo punctis $\odot$, A, W vel X, datur et Ω, atque hinc porro et C centrum ellipseos, et alter focus F, et axis transversus BE, adeoque ellipsis. Nec minus dantur omnia, si pro A initio daretur Ω.

30) Ex his simul patet, *quomodo ellipsis, vel qui sub ea continetur circulus, non alia conica sectio, a planetis describatur*. Et *circulus* quidem oritur, cum attractio gravitatis et dupla vis centrifuga a circulatione orta ab initio attractionis sunt aequales; ita enim aequales manebunt, nulla existente causa accessus aut recessus; sed cum initio (vel in statu destructorum priorum impetuum contrariorum accedendi recedendive, qui initio aequivalent, hoc est in Aphelio vel Perihelio) attractio et duplus conatus centrifugus sunt inaequales, modo (per 25) conatus centrifugus simplex sit minor attractione, describitur *ellipsis*; et praevalente attractione, initium est Aphelium, sin praevaleat duplus conatus centrifugus, est Perihelium. Si conatus centrifugus simplex attractioni sit aequalis, *parabola*; si major, *hyperbola* orietur, cujus focus intra ipsam sit Sol. Quod si Planeta non gravitate, sed levitate esset praeditus, nec traheretur, sed repelleretur a Sole, *hyperbolae opposita* orietur, cujus nempe focus extra ipsam Sol esset.

Duo jam in hoc argumento potissimum praestanda supersunt, unum, ut explicemus, quis motus aetheris planetas graves faciat seu versus Solem pellat, et quidem in duplicata ratione viciniarum; deinde quae sit causa comparationis motuum inter diversos planetas systematis ejusdem, ita ut tempora periodica sint in sesquiplicata ratione mediarum distantiarum, seu quod eodem redit, axium majorum ellipticorum: id est, distinctius explicari debet motus vorticis Solaris seu aetheris, systema unumquodque constituentis. Sed haec cum altius repetenda sint, brevitati hujus Schediasmatis includi non possunt, et quid nobis consentaneum visum sit, rectius separatim exponetur.

IX.

TENTAMEN DE MOTUUM COELESTIUM CAUSIS.

(*Zweite Bearbeitung*)

Constat Veteres, praesertim qui Aristotelis et Ptolemaei placita secuti sunt, nondum satis agnovisse naturae majestatem, quae nostro demum et praecedenti aevo praesentius illuxit, ex quo repertum est, Hypothesin quae primarios Planetas circa solem agit phaenomenis pulchre satisfacere. Haec mirifice illustrata sunt Tychonis observationibus, quibus ille solito accuratioribus animum adjecit primus, et orbium solidorum apparatum minime decorum ex coelo sustulit. Etsi autem ex Herculeis laboribus suis non satis fructus perceperit, partim praejudiciis quibusdam exclusus, partim morte praeventus, divina tamen providentia factum est, ut observationes ejus et molimina venerint in manus Viri incomparabilis, cui fata servaverant ut jura poli rerumque fidem legesque Deorum primus publicaret mortalibus. Hic ergo invenit, quemlibet planetam primarium orbitam describere ellipticam, in cujus altero focorum sit Sol, ea lege motus, ut radiis e Sole ad planetam ductis, areae semper abscindantur temporibus proportionales. Idem deprehendit, plures planetas ejusdem systematis habere tempora periodica in sesquiplicata ratione distantiarum mediarum a Sole, mire profecte triumphaturus, si scivisset (quod praeclare Cassinus notavit) etiam Jovis et Saturni satellites easdem leges servare respectu suorum planetarum primariorum, quas isti erga Solem. Sed tantarum tamque constantium veritatum causas dare nondum potuit, tum quod Intelligentiis aut sympathiarum radiationibus inexplicatis haberet praepeditam mentem, tum quod nondum illius tempore Geometria interior et Scientia motuum eo quo nunc profecissent. Aperuit tamen et rationibus indagandis aditum. Nam ipsi primum indicium debetur usus physici ejus naturae legis, a qua vel pendet gravitas vel saltem mirifice illustratur, quod corpora rotata conantur a centro recedere per tangentem, et ideo si in aqua festucae vel paleae innatent, rotato vase aqua in vorticem acta, festucis densior atque ideo fortius quam ipsae excussa a medio, festucas versus centrum compellit, quemadmodum ipse diserte duobus et amplius locis in Epitome Astronomiae exposuit, quanquam adhuc subdubitabundus et suas ipse opes ignorans nec satis conscius quanta inde sequerentur tum in Physica tum speciatim in Astronomia. Sed his deinde egregie usus est Cartesius, etsi more suo autorem dissimularit. Miratus autem saepe sum, quod Cartesius legum coelestium a Keplero inventarum rationes reddere ne aggressus est quidem, quantum constat, sive quod non satis conciliare posset cum suis placitis, sive quod felicitatem inventi ignoraret nec putaret tam studiose a natura observari.

Porro cum minime physicum videatur, imo nec admirandis Dei machinamentis dignum, Intelligentias peculiares itineris directrices assignare sideribus, quasi Deo deessent rationes eadem corporeis legibus perficiendi, et vero orbes solidi dudum sint explosi, sympathiae autem et magnetismi aliaeque id genus abstrusae qualitates aut non intelligantur, aut ubi intelliguntur, corporearum impressionum effectus appariturae judicentur; nihil aliud ego quidem superesse judico, quam ut causa motuum coelestium a motibus aetheris, sive ut astronomice loquar, ab orbibus deferentibus quidem sed fluidis oriantur. Haec sententia vetustissima est, etsi neglecta: nam Leucippus eam adeo expressit, ut in systemate formando ipsum adhibuerit δίνης (vorticis) nomen, et audivimus, quomodo Keplerus motu aquae in vorticem actae gravitatem adumbraverit. Et ex itinerario Monconisii discimus, jam tum Torricellii fuisse sententiam (et ut suspicor, etiam Galilaei, cujus iste discipulus erat), ut paleas seu festucas aquae innatantes, sic astra, medio propiora, celerius circumire. Sed haec generaliora non difficulter in mentem veniunt. Nobis vero propositum est, ipsas motuum leges distinctius explicare, quod longe altioris indaginis esse res docebit. Et cum aliqua in eo genere nobis lux affulserit et inquisitio commode admodum et naturaliter successisse videatur, in eam spem erectus sum, veris motuum coelestium causis a nobis appropinquatum esse.

Constat et egregiis Gilberti cogitationibus, omne corpus mundanum majus, quoad nobis cognitum est, Magnetis referre naturam, et praeter vim directricem, polos quosdam respicientem, vim habere attrahendi cognata (minimum) corpora intra sphaeram suam, quam in terrestribus vocamus gravitatem, et analogia quadam ad sidera transferemus. Sed non satis constat, quae sit vera phaenomeni tam late patentis causa, et utrum eadem quae in Magnete. Quanquam autem problema demonstratione solvi nondum possit, habemus tamen quae mirifice consentiunt inter se magnaque verisimilitudine commendantur. Equidem asseri potest, Attractionem Gravium fieri radiatione quadam corporea, immaterialia enim explicandis corporeis phaenomenis adhiberi non debent. Deinde consentaneum est, esse in globi corpore conatum explosivum materiae inconvenientis sive perturbantis seu non satis apto ad motus liberrime exercendos loco positae, unde per circumpulsionem attrahatur alia consentiens seu motum ejusmodi habens, ut motum attrahentis in-