avoient beaucoup de part à l'utilité que le Public en a tirée, et que personne n'avoit plus fait valoir cette invention qu'eux, avec Mr. le Marquis de l'Hospital, à qui cette science est aussi fort redevable. Si j'avois publié d'abord moi même la solution du problême de la Chainette, sans donner à Mrs. Bernoulli envie d'y travailler, ils en auroient eu moins de gloire, mais le Public en auroit tiré moins d'utilité; car ils se seroient peut-être moins appliqués à cultiver une science, où ils n'auroient pas eu assez de part, de sorte que je ne me repens point de ce que j'ai fait, et je trouve, comme c'est l'ordinaire, que ce qui est arrivé a été le meilleur. L'ouvrage que Mr. le Marquis de l'Hospital publia le premier sur ce nouveau systême, sous le titre d'*Analyse des infiniment petits*, a été publié de *mon consentement*. Il eut la déférence pour moi et l'honnêteté de me mander que, si je voulois me servir de mon droit d'Inventeur, pour publier le premier un ouvrage d'une juste étendue sur cette nouvelle science, il ne me vouloit point prévenir. Mais je n'avois garde de priver le Public d'un travail aussi utile que le sien, pour me conserver un droit, dont je me pouvois passer facilement, ayant toujours celui d'y suppléer, comme j'ai fait, en proposant de tems en tems quelques nouvelles ouvertures pour pousser cette Analyse.

J'ai été d'autant plus porté à désabuser le Public sur ces faits mal narrés, que Mr. Bernoulli vient de le demander dans une de ses lettres de Basle du 22. de May, où il les rejette et les désapprouve hautement, comme éloignés de la verité.

XXXI.

HISTORIA ET ORIGO CALCULI DIFFERENTIALIS.

Utilissimum est cognosci veras inventionum memorabilium origines, praesertim earum, quae non casu, sed vi meditandi innotuere. Id enim non eo tantum prodest, ut Historia literaria suum cuique tribuat et alii ad pares laudes invitentur, sed etiam ut augeatur ars inveniendi, cognita methodo illustribus exemplis. Inter nobiliora hujus temporis inventa habetur novum Analyseos Mathematicae genus, Calculi differentialis nomine notum, cujus etsi jam satis explicata habeatur constitutio, nondum tamen origo et inveniendi ratio publice habetur. Eum ante annos fere quadraginta invenit Autor, et nonum in annum pressum edidit ante annos fere triginta, ex quo celebratus est non elogiis tantum, sed et usu ipso, dum multa praeclara ejus ope inventa prostant, et praesertim in Actis Eruditorum Lipsiensibus, ac deinde in Academiae Scientiarum Regiae editis in lucem Commentariis habentur, ut novam ex eo faciem Mathesis nacta videatur. Nemo autem de vero inventore dubitavit, donec nuper anno Domini 1712 quidam novi homines, sive ignoratione rei literariae superiorum temporum, sive invidia, sive inclarescendi per lites spe, sive denique adulatione, aemulum ei quendam suscitarunt, cujus laudibus ea re non parum detractum est, nam plus habuisse videbatur, quam re hinc discussa compertum est. In eo autem fecere illi callide, quod litem movere distulerunt, donec obiere harum rerum conscii, Hugenius, Wallisius, Tschirnhusius, aliique, quorum testimonio refelli potuissent. Nempe haec est inter alias ratio, cur praescriptiones temporales jure introductae sunt, quod sive culpa sive dolo actoris possunt differri petitiones, donec adversario pereant argumenta, quibus se tueri possit. Mutarunt etiam statum controversiae, nam in eorum scripto, quod nomine *Commercii Epistolici Johannis Collinsii* 1712 edidere eo consilio, ut Leibnitio palmam dubiam facerent, de calculo differentiali vix quicquam (invenitur): utramque paginam faciunt series, quas vocant, infinitae. Tales per divisionem inventas primus dedit publice *Nicolaus Mercator* Holsatus, sed rem generalem per extractionem reddidit *Isaacus Newtonus*. Utile est inventum, et appropinquationes Arithmeticas transfert ad calculum Analyticum, sed nihil ad calculum differentialem. Utuntur etiam hoc sophismate, ut quoties aemulus ille aliquam quadraturam indagat per additionem eorum, quibus gradatim augetur figura, statim clament usum calculo differentiali (verb. gr. pag. 15 Commercii). Sed ita calculum differentialem dudum habuissent *Keplerus* (in *Dolio Austriaco*), *Cavallerius*, *Fermatius*, *Hugenius*, *Wallisius*, et qui non illa indivisibilia vel infinite parva tractantes. At Hugenius, qui certe istas fluxionum methodos non ignorabat, quascunque isti norant aut jactant, ea aequitate fuit, ut agnosceret novam ab hoc calculo lucem Geometriae accensam et pomoeria ejus hinc mire proferri. Et vero nemini ante Leibnitium in mentem venit constituere Algorithmum quendam calculi novi, per quem imaginatio a perpetua ad figuras attentione liberaretur, quod *Vieta* et *Cartesius* in Geometria communi seu Apolloniana fecerant, sed altiora ad Geometriam Archimedeam pertinentia et lineas, quas ideo mechanicas vocabat, Cartesius diserte a calculo suo excluserat. At vero novo Leibnitii calculo jam tota quanta est Geometria calculo Analytico subjecta est, lineaeque illae Cartesio-Mechanicae, ipsi Transcendentes, etiam ad aequationes locales sunt revocatae considerando differentias dx, ddx etc. et reciprocas differentiis summas ut functiones quasdam ipsarum x et ita in calculum introducendo, cum antea non aliae fuerint adhibitae functiones quantitatum, quam x, xx, x^3 $\sqrt{x}$ etc. seu potentiae et radices. Unde intelligi potest, qui quantitates illas expressere per 0, ut Fermatius, Cartesius et ille ipse aemulus in suis Principiis 16... editis, longissime adhuc a calculo differentiali abfuisse, cum ita nec gradus differentiarum nec diversarum quantitatum functiones differentiales discerni possint. Talia igitur a quoquam ante Leibnitium factitata, ne minimum quidem uspiam vestigium extat. Et quo jure adversarii nunc Newtono talia vindicant, posset aliquis Cartesii analysin etiam Apollonio vindicare, qui rem calculi habebat, calculum ipsum non habebat. Unde etiam nova per calculum differentialem inventa discipulos Newtoni latuerunt, nec aliquid ipsi alicujus momenti proferre nec etiam paralogismos evitare potuerunt, donec calculum Leibnitianum didicerant, ut in Davide Gregorio Catenariam affectante compertum est. Ausi autem sunt vitilitigatores illi, abuti nomine Societatis Regiae Anglicanae, quae postea significari curavit, nihil a se hac de re decretorie pronuntiatum, quod etiam ejus aequitate dignum est, cum utraque pars audita non esset, et noster ipse ne scivisset quidem cognitionem rei aggressam Societatem: alioqui communicanda cum ipso fuissent nomina eorum, quibus relationem mandatura erat, ut vel recusari vel instrui possent. Atque ipse quidem miratus non argumentis, sed figmentis incessi fidem suam, tales responsione indignos duxit, pro certo habens coram expertibus hujus doctrinae (id est maxima lectorum parte) frustra litigari, intelligentes autem re discussa iniquitatem imputationum facile agnituros. Accedebat quod erat absens domo, cum ista ab adversariis sparsa sunt, et redux post biennii intervallum, distractusque negotiis non reperire et consulere potuit reliquias antiqui sui commercii literarii, unde ipse se de rebus tam longinquis, id est ante plus quam quadraginta annos gestis instruere posset; nam literarum plerarumque a se olim scriptarum apographa non servarat, et quas Wallisius in Anglia inventas ipso consentiente in Tomo Operum tertio edidit,

ipse plerasque non habebat. Non defuere tamen amici, quibus fama ejus curae esset, et quidem *Mathematicus nostri temporis primarius, in hac doctrina profundissimus, et neutri addictus* *), cujus benevolentiam pars adversa per artes frustra captaverat, candide pronuntiavit rationibus judicii sui adjectis, et publice sciri non aeque tulit, sibi videri aemulum illum non tantum non invenisse Calculum differentialem, sed etiam ne satis quidem intellexisse. Alius etiam amicus inventoris haec aliaque brevi scheda in lucem misit, ut vanae jactationes retunderentur. Sed majus operae pretium erat ipsam viam ac rationem, qua ad novum hoc calculi genus inventor pervenit, innotescere; ea enim hactenus publice ignoratur etiam illis ipsis fortasse, qui in partem inventi venire vellent, quam exponere ipse et progressus studiorum suorum Analyticorum partim ex memoria partim ex scriptis extantibus et veterum schedarum qualibuscunque reliquiis tradere, eaque ratione Historiam profundioris Matheseos artemque ipsam inveniendi justo libello illustrare decreverat. Sed cum id nunc per necessarias occupationes fieri non posset, permisit ut hoc compendium partis dicendorum per amicum conscium in lucem interim daretur et publicae curiositati nonnihil satisfieret.

Autor hujus novae Analyseos in primo aetatis flore studiis historiarum et jurisprudentiae innato quodam genio meditationes profundiores adjunxerat, et inter alia numerorum proprietatibus combinationibusque delectabatur et de Arte etiam Combinatoria A. D. 1666 libellum ediderat, postea ipso inconsulto recusum. Et puer adhuc logicam versans animadverterat ultimam veritatum a ratione pendentium analysin abire in haec duo: definitiones, et veritates identicas, solas necessariarum vere primitivas indemonstrabilesque; et cum objiceretur ipsi, veritates identicas inutiles et nugatorias esse, ipse contrarium etiam experimentis ostendebat, atque inter alia jam tum monstrabat Axioma illud magnum, Totum esse majus parte, demonstrari per syllogismum, cujus major propositio esset definitio, minor esset propositio identica. Nam si duorum unum sit aequale parti alterius, illud *minus*, hoc *majus* appellari, quae sit definitio. Unde, si definitioni isti axioma hoc identicum atque indemonstrabile adjungatur, quod omne magnitudine praeditum sibi ipsi aequale est, seu A = A, syllogismus talis nascatur: Quidquid

---

*) Siehe die Beilage.

parti alterius aequale est, id altero minus est (per definitionem); Pars parti totius aequalis est (nempe sibi ipsi, per veritatem identicam); ergo pars toto minor est. Q. E. D. Inde pergens observabat ex hoc A = A vel A — A = 0 utique identico et ut prima fronte videri possit prorsus spernendo, oriri pulcherrimam quandam differentiarum proprietatem, nam

$$A - \underbrace{A + B}_{+L} - \underbrace{B + C}_{+M} - \underbrace{C + D}_{+N} - \underbrace{D + E}_{+P} - E \text{ esse } = 0$$

Si jam ponantur A, B, C, D, E esse quantitates crescentes, et differentiae earum proximae B — A, C — B, D — C, E — D vocentur L, M, N, P, hinc fieri

$$A + L + M + N + P - E = 0$$
$$\text{vel } L + M + N + P = E - A$$

id est, summam differentiarum proximarum quotcunque aequari differentiae inter terminos extremos. Exempli causa loco A, B, C, D, E, F sumantur numeri quadrati 0, 1, 4, 9, 16, 25, loco differentiarum prodibunt numeri impares 1, 3, 5, 7, 9,

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & & 1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 \\ & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & \end{array}$$

ubi patet fore $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 - 0 = 25$ et $3 + 5 + 7 + 9 = 25 - 1 = 24$, idemque locum habere, quantuscunque sit numerus terminorum differentiarumve et quicunque assumantur termini extremi. Atque hac tam facili jucundaque observatione delectatus noster adolescens varias numericas series tentabat, ac progrediebatur etiam ad differentias secundas seu differentias differentiarum, et ad differentias tertias seu differentias inter differentias differentiarum, atque ita porro. Atque ita observabat, evanescere differentias secundas numerorum naturalium seu ordine sumtorum inde a 0, evanescere tertias ab ipsis quadratorum, quartas cuborum, quintas biquadratorum, sextas surdesolidorum, et ita porro; et constantem esse differentiam primam naturalium 1, secundam quadratorum 1 . 2 = 2, tertiam cuborum 1 . 2 . 3 = 6, quartam biquadratorum 1 . 2 . 3 . 4 = 24, quintam surdesolidorum 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120, et ita porro; quae aliis licet dudum observata, ipsi nova erant et facili jucunditate sua invitantia ad progressus. Sed combinatorios quos vocabat numeros inprimis meditabatur, quorum nota est haec Tabula, ubi praecedens series horizontalis vel verticalis semper continet differentias primas seriei sequentis primae, secundas seriei sequentis,

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462
		etc.	etc.		

et tertias tertiae etc., et quaevis series horizontalis vel verticalis continet summas seriei praecedentis primae, summas summarum seu summas secundas seriei praecedentis secundae, tertias tertiae. Sed etiam ut addamus aliquod nondum fortasse vulgare, generalia quaedam de differentiis et summis theoremata eruebat, qualia sunt sequentia. Serie a, b, c, d, e etc. decrescente in infinitum, sunt

$$\begin{array}{llcccccc} \text{Termini} & & a & b & c & d & e & \text{etc.} \\ \text{differentiae} & \text{1mae} & f & g & h & i & k & \text{etc.} \\ & \text{2dae} & l & m & n & o & p & \text{etc.} \\ & \text{3tiae} & q & r & s & t & u & \text{etc.} \\ & \text{4tae} & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \vartheta & \text{etc.} \\ & \text{etc.} & \lambda & \mu & \nu & \varrho & \sigma & \text{etc.} \end{array}$$

posito Termino primo a, ultimo ω, inveniebat

$$a - \omega = 1f + 1g + 1h + 1i + 1k + \text{etc.}$$
$$a - \omega = 1l + 2m + 3n + 4o + 5p + \text{etc.}$$
$$a - \omega = 1q + 3r + 6s + 10t + 15u + \text{etc.}$$
$$a - \omega = 1\beta + 4\gamma + 10\delta + 20\varepsilon + 35\vartheta + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

et rursus

$$a - \omega = \left\{ \begin{array}{lllll} +1f & & & & \\ +1f & -1l & & & \\ +1f & -2l & +1q & & \\ +1f & -3l & +3q & -1\beta & \\ +1f & -4l & +6q & -4\beta & +1\lambda \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{array} \right.$$

Unde loquendo stylo a se postea introducto et terminum seriei vocando y (quo casu etiam est a = y), licebit differentiam primam vocare dy, secundum ddy, tertiam d^3y, quartam d^4y; et terminum alterius seriei vocando x, licebit summam horum vocare $\int x$, et summam summarum seu summam secundam $\int\int x$, et summam tertiam $\int^3 x$, et summam quartam $\int^4 x$. Hinc posito 1 + 1 + 1 + 1 + etc. esse = x, seu x esse numeros naturales, quorum dx = 1, tunc

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 \text{ etc. fit } = \int x$$
$$\text{et } 1 + 3 + 6 + 10 + \text{ etc. fit } = \int\int x$$
$$\text{et } 1 + 4 + 10 + 20 + \text{ etc. fit } = \int^3 x$$
$$\text{et } 1 + 5 + 15 + 35 + \text{ etc. } = \int^4 x$$

et ita porro. Unde tandem fit:

$$y - \omega = dy \,.\, x - ddy \,.\int x + d^3y \,.\iint x - d^4y \,.\int^3 x + \text{etc.}$$

quod est $= y$, posito continuari in infinitum seu fieri $\omega = 0$. Unde etiam sequitur summatio ipsius seriei, seu fit:

$$\int y = yx - dy \,.\int x + ddy \,.\iint x - d^3y \,.\int^3 x + \text{etc.}$$

Quae bina theoremata id habent egregium, ut aeque locum habeant in utroque Calculo differentiali, tam Numerico, quam Infinitesimali, de quorum discrimine infra dicemus.

Numericarum autem veritatum ad Geometriam applicatio, et consideratio etiam serierum infinitarum nostro tunc adolescenti prorsus ignota erat, satisque habebat talia in numerorum seriebus cum voluptate observasse. Nec praeter vulgatissima praecepta practica ipse tunc quicquam de Geometria tenebat, et Euclidem vix satis attente adspexerat, aliis plane studiis intentus. Forte tamen incidit in *Vincentii Leotaudi Amoeniorem Curvilineorum Contemplationem*, ubi autor ille varias tractabat Lunularum Quadraturas, et in *Cavallerii Geometriam Indivisibilium*, quibus nonnihil inspectis facilitate methodorum delectabatur, sed nullo tunc animo in Mathematica illa profundiora se immergendi, tametsi Physicis et Mechanices practicae studiis subinde operam daret, ut ex edito *Hypotheseos physicae* opusculo intelligi potest. Erat tunc ascitus in Revisionum Consilium Eminentissimi Electoris Moguntini, et a gratiosissimo judiciosissimoque Principe (qui transiturum et longius iturum juvenem sibi vindicaverat) permissione continuandae peregrinationis impetrata, Lutetiam Parisiorum A. D. 1672 profectus erat. Ibi in Summi Viri, *Christiani Hugenii*, notitiam venit, cujus exemplo et consiliis se debere semper professus est aditum ad altiorem Mathesin. Is tunc forte suum *de Pendulis* opus edebat. Cujus cum exemplum juveni dono attulisset et inter colloquendum animadvertisset, Centri gravitatis naturam huic non satis cognitam, quid hoc rei esset, et quomodo indagari posset, paucis exposuit. Id nostrum a veterno excitavit, talia a se ignorari indignum putantem. Sed tunc quidem vacare his studiis non potuit, et mox sub exitum anni in Angliam transfretavit in comitatu Legati Moguntini, ibique paucis septimanis cum Legato haesit et ab Henrico quidem Oldenburgio, Societatis Regiae Secretario tunc, in illustre Collegium introductus est, cum nemine autem de Geometria contulit (in qua ipse tunc erat plane proletarius), sed cum chymiam non negligeret, aliquoties illustrem virum *Robertum Boylium* adiit, et cum ibi forte in *Pellium* incidisset

et suas quasdam observationes numericas ei narrasset, dixit Pellius haec non esse nova et nuper *Nicolaum Mercatorem* in sua Hyperbolae Quadratura publice monstrasse, differentias potentiarum Numericarum continuatas tandem evanescere. Ea occasio nostro fuit quaerendi libellum Nicolai Mercatoris. *Collinsium* tunc non novit, cum Oldenburgio tantum de rebus literariis, Physicis et Mechanicis collocutus est, de Geometria autem profundiore atque adeo de seriebus illis Newtoni ne verbulum quidem commutavit, et plane in istis hospitem se fuisse nec nisi in numerorum proprietatibus et quidem mediocriter admodum versatum satis ostendit ipsis literis cum Oldenburgio commutatis, quae nuper sunt ab adversariis productae, idemque ex illis haud dubie patebit, quas adhuc in Anglia asservari scribunt, sed suppresserunt, credo forte quod ex ipsis satis appareret, nullum adhuc de rebus Geometricis ei cum Oldenburgio commercium fuisse, cum ipsi tamen credi velint (ne minimo quidem adducto indicio) jam tum ei ab Oldenburgio communicata fuisse, quaecunque inter Collinsium, Gregorium, Newtonum acta is habebat.

Sed reversus ex Anglia in Galliam A. D. 1673, fatis interim functo Eminentissimo Electore Moguntino, cujus gratia Moguntiae obhaeserat, jam liberior hortante Hugenio coepit tractare Analysin Cartesii (antea vix eminus salutatam), et ut in Geometriam Quadraturarum introduceretur, *Honorati Fabri Synopsin Geometricam, Gregorium a S. Vincentio*, et *Dettonvillaei* (id est *Pascalii*) libellum consuluit. Porro ex uno quodam exemplo Dettonvillaei lux ei subito oborta est, quam ipse Pascalius (quod mireris) inde non hauserat. Nam dum ille demonstrat Theorema Archimedeum de superficie sphaerae aut ejus partium mensuranda, utitur methodo, qua omnis solidi rotatione circa axem aliquem descripti superficies ad proportionalem figuram planam revocari potest. Tale enim inde noster sibi paravit theorema generale: Rectae perpendicularis ad curvam portiones interceptae inter axem et curvam, ordinatim et normaliter applicatae ad axem, dant figuram momento curvae ex axe proportionalem. Id cum monstrasset Hugenio, valde is probavit, fassusque est, hujus ipsius theorematis ope se superficiem Conoidis Parabolici, aliarumque hujusmodi superficierum in opere *de Horologio oscillatorio* sine demonstratione positarum, ante multos annos reperisse. His noster excitatus, animadversa foecunditate harum meditationum, cum prius infinite parva tantum ut intervalla ordinatarum Cavalleriano more considerasset, commentus est Triangulum quod vocavit characteristicum ${}_1YD_2Y$ (fig. 155), cujus latera D_1Y, D_2Y aequalia ipsis ${}_1X_2X$, ${}_1Z_2Z$ essent portiones coordinatarum seu coabscissarum AX, AZ, et tertium latus ${}_1Y_2Y$ esset portio tangentis $T\Omega$, si opus productae. Et huic Triangulo, licet inassignabili (seu infinite parvo), videbat semper posse Triangula similia assignabilia. Sunto enim AXX, AZZ condirigentes normales; coabscissae AX, AZ; coordinatae YX, YZ; tangens $T\Theta Y$; perpendicularis $PY\Pi$; subtangentiales XT, $Z\Theta$; subnormales XP, $Z\Pi$; denique ducatur EF parallela axi AX, eique tangens TY occurrat in Ω, unde ad axem agatur normalis ΩH; fient triangula similia ${}_1YD_2Y$, TXY, $YZ\Theta$, $TA\Theta$, YXP, ΠZY, ΠAP, $TA\Omega$, aliaque hujusmodi plura si lubet. Hinc verbi gratia ob triangula similia ${}_1YD_2Y$, ${}_2Y_2XP$ fit $P_2Y \,.\, {}_1YD = {}_2Y_2X \,.\, {}_2Y_1Y$, id est perpendicularis P_2Y applicata ducta in ${}_1DY$ seu ${}_1X_2X$ elementum axis aequatur ipsi ordinatae ${}_2Y_2X$ ductae in ${}_1Y_2Y$ elementum curvae, id est momento elementi curvae ex axe. Unde totum momentum curvae per summam perpendicularium axi applicatarum habetur. Et ob triangula similia ${}_1YD_2Y$ et $TH\Omega$ fit ${}_1Y_2Y : {}_2YD = T\Omega : \Omega H$ seu $\Omega H \,.\, {}_1Y_2Y = T\Omega \,.\, {}_2YD$, id est constans ΩH ducta in elementum curvae ${}_1Y_1Y$ aequatur ipsi $T\Omega$ ductae in ${}_2YD$ seu ${}_1Z_2Z$ elementum coabscissae. Et proinde figura plana orta ex ipsis $T\Omega$ ordinatim normaliter applicatis ad AZ in ZZ aequatur rectangulo sub curva in rectam extensa et constante $H\Omega$. Sic etiam ob triangula similia ${}_1YD_2Y$ et ${}_2Y_2XP$ fit ${}_1YD : D_2Y = {}_2Y_2X : {}_2XP$, atque adeo ${}_2XP \,.\, {}_1YD = {}_2Y_2X \,.\, D_2Y$, seu subperpendiculares ${}_2XP$ ordinatim applicatae ad axem seu ad ${}_1YD$ vel ${}_1X_2X$ aequantur ordinatis ${}_2Y_2X$ in sua elementa D_2Y ordinatim ductis. Sed Rectae inde a nihilo crescentes in sua elementa ductae conficiunt triangulum. Esto enim semper $AZ = ZL$, fiet triangulum rectangulum AZL, quod est dimidium quadrati AZ, itaque figura orta ex subperpendicularibus ordinatim et perpendiculariter axi applicatis semper aequatur dimidio quadrati ordinatae. Et proinde, data figura quadranda, quaeritur figura, cujus subperpendiculares aequentur ordinatis figurae datae, ea erit figurae datae quadratrix. Atque ita ex hac facillima meditatione habemus reductionem ad quadraturas planas superficierum rotatione genitarum, et exstant rectificationes curvarum, et simul ipsas figurarum quadraturas reducimus ad problema tangentium inversum.

His ita repertis, magnam vim theorematum (ex quibus multa erant non inelegantia) in chartam conjecit noster, duarum classium. Pars enim contenta erat quantitatibus assignabilibus more non

Cavallerii tantum et Fermatii et Honorati Fabrii, sed et Gregorii a S. Vincentio, Guldini et Dettonvillaei tractatis; pars vero pendebat ab inassignabilibus, multoque longius Geometriam provehebat. Sed haec postea prosequi neglexit noster, postquam animadvertit eandem Methodum non tantum ab Hugenio, Wallisio, Wrenno et Heuratio et Neilio, sed etiam a Jacobo Gregorio et Barrovio usurpatam excultamque fuisse. Exponere tamen hoc loco non inutile visum est, ut appareat, quibus gradibus ad majora sit perventum, atque etiam ut velut manu ducantur, qui adhuc tirones in recondita Geometria altius assurgere optant.

Atque haec A. D. 1673 et parte Anni 1674 Parisiis egit Leibnitius. Sed Anno 1674 (quantum recordari potest) incidit in Arithmeticum illum celebrem Tetragonismum, quod qua ratione factum sit exponere operae pretium erit. Solebant Geometrae figuras resolvere in rectangula per parallelas ordinatim ductas; ipse oblata forte occasione resolvit in triangula per rectas in unum punctum concurrentes, dispexitque quomodo aliquid novi inde commodi duci posset. Sit (fig. 156) linea AYR, ducantur AY quot lubet, ducatur et axis quicunque AC, eique normalis vel coaxis AE, hos tangens ipsius curvae in Y secet in T et Θ. In eam ex A agatur normalis AN, manifestum est triangulum elementare A_1Y_2Y aequari dimidio rectangulo sub elemento curvae ${}_1Y_2Y$ et sub ipsa AN. Ducatur jam triangulum characteristicum supra dictum ${}_1YD_2Y$, cujus hypotenusa sit portio tangentis vel elementum arcus, latera sint parallela axi et coaxi; patet ob triangula similia $AN\Theta$ et ${}_1YD_2Y$ fore ${}_1Y_2Y : {}_1YD = A\Theta : AN$ seu $A\Theta \,.\, {}_1YD$ vel $A\Theta \,.\, {}_1X_2X = AN \,.\, {}_1Y_2Y =$ (per supradicta) duplo triangulo A_1Y_2Y. Itaque si quaevis $A\Theta$ translata intelligatur in XY si opus productam, ita ut in hac sumatur XZ, fiet inde trilineum AXZA aequale duplo segmenti $AY\smile A$, comprehensi recta AY et arcu $A\smile Y$. Atque ita habentur quas vocaverat figuras segmentorum, seu segmentis proportionales. Similis methodus procedit, cum punctum A sumatur extra curvam, et tunc hac methodo habentur Trilinea sectoribus proportionalia ex puncto illo concursus abscissis. Quin etsi rectae non in lineam, sed in curvam (quam ordinatim tangunt) concurrant, non eo minus hac ratione utilia Theoremata formabuntur, sed talia persequi hujus loci non est. Sufficit nostro scopo considerare figuram segmentorum et in Circulo quidem, ubi si punctum A ponatur in initio quadrantis AYQ, curva AZQZ secabit circulum in fine quadrantis Q, atque inde descendens basi BP (normali ad diametrum in altero extremo B) asymptota erit; et tamen tota figura infinitae longitudinis inter diametrum AB, basin BP etc. et curvam basi asymptotam AZQZ etc. comprehensa aequabitur circulo circa diametrum AB. Sed ut ad rem veniamus, posito radio unitate, et AX vel ΘZ, x, et $A\Theta$ vel XZ, z, fiet $x = 2zz :, 1 + zz$; summa autem ipsarum x ad $A\Theta$ applicatarum seu ut hodie loquimur $\int xdz$ est trilineum $A\Theta ZA$, complementum trilinei AXZA, quod duplo segmento circulari ostendimus aequale. Idem etiam assecutus autor est Methodo transmutationum, quam in Angliam misit. Id agitur ut omnes $\sqrt{1 - xx} = y$ summentur; fiat $y = \pm 1 \mp xz$, unde fit $x = 2z :, 1 + zz$ et $y = \pm zz \mp 1, :, zz + 1$. Ita rursus tantum opus est summari rationales. Nova haec et elegans via visa est etiam Newtono, sed fatendum est, non esse universalem. Caeterum patet, hinc etiam haberi arcum ex sinu, et alia id genus, sed mediate. Quin vero postea intellexit noster, haec inde deducere Newtonum immediate suis extractionibus, id cognoscere desideravit. Hinc statim apparuit, qua methodo Nicolaus Mercator dederat Arithmeticum Hyperbolae Tetragonismum per seriem infinitam, etiam circuli dari, sublata asymmetria, et dividendo per $1 + zz$, ut ille diviserat per $1 + z$. Et mox invenit autor theorema generale pro dimensione figurae conicae centrum habentis. Nempe sector, comprehensus arcu sectionis conicae a vertice incipiente et rectis ex centro ad ejus extrema ductis, aequatur rectangulo sub semilatere transverso et recta $t \pm \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \pm \frac{1}{7}t^7$ etc., posito t esse portionem tangentis in vertice, interceptam inter verticem et tangentem alterius extremi, et unitatem esse quadratum a semiaxe conjugato seu rectangulum sub dimidiis lateribus recto et transverso, et $\pm$ significare + in Hyperbola, sed — in Circulo et Ellipsi. Unde etiam posito quadrato diametri 1, fiebat circulus $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ etc. Hoc inventum cum noster Hugenio adjecta demonstratione ostendisset, mirifice ille applausit, et cum remitteret dissertationem, literis adjunctis dixit, id inventum semper memorabile apud Geometras futurum, et spem inde nasci, posse aliquando ad solutionem generalem perveniri, nempe aut exhibendo verum valorem aut demonstrando impossibilitatem in quantitatibus receptis. Nempe neque ipse, neque inventor, neque alius quisquam Parisiis, quod constet, aliquid de serie rationali infinita magnitudinem circuli exhibente (quas a Newtono et Gregorio excogitatas postea constitit)

quicquam fando audierat. Certe non Hugenius, ut ex hac ipsa subjuncta ejus epistola ....*) data patet; itaque hac prima vice circulum seriei quantitatum rationalium exacte aequalem demonstratum Hugenius credidit. Idem (vel ipsius Hugenii, harum rerum peritissimi, testimonio fretus) credidit inventor, atque ideo epistolas illas binas ad Oldenburgium Anno 1674 scripsit, quas adversarii ipsi edidere, in quibus tanquam rem novam nuntiat, se et quidem primum omnium invenisse magnitudinem circuli serie numerorum rationalium expressam, quod jam in Hyperbola praestitum constabat. Quodsi jam ipsi Londini agenti anno praecedente Oldenburgius series Gregorii et Newtoni communicasset, debebat summa esse ipsius impudentia, hoc ad Oldenburgium scribere audentis, et Oldenburgii obliviositas vel praevaricatio dissimulationem non exprobrantis. Nam ipsi adversarii exhibent responsionem Oldenburgii, qua tantum indicat (ignorare Te nolim, ait) similes series etiam Gregorio et Newtono innotuisse, quas etiam anno demum sequente literis mense Aprili datis (quas ipsi exhibent) communicavit. Unde intelligi potest, quam fuerint vel caeci invidia, vel perfricti malignitate, qui nunc fingere audent, Oldenburgium talia ipsi jam anno praecedente communicasse, quanquam aliquid caecitatis insit malignitati, quod non viderunt edere se, quibus sua figmenta everterent, nec potius has ipsius Oldenburgiique literas ut alias ex toto vel parte suppresserunt. Caeterum ex eo demum coepit ipse cum Oldenburgio communicare de rebus Geometricis, ex quo scilicet ipse sese aliquod communicatione dignum invenisse judicavit, antea in his studiis tiro. Priores autem Parisiis datae 30 Martii, 26 Aprilis, 24 Maji, 8 Juni Anni 1673, quas ipsi adesse ajunt, sed supprimunt cum Oldenburgii responsionibus, haud dubie de aliis rebus egere, nihilque illis praebuere, unde fictitiae illae Oldenburgii communicationes credibiliores reddi possent. Caeterum ubi audivit noster, Newtonum et Gregorium ad series pervenisse per extractiones radicum, agnovit hoc sibi novum esse, neque initio satis intellexit, idque ingenue fassus est ipse et in nonnullis declarationem expetivit, praesertim quando series quaerebantur reciprocae, pro quibus ex infinita serie extrahenda erat radix per aliam seriem infinitam, atque hinc etiam patet falsum esse quod adversarii fingunt, Oldenburgium ei Newtoniana

*) Lücke des Manuscripts.

scripta communicasse; nam ita declarationem petere opus non habuisset, sed postea ubi calculum differentialem detegere coepit, novam excogitavit artem longe universalissimam inveniendi series infinitas sine extractionibus accommodatam quantitatibus tam communibus quam transcendentibus, assumta serie quaesita tanquam inventa; eaque methodo usus est ad absolvendum Quadraturae Arithmeticae opusculum, ubi etiam aliena inventa serierum pro arcu ex sinu, aut ex sinu complementi inserebat, et regressum etiam, dato scilicet arcu sinum vel sinum complementi invenire, nova hac Methodo demonstrabat. Eaque etiam causa est, cur postea methodis alienis non indiguerit. Et tandem hanc suam novam eliciendi series rationem in Actis Eruditorum publicavit. Caeterum cum in eo esset, ut opusculum illud quadraturae Arithmeticae Parisiis ederet, in Germaniam revocatus est, et novi calculi arte exculta, priora minus curavit.

Porro nunc jam exponendum est, quomodo paulatim ad novum Notationis genus pervenerit noster, quod calculum differentialem appellavit. Jam A. D. 1672 de numerorum proprietatibus colloquenti Hugenius proposuerat hoc problema: invenire summam seriei decrescentis fractionum, cujus numeratores sint unitates, denominatores vero sint numeri triangulares, cujus summam ajebat se invenisse inter collationes cum Huddenio de aleae aestimatione. Noster invenit summam esse 2, quod cum Hugeniana propositione consentiebat. Eadem opera invenit summas serierum hujusmodi numericarum, cum denominatores sunt Numeri combinatorii quicunque, idque indicavit Oldenburgio Febr. 1673, quam adversarii edidere. Cum postea Pascalii triangulum Arithmeticum vidisset, ejus exemplo Harmonicum concinnavit.

Triangulum Arithmeticum,
ubi series fundamentalis est progressionis
Arithmeticae, nempe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\end{array}$$
$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$

Triangulum Harmonicum,
ubi series fundamentalis est progressionis
Harmonicae $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \frac{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & \\
 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7} \\
\end{array}$$

in quo si denominatores cujuslibet seriei oblique descendentis in infinitum, itemque cujuslibet seriei parallelae finitae dividantur per denominatorem termini in serie prima, prodeunt numeri combinatorii iidem qui in triangulo Arithmetico habentur. Utrique autem triangulo hoc est commune, quod series obliquae sunt invicem summatrices vel differentiales. In Triangulo Arithmetico series data est summatrix proxime praecedentis, et est differentialis proxime sequentis; at in Triangulo Harmonico contra series data est summatoria proxime sequentis et differentialis proxime antecedentis Ex quibus sequitur esse

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\text{etc.}=\frac{1}{0}$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\text{etc.}=\frac{2}{1}$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}+\frac{1}{84}+\text{etc.}=\frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\frac{1}{126}+\frac{1}{210}+\text{etc.}=\frac{4}{3}$$

et ita porro.

Atque haec quidem habebat, cum nondum versatus esset in Analysi Cartesiana; sed cum hanc adjecisset, consideravit seriei terminum posse plerumque generali aliqua notatione designari, per quam ad seriem aliquam simplicem refertur. Verb. gr. si quivis terminus seriei naturalis 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 etc. vocetur x, quemlibet terminum seriei quadratorum fore xx, vel cuborum fore x^3 etc., quemlibet terminum triangularem, velut 0, 1, 3, 6, 10 etc. fore $\frac{x.\overline{x+1}}{1.2}$ seu $\frac{xx+x}{2}$, quemlibet pyramidalem 0, 1, 4, 10, 20 etc. fore $\frac{x.\overline{x+1}.\overline{x+2}}{1.2.3}$ vel $\frac{x^3+3xx+2x}{6}$, et ita porro. Et hinc per calculum generalem datae seriei posse inveniri seriem differentialem, et interdum etiam summatoriam, quando eam in numeris capit. Ex.

gr. quadratus est xx, proxime major est $xx+2x+1$, differentia eorum est $2x+1$, id est series numerorum imparium est series differentialis quadratorum. Nam si x sit 0, 1, 2, 3, 4 etc., $2x+1$ sunt 1, 3, 5, 7, 9. Eodem modo differentia inter x^3 et $x^3+3xx+3x+1$ est $3xx+3x+1$, itaque talis est terminus pro serie differentiali cuborum. Porro si valor termini seriei propositae possit ita exprimi per variantem x, ut varians neque denominatorem neque exponentem ingrediatur, videbat datae seriei summatricem semper inveniri posse. Ex. gr. si quaereretur summatrix quadratorum, cum constaret eam non posse assurgere ultra gradum cubi, fingebat ejus terminum esse $=lx^3+mxx+nx=z$, quaeritur $dz=xx$; fiet $dz=ld(x^3)+md(xx)+n$ (posito $dx=1$), sed $d(xx)=2x+1$, et $d(x^3)=3xx+3x+1$ (per jam inventa), ergo fiet

$$\begin{aligned} dz = 3lxx + 3lx & + l \\ + 2mx & + m \approx xx; \\ & + n \end{aligned}$$

ergo sit $l=\frac{1}{3}$, $m=-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+n=0$ seu $n=\frac{1}{6}$, seu terminus seriei quadratorum summatricis est $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}xx+\frac{1}{6}x$ vel $2x^3-3xx+x,:6$. Exempli causa si quis velit summam novem vel decem primorum quadratorum ab 1 usque 81, vel ab 1 usque ad 100, pro x sumat 10 vel 11 numerum proxime majorem radice ultimi quadrati, et $2x^3-3xx+x,:6$ erit $2000-300+10,:6=285$, vel $2.1331-3.121+11,:6=385$. Nec difficilius est multo, centum aut 1000 quadratos per compendium summare. Eademque methodus procedit in potentiis arithmeticorum quibuscunque aut formulis, quae ex potentiis talibus componuntur, ut scilicet semper quotcunque termini seriei talis compendio summari possint. Sed facile videbat noster, hoc non semper procedere, cum varians x ingreditur in denominatorem, ut scilicet summatrix series numerica reperiri possit; prosecuturus tamen hanc ipsam Analysin generaliter invenit atque etiam in Actis Eruditorum Lipsiensibus ostendit, semper posse inveniri seriem summatricem, vel rem reduci ad summandum numerum terminorum fractorum simplicium, velut $\frac{1}{x}$, vel $\frac{1}{xx}$, vel $\frac{1}{x^3}$ etc. qui numero terminorum finito proposito summari utique possunt, sed nondum compendiose satis; at si de numero terminorum infinito agatur, omnino summari non possunt termini quales $\frac{1}{x}$, quia tota series infiniti talis terminorum numeri est

quantitas infinita, sed termini numero infiniti quales $\frac{1}{xx}$ vel $\frac{1}{x^3}$, etsi conficiant quantitatem finitam, tamen hactenus summari non possunt, nisi suppositis quadraturis. Itaque jam A. D. 1682 mense secundo Actorum Lipsiensium observavit, si exponantur numeri 1.3, 3.5, 5.7, 7.9, 9.11 etc. seu 3, 15, 35, 63, 99 etc. atque inde fiat series fractionum

$$\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{35}+\tfrac{1}{63}+\tfrac{1}{99} \text{ etc.}$$

hanc seriem in infinitum descendentem componere non nisi $\frac{1}{2}$, sed si inde numeri excerpantur per saltum $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}+$ etc. exprimere magnitudinem semicirculi cujus diametri quadratum est 1. Nempe sit $x=1$ vel 2 vel 3 etc., terminus seriei $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{54}$ etc. est $\frac{1}{4xx+8x+3}$, quaeritur terminus seriei summatricis. Tentetur simplicissima ratione, an possit habere hanc formam $\frac{e}{bx+c}$; erit

$$\frac{e}{bx+c}-\frac{e}{bx+b+c}=\frac{eb}{bbxx+bbx+bc+2bcx+cc}\approx\frac{1}{4xx+8x+3},$$

quas duas formulas identificando fit $b=2$, $eb=1$, ergo $e=\frac{1}{2}$, $bb+2bc=8$ seu $4+4c=8$ vel $c=1$, et tandem $bc+cc=3$, quod succedit. Ergo terminus seriei summatoriae est $\frac{1:2}{2x+1}$ vel $\frac{1}{4x+2}$; sunt autem $4x+2$ imparium dupli. Postremo etiam vidit modum aliquem Calculum differentialem adhibendi ad series numericas, quando varians cadit in ipsum exponentem, ut in progressione geometrica, ubi posita radice b, terminus est b^x, existentibus x numeris naturalibus. Ergo terminus seriei differentialis erit $b^{x+1}-b^x=b^x(b-1)$, unde manifestum seriem differentialem datae geometricae esse etiam geometricam datae proportionalem. Unde summa progressionis Geometricae habetur.

Facile autem animadvertit noster Calculum differentialem in Figuris esse mirum in modum facilem prae eo, qui in numeris exercetur, quia in figuris differentiae ipsis differentibus comparari non possunt; quoties autem additione vel subtractione conjunguntur, quae sunt inter se incomparabilia, minora prae majoribus evanescunt, atque hinc etiam irrationales non minus facile differentiari quam surdas, tum ope logarithmorum ipsas quantitates exponentiales. Observabat autem lineas infinite parvas in figuris occurrentes nihil aliud esse quam differentias momentaneas linearum variantium. Et quemadmodum quantitates hactenus consideratae simpliciter apud Analystas habuerant suas functiones, nempe potentias et radices, ita jam quantitates ut variantes habere novas functiones, nempe differentias. Et ut habuimus hactenus x, xx, x^3 etc. y, yy, y^3 etc., ita posse adhiberi dx, ddx, d^3x etc. dy, ddy, d^3y etc. Eoque modo jam Curvas etiam, quas Cartesius tanquam Mechanicas ex Geometria exclusit, aequationibus localibus exprimi et calculo tractari posse, animumque a continua ad figuras intentione liberari. Et in applicatione Calculi differentialis ad Geometriam, differentiationes primi gradus nihil aliud esse quam inventiones tangentium, differentiationes secundi gradus esse inventiones osculantium (quorum usum noster introduxit), et ita porro procedi posse. Neque vero haec tantum inservire ad tangentes et quadraturas, sed ad omne genus problematum et theorematum, ubi differentiae cum Terminis integrantibus, ut vocavit ingeniosissimus Bernoullius, varie miscentur, quemadmodum in problematis Physico-Mechanicis fieri solet. Itaque generaliter constituit, si qua series numerorum vel figura linearum proprietatem habeat ex duobus vel tribus vel quatuor etc. terminis proximis pendentem, posse exprimi per aequationem, quam ingrediantur differentiae primi vel secundi vel tertii gradus. Quin etiam theoremata invenit generalia pro gradu differentiae quocunque, uti habebamus theoremata pro gradu quocunque, et miram reperit analogiam inter potentias et differentias in Miscellaneis Berolinensibus publicatam. Quam si novisset aemulus, non adhibuisset puncta pro gradibus differentiarum, quae inepta sunt ad generalem differentiae gradum exprimendum, sed notam *d* a nostro impositam vel similem retinuisset, ita enim d^e potest exprimere gradum differentiae generalem. Caeterum hinc jam omnia calculo exprimi poterant, quae olim figuris dabantur. Nam $\sqrt{(dxdx+dydy)}$ erat elementum curvae, ydx erat elementum areae, et $\int ydx$ et $\int xdy$ sibi mutuo esse complemento, statim ex eo patet, quod $d(xy)=xdy+ydx$ seu vicissim $xy=\int xdy + \int ydx$, quanquam interdum signa varientur; et ex eo quod $xyz= \int xydz+\int xzdy+\int yzdx$, etiam tria solida exhibentur, quae sibi mutuo sunt complemento. Nec est opus theoremata illa nosse, quae supra ex triangulo characteristico duximus, verb. gr. momentum curvae ex axe sufficit explicari per $x\int\sqrt{dxdx+dydy)}$. Et quae Gregorius a S. Vincentio habet de Ductibus, quae ipse aut Pasca-

lius de Ungulis aut Cuneis, omnia statim ex tali calculo nascuntur. Itaque quae antea ab aliis inventa cum applausu, a se detecta cum voluptate viderat, jam magnopere curare desiit, quod omnia jam in tali calculo continentur. Ex. gr. momentum figurae AXYA (fig. 157) ex axe AX est $\frac{1}{2}\int yydx$; momentum figurae ex tangente verticis est $\int xydx$; momentum trilinei complementalis AZYA ex tangente verticis est $\frac{1}{2}\int xxdy$; sed haec duo momenta posteriora simul sumta componunt momentum rectanguli circumscripti AXYZ ex tangente verticis, adeoque mutuo sibi sunt complemento, quod est $\frac{1}{2}xxy$. Sed hoc sine consideratione figurae ostendit etiam calculus, nam $\frac{1}{2}d(xxy)=xydx+\frac{1}{2}xxdy$, ita ut jam non magis tot praeclaris egregiorum virorum theorematis opus sit ad Geometriam Archimedeam, quam illis ab Euclide in libro 2. aut alibi datis plerisque ad Geometriam communem. Pulchre evenit, ut aliquando Calculus Transcendentium ducat ad ordinarias, quod Hugenio imprimis satisfaciebat. Veluti si inveniatur $2\int\frac{dy}{y}=3\int\frac{dx}{x}$, eo ipso fit $yy=x^3$, nempe ex natura Logarithmorum cum calculo differentiali combinata, quae etiam ipsamet ex eodem calculo derivatur; esto enim $x^m=y$, fiet $mx^{m-1}dx=dy$, ergo utrinque dividendo per aequalia erit $m\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dy}{y}$; rursus ex aeq. $m\log x=\log y$, ergo $\log x:\log y=\int\frac{dx}{x}:\int\frac{dy}{y}$. Unde etiam calculus exponentialis tractabilis redditur; esto enim $y^x=z$, fit $x\log y=\log z$, ergo $dx\log y + xdy:y=dz:z$. Et ita exponentes a variante liberamus, aut vicissim utiliter variantem in exponentem pro re nata transferimus. Denique ita ludus jocusque facta sunt, quae olim in admiratione erant. Hujus autem omnis calculi nec vola nec vestigium in aemuli scriptis ante edita a nostro Calculi praecepta extant, neque omnino quicquam quod non Hugenius aut Barrovius praestitissent modo eodem, si eadem tractassent. Sed quantum adjumenti praebeat hic calculus, candide agnovit Hugenius, quod adversarii supprimunt quantum possunt, et alia prorsus agunt, calculi differentiali propria in toto suo scripto non attingentes, tantumque in seriebus infinitis haerentes, quarum methodum aemulum prae aliis provexisse nemo negat. Quae enim sub aenigmate dixerat et tandem explicuit, de Fluxionibus et Fluentibus loquuntur, id est de quantitatibus finitis et eorum elementis infinite parvis, sed quomodo unum ex alio derivandum sit, nec minimum adjumentum praebent. Et dum ille rationes nascentes aut evanescentes considerat, prorsus a differentiali calculo abduxit ad methodum exhaustionum, quae longe diversa est (etsi suas quoque utilitates habeat) nec per infinite parvas, sed ordinarias procedit, etsi in illis desinat.

Cum ergo adversarii neque ex Commercio Epistolico, quod edidere, neque aliunde vel minimum indicium protulerint, unde constet aemulum tali calculo usum ante edita a nostro; ab his allata omnia ut aliena sperni possunt. Et usi sunt arte rabularum, ut judicantes a re de qua agitur ad alia diverterent, nempe ad series infinitas. Sed in iis nihil afferre potuerunt, unde Nostri candor gravaretur: nam ipse ingenue professus est, per quem in illis profecisset, sed tamen ibi quoque ad aliquid excelsius generaliusque tandem pervenit.

Beilage.

Aus der Correspondenz zwischen Leibniz und Christian Wolf geht hervor, dass Leibniz, der damals in Wien sich aufhielt, die erste Kunde von dem Erscheinen des schon seit längerer Zeit angekündigten *Commercium epistolicum Joh. Collinsii aliorumque de Analysi promota* und von der darin ausgesprochenen Sentenz der Londoner Societät der Wissenschaften in Betreff der Erfindung der Differentialrechnung durch Wolf erhielt, welchem ein Exemplar der gedachten Schrift direct aus England zugesandt worden war. Leibniz begriff, dass rücksichtlich seiner in dieser Sache sofort etwas geschehen müsse; indess entfernt von seinen Papieren, aus denen er die nöthigen Notizen zu einer vollständigen Entgegnung schöpfen konnte, entschloss er sich mit Benutzung der Materialien, die ihm eben zur Hand waren, zu der folgenden vorläufigen Erwiderung, die in Form eines fliegenden Blattes veröffentlicht werden sollte, und überschickte sie Wolf, um den Druck zu veranlassen und zu überwachen.

29 Jul. 1713.

Leibnitius nunc Viennae Austriae agens, ob locorum distantiam nondum vidit libellum in Anglia nuper editum, quo *Newtono* primam Inventionem Calculi differentialis vindicare quidam conantur. Ne tamen commentum mora invalescat, quam primum retundi debere visum est. Equidem negare non poterunt novam hanc Analyticam Artem primum a *Leibnitio* fuisse editam (cum diu satis pressisset) et publice cum amicis excultam, et post complures demum annos a *Newtono* aliis notis et nominibus quendam quem vocat Calculum Fluxionum, Differentiali similem, fuisse productum, qui tamen tunc nihil contra *Leibnitium* movere est ausus. Nec apparet quibus argumentis nunc velint *Leibnitium* haec a *Newtono* didicisse, qui nihil tale unquam cuiquam quod constet communicavit, antequam ederet. *Leibnitius* tamen ex suo candore alios aestimans libenter fidem habuit Viro talia ex proprio ingenio sibi fluxisse dictitanti; atque ideo scripsit, *Newtonum* aliquid Calculo differentiali simile habuisse videri. Sed cum postremo intelligeret, facilitatem suam contra se verti, et quosdam in Anglia praepostero gentis studio eousque progressos, ut non *Newtonum* in communionem inventi vocare, sed se excludere non sine vituperii nota vellent, et *Newtonum* ipsum (quod vix credibile erat) illaudabili laudis amore contra conscientiae dictamen tandem figmento favere; re attentius considerata, quam alias praeoccupato in *Newtoni* favorem animo exanimaturus non fuerat, ex hoc ipso processu a candore alieno suspicari coepit, Calculum fluxionum ad imitationem Calculi differentialis formatum fuisse. Sed cum ipse per occupationes diversas nunc rem discutere non satis posset, ad judicium primarii Mathematici et harum rerum peritissimi et a partium studio alieni recurrendum sibi putavit. Is vero omnibus excussis ita pronuntiavit literis 7 Junii 1713 datis:

„Videtur Newtonum occasionem nactus serierum opus multum promovisse per Extractiones Radicum, quos primus in usum „adhibuit, et quidem in iis excolendis ut verisimile est ab initio „omne suum studium posuit, nec credo tunc temporis vel somniavit adhuc de Calculo suo Fluxionum et Fluentium, vel de „reductione ejus ad generales Operationes Analyticas, ad instar „Algorithmi vel regularum Arithmeticarum aut Algebraicarum. „Ejusque meae conjecturae *(primum)* validissimum *indicium* est,

,,quod de literis punctatis $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}$; $\dot{y}, \ddot{y}$ etc., quas pro dx, ddx,
,,d^3x; dy, ddy etc. nunc adhibet, in omnibus istis Epistolis
,,(Commercii Epistolici Collinsiani, unde argumenta ducere vo-
,,lunt) nec volam nec vestigium invenias; imo ne quidem in
,,Principiis Naturae Mathematicis Newtoni, ubi calculo suo flu-
,,xionum utendi tam frequentem habuisset occasionem, ejus vel
,,verbulo fit mentio, aut notam hujusmodi unicam cernere licet,
,,sed omnia fere per lineas figurarum, sine certa analysi, ibi per-
,,aguntur more non ipsi tantum, sed et Hugenio, imo jam an-
,,tea (in nonnullis) dudum Torricellio, Robervallio, Fermatio,
,,Cavallerio, aliis usitato. Prima vice hae literae punctatae com-
,,paruerunt in tertio volumine Operum Wallisii, multis annis
,,postquam calculus differentialis jam ubique locorum invaluisset.
,,*Alterum indicium,* quo conjicere licet calculum fluxionum non
,,fuisse natum ante calculum differentialem, hoc est, quod veram
,,rationem fluxiones fluxionum capiendi, hoc est differentiandi
,,differentialia, Newtonus nondum cognitam habuerit, quod patet
,,ex ipsis Princip. Phil. Math., ubi non tantum incrementum con-
,,stans ipsius x, quod nunc notaret per x punctatum uno puncto,
,,designat per o (more vulgari, qui calculi differentialis commoda
,,destruit), sed etiam regulam circa gradus ulteriores falsam de-
,,dit (quemadmodum ab eminente quodam Mathematico dudum
,,notatum est).... Saltem apparet Newtono rectam Methodum
,,differentiandi differentialia non innotuisse, longo tempore post-
,,quam aliis fuisset familiaris etc.“ Haec ille.

Ex his intelligitur, *Newtonum*, cum non contentus laude promotae *synthetice* seu linealiter *per infinite parva vel* (ut olim minus recte vocabant) *indivisibilia Geometriae,* etiam inventi *analytici* seu *Calculi differentialis*, a *Leibnitio* in Numeris primum reperti et (excogitata Analysi infinitesimalium) ad Geometriam translati, decus alteri debitum affectavit, adulatoribus rerum anteriorum imperitis nimis obsecutum fuisse, et pro gloria, cujus partem immeritam aliena humanitate obtinuerat, dum totam appetit, notam animi parum aequi sincerique meruisse: de quo etiam Hookium circa Hypothesin Planetariam, et Flamstedium circa usum observationum questos ajunt.

Certe aut miram ejus oblivionem esse oportet, aut magnam contra conscientiae testimonium iniquitatem, si accusationem (ut

ex indulgentia colligas) probat, qua quidem ejus asseclae etiam seriem, quae arcus circularis magnitudinem ex tangente exhibet, a *Gregorio* didicisse *Leibnitium* volunt. Tale quiddam *Gregorium* habuisse, ipsi Angli et Scoti, Wallisius, Hookius, Newtonus et junior Gregorius, prioris credo ex fratre nepos, omnes ad hoc usque tempus, id est ultra triginta sex annos ignorarunt, et *Leibnitianum* esse inventum agnoverunt. Modum quo *Leibnitius* ad seriei Nic. Mercatoris (primi talium inventoris) imitationem invenit seriem suam, ipse statim Hugenio Lutetiae agenti communicavit, qui et per Epistolam laudavit; eundem sibi communicatum laudavit ipse mox *Newtonus*, fassusque est in literis hanc novam esse Methodum pro seriebus ab aliis quod sciret nondum usurpatam. Methodum deinde generalem series inveniendi pro curvarum etiam transcendentium ordinatis tandem in Actis Lipsiensibus editam non per extractiones dedit, quibus *Newtonus* usus est, sed ex ipso fundamento profundiore Calculi differentialis *Leibnitius* deduxit; per hunc enim calculum etiam res seriorum ad majorem perfectionem deducta est. Ut taceam Calculi exponentialis, qui Transcendentis perfectissimus est gradus, quem *Leibnitius* primus exercuit, Johannes vero Bernoullius proprio marte etiam assecutus est, nullam *Newtono* aut ejus discipulis notitiam fuisse et horum aliquos, cum etiam ad calculum differentialem accedere vellent, lapsus subinde admisisse, quibus eum parum sibi intellectum fuisse prodiderunt, quemadmodum ex junioris Gregorii circa Catenariam paralogismo patet. Caeterum dubium non est, multos viros praeclaros in Anglia hanc Asseclarum Newtonianorum vanitatem et iniquitatem improbare, nec vitium paucorum genti imputari debet.

Da von dem Streit zwischen Leibniz und Newton die Journale damaliger Zeit wiederhallten, wobei meistens unrichtige Auffassungen in Betreff Leibnizens zu Tage gefördert wurden, so sah sich derselbe veranlasst, überall abwehrend aufzutreten und seine Rechte zu vertheidigen. Von diesen Entgegnungen mögen die beiden folgenden hier eine Stelle finden; die erste ist für das Journal literaire, das im Haag erschien, die zweite für eine deutsche Zeitschrift bestimmt.

I.

REMARQUE SUR LA CONTROVERSE ENTRE M. DE LEIBNIZ ET M. NEWTON.

La Relation mise sur ce sujet dans les Nouvelles literaires qu'on publie à la Haye depuis peu, est pleine d'erreurs de faits palpables, qui viennent d'une tres mauvaise information. Cette controverse n'a jamais été agitée autresfois entre ces deux Messieurs, jamais M. Newton n'avoit donné à connoitre qu'il pretendoit ravir à M. de Leibniz la glorie d'avoir inventé de son chef le calcul des differences. Et M. de Leibniz n'a jamais sçeu que par ceux qui ont vû le *Commercium Epistolicum* publié depuis à Londres (car étant à Vienne maintenant, il ne l'a pas encor vû luy même), que M. Newton prenoit part à la chicane que des personnes malinformées ou envieuses avoient suscitée depuis peu. M. de Leibniz n'a jamais communiqué ses Raisons à la Societé Royale d'Angleterre, ne croyant pas en avoir besoin dans une affaire evidente, il avoit seulement écrit qu'il ne doutoit point que la Societé et M. Newton luy même ne desapprouvassent ce procedé. Ainsi la Societé n'a point pû examiner les Raisons de part et d'autre pour prononcer la-dessus.

Voicy maintenant un rapport veritable. Il y a eu un commerce de lettres entre Messieurs de Leibniz, Oldenbourg, Newton, Collins et autres il y a quarante ans, et un peu avant et après. Quelque chose en a été publiée par feu M. Wallis dans le troisieme Tome de ses Oeuvres Mathematiques. On y voit que M. Newton faisoit un Mystere d'une certaine chose qu'il disoit avoir découverte et qu'il a voulu faire passer par apres pour le calcul des Differences, au lieu que M. de Leibniz luy communiqua franchement le fondement de ce calcul, comme ces mêmes lettres publiées par M. Wallis le temoignent, quoyqu'il se soit trouvé que M. Newton ne l'ait pas bien compris surtout par rapport aux differences des differences. Or depuis on a trouvé encore d'autres lettres echangées par M. Collins et ses amis, et on les a publiées maintenant à Londres avec des Additions, dans lesquelles on a pretendu sur des conjectures frivoles et fausses suppositions que le Calcul des differences etoit dû à M. Newton, et que M. de Leibniz l'avoit appris de luy, quoyque le contraire se voye clairement et en termes exprès dans leur lettres publiées par M. Wallis. L'auteur de ces additions a voulu juger temerairement des choses dont il etoit mal instruit, et il a fort mal rencontré quand il a voulu deviner comment M. de Leibniz étoit parvenu à son invention. Il s'est trouvé de plus, que M. Newton luy même a ignoré encore le veritable Calcul des differences, lorsqu'il a publié son livre intitulé *Principia Philosophiae Naturalis Mathematica*, non seulement en n'en faisant rien paroitre, quoyqu'il y eût des grandes occasions de le faire valoir, mais encore en faisant des fautes capitales, qui ne pouvoient etre compatibles avec la connoissance de ce calcul, ce qu'un illustre Mathematicien fort impartial a remarqué le premier. M. de Leibniz avoit deja publié son calcul quelques années auparavant en 1684, et M. Newton n'a jamais rien communiqué d'approchant à qui que ce soit, autant que l'on sache, ny en public ny en particulier, que longtemps apres la publication de ses Principes Mathematiques de la Nature, c'est à dire lorsque M. Wallis publia ses Oeuvres Mathematiques en trois volumes, quand l'invention de M. de Leibniz etoit déja celebre et practiquée publiquement, sur tout par Messieurs Bernoulli freres, avec un succès et applaudissement qui paroist avoir donné envie à M. Newton (mais un peu trop tard) d'y prendre part. L'on voit d'abord en considerant ce qu'il a publié par M. Wallis que l'invention de M. de Leibniz y paroist sous d'autres noms et d'autres caracteres, mais bien moins convenables. Cependant M. Newton et alors et longtemps apres n'a jamais osé troubler M. de Leibniz dans la possession de l'honneur de sa decouverte. Et lors que Messieurs Hugens et Wallis, juges impartiaux et bien instruits, vivoient encore, il a vû qu'il n'y trouveroit point son compte, et il a attendu un temps, où il ne reste plus personne de ceux qui ont été les temoins des progrés de cette science et même y ont contribué beaucoup, et il a maintenant recours à des novices mal informés de ce qui s'est passé, et qui n'en jugent que par leur preventions ou passions. Un certain nouveau venu a voulu se mettre en reputation en attaquant M. de Leibniz et en luy envoyant une espece de defy par écrit, mais comme cet adversaire ne paroissoit pas d'humeur à se vouloir laisser instruire, M. de Leibniz ne voulut point s'engager en dispute avec luy. Et il a bien fait, car autrement il auroit fourni pretexte à ce chicaneur de dire que le proces avoit été instruit par des raisons de part et d'autre, et qu'on avoit pû prononcer sentence la-dessus, au lieu que maintenant les pretendus juges (qui ne sont nullement la Societé Royale) n'ont vû que les raisons d'un parti. La-dessus on a publié ce *Commercium Epistolicum de M. Collins*, croyant d'y avoir trouvé la pie au nid, quoyqu'il n'y aye rien qui serve à decider cette question du veritable inventeur du Calcul des differences. Et M. Newton a eu la foiblesse de participer à cette mauvaise demarche: *Si tacuisset, particeps inventionis mansisset.* M. de Leibniz ayant eu la facilité de le croire sur sa parole qu'il pouvoit avoir eu quelque chose d'approchant de son chef, mais le contraire se decouvre maintenant à plein, les personnes instruites et neutres se sont moquées d'une pretension si tardive et si mal fondée. Et on a publié la-dessus le jugement impartial d'un illustre Mathematicien, fondé sur le long silence et qui plus est, sur les erreurs de M. Newton, qui font voir qu'il a encore ignoré depuis peu ce qu'il pretend avoir eu avant M. de Leibniz, c'est à dire il y a 40 ans.

II.

Es kommen im Haag wöchentlich gewisse Zeitungen von gelehrten Sachen heraus. In das stück so den 21. Septembr. dieses jahres gedruckt, hat iemand einen kurzen, aber übelgegründeten bericht einrücken lassen vom streit zwischen Hrn. von Leibniz und Sir Newton, die Erfindung des Calculi differentialis betreffend. Einige vortreffliche Mathematici, so die sache ausm grund verstehen und unpartheyisch seyn, haben vor den ersten gesprochen, und des einen urtheil ist in öffentlichen druck kommen. Der Hr. Erfinder selbst hat sich mit zanksüchtigen Leuten nicht einlassen wollen, zumahl da Sir Newton selbst nicht erschienen, aber ein guther freund des Hrn. Erfinders hat sich geärgert, als er in obgedachten bericht gelesen, wie dessen urheber der sach eine ganz falsche gestalt geben wollen, und hat gemeynet, er könne nicht besser thun, wenn er in den *Deutschen* Zeitungen der gelehrten beantworte, was man aus dem *Englischen* genommen.

Der Bericht sagt: *Die welt wisse*, daß M. L. den M. N. *die erfindung des Calculi Differentialis* streitig machen *wolle*; allein die welt weis das gegentheil, und es ist notorisch, daß etliche anhänger des Hrn. N. von kurzer zeit hehr dem urheber die Ehre der Erfindung zweifelhaft zu machen getrachtet, die er von vielen jahren hehr genießet und daß iederman die neuligkeit solcher praetension

wunderlich vorkommen, die solche leute verschoben, biß Hr. Hugens, Wallis und andere gestorben, die es besser gewust und bey deren lebenszeit sie mit dergleichen herfürzukommen, sich mehr scheuen müssen.

Der Erfinder hat den grund der Erfindung bereits im jahr 167. in einer Epistel dargegeben, die hernach Hr. Wallis ins dritte theil seiner wercke aus eigner bewegniß aus dem original eingerücket. Und hernach hat der Erfinder die Erfindung selbst gemein gemacht in der Actis Eruditorum 168., welche bald darauf von einigen vortreflichen Geometris aufgefasset und mit großem Nuz gebrauchet worden. Als Hr. N. diesen glücklichen fortgang gesehen, hat er auch theil daran nehmen wollen und seine weise im jahr 168. zuerst bekannt gemacht, da er zuvor nicht die geringste anzeige gegeben, daß er eine solche art zu rechnen gebrauchet. Die guthe Meynung die man von ihm gehabt, hat verursachet, daß man gern glauben wollen, er habe etwas dergleichen von sich selbst erhalten; aber nachdem man seines theils den streit erreget, hat ein unpartheyischer Geometra vom ersten rang die sach genauer untersucht und geschlossen, Hr. N. habe etwas gehabt, so dieser Rechnungskunst nahe verwand, aber nicht solche selbst, wie denn sein urtheil davon gedruckt.

Der Bericht sagt ferner: Hr. *von* L. *habe die gelehrten in Frankreich dergestalt zu bereden gewust, daß sie auf sein wort geglaubet, er sey der Erfinder*, aber die gelehrten in Frankreich sind eben so leichtgläubig nicht. Es hat sich auch der Erfinder seiner erfindung bei ihnen nicht gerühmet, sondern sie haben gesehen, daß er sie herfürgeben, und sie haben sie nach seinem Exempel sich wohl zu nuze gehabt. Die gelehrten in Welschland, Niederland, ja in England selbst (Teutschland zu geschweigen) haben geurtheilet wie Sie.

Letzteres wird in mehrgedachtem bericht vorgegeben, daß man eine gar genaue Nachricht von diesem streit in den philosophischen Transactionen der Engländer des Januarii nnd Februarii dieses jahres finden werde, ganz anders als die so in die ausländischen Tagebücher der gelehrten und sonderlich ins Journal literaire vom Julio und Augusto des jahres 1713 artic. 4 kommen. Allein es haben gleichwohl Leute dieser Parthey selbst solche vermeynte nachricht in das Journal literaire gegeben; aber da die fehler und ausflüchte dieser Leute iedermann, so die sach zu untersuchen bequem und geneigt, in die Augen fallen, so hat man vor unnöthig gehalten sich darauf ferner einzulassen und abermahls zu antworten.