unam, ternae ad binas, quaternae ad ternas, et ita porro, quae hic persequi non est necesse. Unde jam cuncta esse in potestate apparet, quanquam ea quoque Canonibus seu Theorematibus complecti conveniens foret.

Postremo cum Mathematicus ingeniosissimus, si quisquam, Dn. Johannes Bernoullius, ostenderit, se quoque jam ab aliquo tempore tali quadam Analysi uti, et ideo problema transmiserit Actis inserendum, verbis sequentibus illud subjicietur. Ubi tamen ab eo dissentire cogor, quod omnia ad quadraturam Circuli et Hyperbolae (praeter ordinarias quadraturas) hic reduci putat, cum in Specimine supradicto, Actis Maji inserto, demonstratum a me sit, alias sine fine aliis altiores quadraturarum rationalium transcendentium species ordine dari, a se invicem independentes, quadraturasque Hyperbolae et Circuli ex illis omnibus primas et simplicissimas esse.

XXVI.

QUADRATURAE IRRATIONALIUM SIMPLICIUM.*)

Cum quaeritur $\int ♀ \sqrt[e]{☽}\,dx$, posito ☽ esse $10+11x+12xx+$ etc. et ♀ esse $20+21x+22xx+$ etc., res quidem semper obtineri potest ponendo hanc summationem esse aequalem huic quantitati $⊙\sqrt[e]{☽}+\int ♃ \sqrt[e]{☽}\,dx$, ut ♃ sit formula simplicior quam ♀, quando id licet opusque est. Nec alia potest haberi quadraturae indefinitae hic formula, quia oportet *Quantitatem et ejus Summatricem ejusdem esse Ambiguitatis* seu aequationem, in qua una earum sit incognita, habere tot radices, quot aequatio, in qua altera earum incognita est, et proinde ambae Quantitates irrationalitate hoc praestante afficiuntur, et quantitatis uno radicali vinculo comprehensae differentiale per illam ipsam irrationalem multiplicatur; nam $d\sqrt[e]{☽}$ est $d☽\sqrt[e]{☽}:e☽$, si e sit constans, etiam si ☽ non rationalis tantum, ut hic, sed utcunque irrationalis foret. Itaque ut tollamus denominatorem, faciemus $⊙=e☽☿$ et erit $d(e☽☿\sqrt[e]{☽})=e☽d☿+(e+1)☿d☽,\sqrt[e]{☽}$. Hoc jam differentiale oportet cum dato Elemento summationis $♀\sqrt[e]{☽}dx$

---

*) Leibniz hat bemerkt: Hoc est fusius, quam quod ad Dn. Jac. Bernoullium misi, et posset inseri Actis. — Vergl. Leibnizens Brief an Jac. Bernoulli dat. April. 1705.

comparare, vel ut ego loqui malo coincidentiare accedente alio si opus summationis Elemento consimili, sed simpliciore $♃\sqrt[e]{☽}dx$, formulis ☿ et ♃ ita assumtis, ut coefficientes potestatum ipsius x quantitates constantes sint *arbitrariae determinandae ope aequationum auxiliarium coincidentiantium* ejusdem terminos ipsius x, in oppositis lateribus aequationis (in effectu identicae) $e☽d☿+(e+1)☿d☽+♃dx=⊙dx$ occurrentes, vel destinantium coefficientem cujusque potentiae ipsius x in aequatione

$$(e☽d☿+(e+1)☿d☽,:dx)+♃-♀=0,$$

ubi ponendo $☿=30+31x+32xx+$ etc. et exponentes graduum summorum ipsarum formularum ☽, ♀, ☿ vocando respective α, β, γ, ideo cum utile sit sumere ☿ quam plurimorum licet terminorum, quia in vinculo summatorio reperitur tantoque plures arbitrarias suppeditat, fiet $\gamma=\beta+1-\alpha$, eruntque ipsius ☿ termini adeoque et arbitrariae $\beta+2-\alpha$; sed in universum arbitrariis indigemus $\beta+1$, tot enim prodeunt termini coincidentiandi, ergo desiderantur adhuc arbitrariae $\alpha-1$ quas suppeditabit ♃, adeoque erit terminorum $\alpha-1$. Itaque si sit $☽=10+11x+12xx+13x^3+14x^4$, erit $\alpha=4$, et multitudo terminorum ipsius ♃ erit 3, nempe vel $40+41x+42xx$ vel $41x+42xx+43x^3$, vel $42xx+43x^3+44x^4$, aliterve tres aut continuos sibi aut etiam distantes invicem terminos conjungendo, modo ne summus excedat gradum ipsius ♀. Sed simplicissima est ex his prima, ut ♃ sit $40+41x+42xx$, et ita δ (exponens gradus ipsius ♃) erit $\alpha-2$.

Hoc modo igitur instituto Calculo potest generalis dari Canon, quo inveniantur quaesitae 30, 31, 32 etc. et 40, 41, 42 etc. Sed ut calculum adhuc magis contrahamus, suffecerit, loco ipsius formulae datae ♀, assumi unum ejus terminum, nempe summum, verbi gratia, si sit $♀=20+21x+22xx+23x^3+24x^4$, possunt 20, 21, 22, 23 poni aequales nihilo, manente solum $24x^4$, ubi etiam 24 pro unitate haberi potest, adeoque supererit x^4, vel generaliter x^r. Singulis enim $x^r\sqrt[e]{☽}dx$ ad summationem deductis, utique etiam aggregata ex ipsis formula recipit summationem. Ponamus ergo in exemplum, quod sit Canonis vice, esse

$$☽=10+11x+12xx+13x^3+14x^4$$
$$♀=\ * \quad * \quad * \quad * \quad * \quad * \qquad x^8$$
$$☿=30+31x+32xx+33x^3+34x^4+35x^5$$
$$♃=40+41x+42xx$$

et hoc sensu esse $\int x^8\sqrt[e]{☽}=e☿☽\sqrt[e]{☽}+\int ♃\sqrt[e]{☽}dx$ atque adeo $e☽d☿+$

(e+1)☿d☽—♃dx—x^8=0. Hinc instituta identificatione ad inveniendas Quantitates arbitrarias, valores invenientur aequationibus mox secuturis, quas ingrediuntur Numeri 194, 184 etc. 183, 173 etc. 172, 162 etc., quorum significatio apparet ex Tabula sequenti א, ubi ex. gr. 173 significat 7e+3,13; et 162 significat 6e+2,12, ubi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sunt numeri veri, sed 10, 11, 12, 13, 14, ut et 150, 161, 172 etc. sunt fictitii, ideo sic expressi loco literarum velut a, b, c etc., ut melius relationes atque coordinationes harum quantitatum ex ipsa designatione intelligerentur.

Tabula א.

9e + 4, 14 194	8e + 4, 14 184	7e + 4, 14 174	6e + 4, 14 164	5e + 4, 14 154
8e + 3, 13 183	7e + 3, 13 173	6e + 3, 13 163	5e + 3, 13 153	4e + 3, 13 143
7e + 2, 12 172	6e + 2, 12 162	5e + 2, 12 152	4e + 2, 12 142	3e + 2, 12 132
6e + 1, 11 161	5e + 1, 11 151	4e + 1, 11 141	3e + 1, 11 131	2e + 1, 11 121
5e + 0, 10 150	4e + 0, 10 140	3e + 0, 10 130	2e + 0, 10 120	1e + 0, 10 110

Hinc jam prodeunt valores sequentes Quantitatum arbitrariarum assumtarum Tabula sequenti ב

Tabula ב.

35=+1 : 194

34=—183 : 194.184

33=—184.172+183.173 : 194.184.174

32=—184.174.161+183.174.162+184.172.163
—183.173 .. } : 194.184.174.164

31=—184.174.164.150+183.174.164.151+184.172.164.152+184.174.161.153
—183.173 .. —183.174.162. . .
—184.172.163. . .
+183.173 .. . . } : 194.184.174.164.154

30=—184.174.164.154.14$\bar{1}$+183.174.164.154.140+184.172.164.154.141+184.174.161.154.142+184.174.164.150.143
hic terminus evanescit, quia nota dextra quae sit $\bar{1}$ seu — 1, non datur.
—183.173 . . . . —183.174.162 . . . . . . —183.174.164.151. . .
—184.172.163 . . . . . . —184.172.164.152. . .
+183.173 . . . . +183.173 . . . .
—184.174.161.153 . . .
+184.174.162 . . . . .
+184.172.163 . . . . .
—183.173 . . . . } : 194.184.174.164.154.144

Ubi inspecto processu calculi ipsisque valoribus prodit Regula talis valores continuandi, quantuscunque sit Numerus hujusmodi quaesitorum. Denominatores quidem manifesti sunt 194, 194.184, 194.184.174 etc., ubi numerorum nota dextra est eadem, nempe α (hoc loco 4), notae vero sinistrae (omissis 1 initialibus semper occurrentibus) sunt $\gamma+\alpha$, $\gamma+\alpha-1$, $\gamma+\alpha-2$ etc. (hoc loco $5+4$, $5+4-1$, $5+4-2$ etc.). Quoad Numeratores valorum, in primo valore, nempe ipsius 3γ (seu 35 hoc loco) is Numerator est unitas. De caetero ex praecedentis valoris Numeratore sic eruitur via brevi et generali Numerator valoris sequentis. Sit prior Numerus 3k (velut 32), et in quovis membro numeratorem quem habet valor ipsius ingrediente numerus, cujus nota sinistra est inter caeteras minima quae vocetur h (et est semper $\alpha+k$), minuatur unitate, et tantundem minuatur ipsi adhaerens nota dextra (ita in valore ipsius 32 ex 61, 62, 63 fiet pro ipsius valore 50, 51, 52), et quod provenit multiplicetur per numerum cujus nota sinistra sit h, dextra vero α (hoc loco per 64), deinde a producto auferatur aliud productum ex eodem valoris ipsius 3k numeratore toto qualis erat, multiplicato per Numerum, cujus nota sinistra sit $h-1$, nota vero dextra $\alpha-1$ (hoc loco per 53). Ita prodit Numerator novus pro valore ipsius numeri 4k (hoc loco 31). Quodsi contingat notam dextram debere ascendere infra 0, ad -1 seu $\overline{1}$, membrum, quod prodire alias deberet, evanescit, ascripsi tamen in valore ipsius 30, harmoniae servandae causa, nam membrum primum valoris ipsius 31 est $-84.74.64.50$, ibi Numerus 50 (nempe cujus nota sinistra est minima) utraque nota debet diminui unitate et quod provenit multiplicari per 54; et ita pro membro valoris ipsius 30 prodit $-84.74.64.54.4\overline{1}$, quod membrum etsi evanescat seu abjiciendum sit, quia in tabula $\aleph$ non extat $4\overline{1}$, ascriptum est tamen ut harmonia cum praecedentibus valoribus servetur.

Et est alia via non multum diversa, sed qua uniuscujusque valoris numerator per se constitui potest independenter a valore praecedenti. Quaeratur Numerator in valore ipsius 3k (verb. gr. 31). Digero autem numeratorem in Terminos, eritque Terminus primus, secundus, tertius etc., qui multiplicatur respective per numerum cujus nota sinistra semper est eadem $\alpha+k$ (hoc loco 5), nota vero dextra est respective quod relinquitur a sinistra auferendo $\gamma, \gamma-1, \gamma-2$ etc. Hi Numeri $\alpha+k \mid \alpha+k-\gamma$, vel $\alpha+k \mid \alpha+k-\gamma+1$, vel $\alpha+k \mid \alpha+k-\gamma+2$, et ita porro (hoc loco in 31 ipsi 50

51, 52, 53) usque ad ultimum cujus nota dextra semper est $\alpha-1$, seu qui est $\alpha+k$, $\alpha-1$ (hoc loco 53), sunt multiplicatores uniuscujusque Termini. Porro primus terminus constat uno membro, quod praeter numerum dictum multiplicatorem $\alpha+k \mid \alpha+k-\gamma$ (hoc loco 50) producitur ex numeris, quorum notae sinistrae fiunt hujus sinistram augendo per 1, 2, 3 etc. usque ad $\alpha+\beta-1$, notae vero dextrae sint semper α (in hoc casu 6, 7, 8, unde in valore ipsius 31 id membrum est 84.74.64.50). Et huic primo Termino praefigitur signum — (comprehendo autem etiam imaginarios modo dicto, ut in 30), deinde Terminus omnis novus ejusdem Numeratoris producitur ex omnibus praecedentibus mutatis eorum signis et abjectis eorum multiplicatoribus jam praedictis, proque iis substituto multiplicatore Termini novi, postremo numerum omnibus communem in termino qui a novo est retro-primus, retro-secundus, retro-tertius etc., minuendo unitate, binario, ternario etc. Et harum duarum viarum collatio ad calculi verificationem inservire potest.

Exhiberi etiam valorum Regula potest Generali quadam *Lege Combinationis* hoc modo. Nempe valoris cujusvis ut 3k (velut 31, si k sit 1) numerator quivis (nam denominatores per se patent) est aggregatum omnium combinationum possibilium, quae fiunt si in se invicem ducantur tot numeri, quot in $\gamma-k$ sunt unitates, quorum Numerorum notae sinistrae sint $\alpha+\gamma-1$, $\alpha+\gamma-2$, $\alpha+\gamma-3$ etc., quae vocentur φ (hoc loco 8, 7, 6, 5), dextrae vero notae fiant, si sinistris dicto ordine manentibus, instituantur omnes possibiles transpositiones totidem numerorum 1, 2, 3 etc., qui vocentur ψ (hoc loco 1, 2, 3, 4), ita ut semper secundum eum qui prodit ordinem prioribus applicentur (hoc loco 1, 2, 3, 4) cavendo tantum ne ad notam sinistram seu unum ex prioribus numeris φ aliquis ex ψ seu posterioribus applicetur, qui cum ipso faceret summam majorem quam $\beta+2$ (hoc loco plus quam 10, unde non licet 4 vel 3 applicare ad 8 nec 4 ad 7). Excessus autem ipsius $\beta+2$ super summam detractus ab α dabit notam sinistram, quae erit $\varphi+\psi+\alpha-\beta-2$ (verbi gratia si 3 applicetur ad 6, erit sinistra $4-(10-9)=3=6+3+4-8-2$, numerusque erit 63). Itaque in exemplo valoris Numeri 31 omnia Numeratoris membra sequenti combinatione in Tabula $\beth$ expressa prodibunt. Signorum quoque lex est memorabilis, ut in imparibus combinationibus membra duo bina quaevis, quae numeros impari multitudine communes habent (veluti unum, tres etc.), oppositis gaudeant signis; quae pari multitudine gaudeant, iisdem; contrarium vero fiat in combinationibus paribus. Ita ex unius membri signo signa caeterorum omnium derivari possunt, et quidem si k sit impar, membrum, in quo omnes notae dextrae sunt, eodem affectum est signo +; sin k sit par, afficietur signo —. Hinc valor ipsius 31 prodit talis, qui ante, sed ad hujus combinationis Legem formatus:

Tabula ג

$$\left.\begin{array}{l} +\ 18_1 3\ .\ 17_2 3\ .\ 16_3 3\ .\ 15_4 3 \\ -\ 18_1 3\ .\ 17_2 3\ .\ 16_4 4\ .\ 15_3 2 \\ -\ 18_1 3\ .\ 17_3 4\ .\ 16_2 2\ .\ 15_4 3 \\ +\ 18_1 3\ .\ 17_3 4\ .\ 16_4 4\ .\ 15_2 1 \\ -\ 18_2 4\ .\ 17_1 2\ .\ 16_3 3\ .\ 15_4 3 \\ +\ 18_2 4\ .\ 17_1 2\ .\ 16_4 4\ .\ 15_3 2 \\ +\ 18_2 4\ .\ 17_3 4\ .\ 16_1 1\ .\ 15_4 3 \\ -\ 18_2 4\ .\ 17_3 4\ .\ 16_4 4\ .\ 15_1 0 \end{array}\right\} : 194\ .\ 184\ .\ 174\ .\ 164 = 31,$$

ubi numeri sub lineis extantes, tantum ad formandas notas numerorum sinistras adhibiti, sunt habendi pro non ascriptis.

Notatu autem dignum est, Numerum Transpositionum sic permissarum semper esse ex iis qui sunt progressionis Geometricae duplae, si non omittantur membra quae evanescunt ob descensum notae dextrae infra 0. Sed et ipso Numeratore ordinato secundum Multiplicatores ejusdem notae dextrae minimae (velut in 30 secundum $14\bar{1}$, 140, 141, 142, 143), Termini, demto primo, habent numerum membrorum progressione Geometrica crescentem. Nec inutile tamen erit diversas ejusdem Numeratoris ordinationes conferre inter se; ita in 31 ordinando secundum 150, 151, 152, 153, stat numerator ut scripsimus, ordinando vero secundum 161, 162 etc., vel secundum 172, 173 etc., vel secundum 183, 184, fiet

+184.174.153.161 — 183.174.153.162 — 184.172.153.163 — 184.174.150.164
+183.173.153 . . +183.174.151 . .
+184.172.152 . .
+183.173 . . . . . .

vel

+ 184.164.152.172 — 183.164.152.173 — 184.164.150.174
— 184.163.153 . . + 183.163.153. . . + 183.164.151 . .
+ 184.161.153 . .
— 183.162. . . . .

vel

+ 174.164.151.183 — 174.164.150.184
— 173.164.152 . . + 172.164.152 . .
— 174.162.153 . . + 174.161.153 . .
+ 173.163. . . . . — 172.163 . . . . .

Ita valor ipsius 31 quatuor diversis modis ordinari potest, secundum 15., vel secundum 16., vel secundum 17., vel secundum 18. Sed subordinatio semper fieri potest per 16., 17., 18.; vel per 15., 17., 18; vel per 15., 16., 18.; vel per 15., 16., 17. At ita in valore ipsius 30, Numeratorem ordinando secundum 14. (seu secundum $14\bar{1}$, 140, 141, 142, 143) stat qualem scripsimus, sed ordinando secundum 15. (seu secundum 150, 151, 152, 153, 154) vel secundum 16. (seu secundum 161, 162, 163, 164) vel secundum 17. (seu secundum 172, 173, 174) vel secundum 18. seu secundum 183, 184), prodibunt ordinationes quae sequuntur, non minus quam prima certa lege procedentes, ut apparet ex Tabula ה.

Tabula $\sqcap$

$+184.174.164.143.150 - 183.174.164.143.151 - 184.172.164.143.152 - 184.174.161.143.153 - 184.174.164.14\bar{1}.154$
$+183.173 \ldots\ldots + 184.174.162 \ldots\ldots + 183.174.164.140 \ldots$
$+184.172.163 \ldots\ldots + 184.172.164.141 \ldots$
$-183.173 \ldots\ldots - 183.173 \ldots\ldots$
$+184.174.161.142 \ldots$
$-183.174.162 \ldots\ldots$
$-184.172.163 \ldots\ldots$
$+183.173 \ldots\ldots$ divis. per 194. 184. 174. 164. 154. 144 $= 30$

vel $+184.174.154.142.161 - 183.174.154.142.162 - 184.172.154.142.163 - 184.174.154.14\bar{1}.164$
$-184.174.153.143 \ldots + 183.174.153.143 \ldots + 183.173.154 \ldots\ldots + 183.174.154.140 \ldots$
$+184.172.153.143 \ldots + 184.172.154.141 \ldots$
$-183.173 \ldots\ldots - 183.173 \ldots\ldots$
$+184.174.150.143 \ldots$
$-183.174.151 \ldots\ldots$
$-184.172.152 \ldots\ldots$
$+183.173 \ldots\ldots$ divis. per 194. 184. 174. 164. 154. 144 $= 30$

vel $+184.164.154.141.172 - 183.164.154.141.173 - 184.164.154.14\bar{1}.174$
$-184.163.154.142 \ldots + 183.163.154.142 \ldots + 183.164.154.140 \ldots$
$-184.164.152.143 \ldots + 183.164.152.143 \ldots + 184.161.154.142 \ldots$
$+184.163.153 \ldots\ldots - 183.163.153 \ldots\ldots - 183.162 \ldots\ldots$
$+184.164.150.143 \ldots$
$-183.164.151 \ldots\ldots$
$-184.161.153 \ldots\ldots$
$+183.162 \ldots\ldots$ divis. per 194. 184. 174. 164. 154. 144 $= 30$

vel $+174.164.154.140.183 - 174.164.154.14\bar{1}.184$
$-173.164.154.141 \ldots + 172.164.154.141 \ldots$
$-174.162.154.142 \ldots + 174.161.154.142 \ldots$
$+173.163 \ldots\ldots - 172.163 \ldots\ldots$
$-174.164.151.143 \ldots + 174.164.150.143 \ldots$
$+173.164.152 \ldots\ldots - 172.164.152 \ldots\ldots$
$+174.162.153 \ldots\ldots - 174.161.153 \ldots\ldots$
$-173.163 \ldots\ldots + 172.163 \ldots\ldots$ divis. per 194. 184. 174. 164. 154. 144. $= 30$

In omnibus istis ordinationibus valoris ipsius 3k (nempe 31 vel 30) Termini novi coefficiens fit ex omnium priorum ejusdem valoris Terminorum coefficientibus, mutatis eorum signis et Numeri omnibus communis notam dextram in termino retro-primo, retro-secundo, retro-tertio etc. minuendo unitate, binario, ternario etc. Quodsi praecedentes omnes coefficientes non habeant Numerum communem (quod contingit in quaerendo Termino ultimo ordinationis primum terminum non habentis unimembrem), dividantur in duas partes, quarum una unum, altera alium habeat numerum communem et quidem notarum sinistrarum quantum licet depressarum, quorum prior $1\ |\alpha+1+k|\ \alpha$ (hoc loco 154),

posterior $1\ |\alpha+k|\ \alpha-1$ (hoc loco 143);

in parte quae priorem (posteriorem) numerum cuivis membro communem habet, manentibus caeteris mutentur signa, et ubi nota sinistra est $\alpha+k$ $(\alpha+1+k)$, ei adhaerens dextra imminuatur lege jam dicta distantiae termini prioris retrorsum sumtae, nempe ut in Termino retro-primo, retro-secundo, retro-tertio etc. dicta nota dextra minuatur respective unitate, binario, ternario etc.; ita fit coefficiens Termini ultimi. Unimembris autem est primus Terminus ordinationis secundum $1|\alpha|$.; sed ordinationis secundum $1|\alpha+1|$. vel $1|\alpha+2|$. vel $1|\alpha+3|$. etc. est respective unimembris vel bimembris vel quadrimembris vel octimembris etc.

Primi autem Termini, cum ordinatio fit secundum notam sinistram φ, multiplicator est $1|\varphi|\varphi-\gamma$. Coefficiens quomodo formetur, dabit exemplum coefficientis ipsius 183:

$$183\begin{cases}143\begin{cases}153\begin{cases}163.173-\\162.174+\end{cases}\\152.164.173+\\151.164.174-\end{cases}\\142\begin{cases}154.163.173-\\154.162.174+\end{cases}\\141.154.164.173+\\140.154.164.174-\end{cases}$$

ubi una medietas divisionis subdivisionisque semper habet ipsius 15. vel 16. vel 17. notam dextram summam, hoc loco 4, reliqua medietas caeteras.

Inventis jam valoribus ipsorum 30, 31, 32 etc. facile habentur valores ipsorum 40, 41, 42 etc. hoc modo:

$$-40 = 111.30 + 110.31$$

$$-41 = 122.30 + 121.31 + 120.32$$
$$-42 = 133.30 + 132.31 + 131.32 + 130.33$$

et ita porro, si opus; unde ex inventis ipsis 30, 31, 32 etc. ipsas 40, 41, 42 etc. haberi est manifestum.

Caeterum eadem fere Methodus adhiberi poterit, si Elementum summationis pro $x^r \sqrt[e]{\text{☽}}\, dx$ sit $\frac{1}{x^r}\sqrt[e]{\text{☽}}\, dx$.

Ponamus $\text{☽} = 10x^{\alpha} + 11x^{\alpha-1} + 12x^{\alpha-3} + \text{etc.}$ usque ad x^0
et $\text{♃} = 40x^{\alpha-1} + 41x^{\alpha-2}$ etc. usque ad x^{-1}
et $\text{☿} = 30 + \frac{31}{x} + \frac{32}{xx} + \frac{33}{x^3}$ etc. usque ad $\frac{1}{x^{r-1}}$;

sit $\alpha = 4$ et $r = 3$, fiet

$$\text{☽} = 10x^4 + 11x^3 + 12xx + 13x + 14$$
$$d\text{☽} = \ldots 4.10x^3 + 3.11xx + 2.12x + 1.13$$
$$\text{☿} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 30 + \frac{31}{x} + \frac{32}{xx}$$
$$d\text{☿} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -\frac{1.31}{xx} - \frac{2.32}{x^3}$$
$$\text{♀} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{x^3}$$

Ita $e\text{☽}\, d\text{☿} + (e+)\, \text{☿}\, d\text{☽} + \text{♃}\, dx$ potest identificari ipsi $\text{♀}\, dx$, et tantum praesupponuntur quadraturae figurarum, quarum ordinatae constant solis Terminis, ubi x^0, vel x^1, vel x^2, vel x^3 etc. ducuntur in $\sqrt[e]{\text{☽}}$, quas quadraturas, quantum in hac tractandi generalitate licet, jam dedimus, et praeterea praesupponitur quadratura figurae, cujus ordinata est $\frac{1}{x}\sqrt[e]{\text{☽}}$, ad quam reduci potest quadratura Figurae cujus ordinata est $\frac{1}{y+b}\sqrt[e]{\text{☽}}$, posito esse $\text{☽} = 10 + 11y + 12yy + \text{etc.}$ Nam tantum oportet facere $y+b = x$ seu $y = x - b$, et hunc valorem substituere in valore ipsius ☽, ut ita tantum quaeratur $\int \frac{dx}{x}\sqrt[e]{\text{☽}}$. Atque ita hac sola quadratura pro caeterarum figurarum, quales habent ordinatas $\frac{1}{x^r}\sqrt[e]{\text{☽}}$, quadraturis indigemus.

Hinc patet tandem, si proponatur quadranda figura cujus ordinata sit $\frac{\text{♀}}{\text{♂}}\sqrt[e]{\text{☽}}$, posito ☽, ♀, ♂ esse formulas rationales integras quoad abscissam x, omnem rem reduci ad quadraturam figurae,

cujus ordinata est est $\frac{1}{x}\sqrt[e]{\text{☽}}$ vel $\frac{1}{x+b}\sqrt{\text{☽}}$, et praeterea ad quadraturas figurarum aliquot, quarum ordinatae sunt quales $\sqrt[e]{\text{☽}}$ $x\sqrt[e]{\text{☽}}$, $xx\sqrt[e]{\text{☽}}$ etc., quarum numerus unitate differat ab α, exponente gradus ipsius ☽. Ostendi enim, cum Quadraturarum rationalium analysin ederem, omnem formulam qualis $\frac{l + mx + nxx + px^3 + \text{etc.}}{b + cx + exx + fx^3 + \text{etc.}}$ posse divelli in partes, quales $50 + 51x + 51xx + \text{etc.} + \frac{60}{x} + \frac{61}{xx} + \frac{62}{x^3} + \text{etc.}$ $+ \frac{70}{x+h} + \frac{71}{\text{qu.}(x+h)} + \frac{72}{\text{cub.}(x+h)} + \text{etc.} + \frac{80}{x+k} + \frac{81}{\text{qu.}(x+k)}$ $\frac{82}{\text{cub.}(x+k)}$, aliasve hujusmodi plures.

XXVII.

SYMBOLISMUS MEMORABILIS CALCULI ALGEBRAICI ET INFINITESIMALIS IN COMPARATIONE POTENTIARUM ET DIFFERENTIARUM, ET DE LEGE HOMOGENEORUM TRANSCENDENTALI.

Ut cujuslibet quantitatis facile est invenire potentiam, ita cujuslibet certa lege variantis possumus invenire differentiam seu Elementum. Sed regressus a potentia ad radicem per extractionem, et regressus a differentia ad terminum per summationem non semper in potestate est. Et uti impossibilitas extractionis in numeris rationalibus quaesitae producit quantitates surdas, ita impossibilitas summationis in quantitatibus Algebraicis quaesitae producit quantitates transcendentes, quarum considerationem in Analysin jam olim induximus. Sane, ut saepe quantitates rationales per modum radicis seu irrationaliter exhibentur, etsi ad formulam rationalem reduci possint, ita saepe quantitates Algebraicae seu ordinariae per modum transcendentium exhibentur, etsi eas ad formulam ordinariam reducere liceat. Itaque multum interest inter *quantitates* et *formulas.*

Sed arcanior quaedam subest inter Potentias et Differentias Analogia, quam hoc loco exponere operae pretium erit. Et primum potentias binomii (seu summae nominum duorum) comparabimus cum differentiis rectanguli (seu facti ex Factoribus binis), et deinde (cum analogia perpetua sit) breviter dabimus communem legem tam potentiae ex multinomio quocunque, quam differentiae facti ex factoribus quotcunque. Potentiae autem pariter ac differentiae habent suos exponentes, gradum potentiae vel differentiae indicantes. Itaque analogiae clarioris causa, ut dx, ddx, d^3x significat differentiam primam, secundam, tertiam; ita x, xx, x^3 exprimemus hoc loco per p^1x, p^2x, p^3x, id est per potentiam primam, secundam, tertiam, nempe ipsius x. Et $p^e(x+y)$ significabit potentiam ipsius $x+y$ secundum exponentem e, uti $d^e(xy)$ differentiam ipsius xy significat itidem secundum exponentem e.

Sit ergo Binomium $x+y$, ejus potentia prima, si sic loqui licet, vel gradus si malis, seu quae exponentem habet 1, est ipsa quantitas seu radix seu ipsum Binomium $x+y$, atque adeo $p^1(x+y) = x+y$; sed potentia secunda seu quadratum ipsius $x+y$ sive $p^2(x+y)$ erit $= 1xx + 2xy + 1yy$, et cubus seu potentia tertia ipsius $x+y$ sive $p^3(x+y)$ est $= 1x^3 + 3xxy + 3xyy + 1y^3$, et biquadratum seu potentia quarta ipsius $x+y$ sive $p^4(x+y)$ est $= 1x^4 + 4x^3y + 6xxyy + 4xy^3 + 1y^4$. Et generaliter reperietur, potentiam quamcunque ab $x+y$ seu $p^e(x+y)$ esse $1x^e + \frac{e}{1}x^{e-1}y + \frac{e.e-1}{1.2}x^{e-2}y^2 + \frac{e.e-1.e-2}{1.2.3}x^{e-3}y^3 + \frac{e.e-1\,e-2.e-3}{1.2.3.4}x^{e-4}y^4$ etc., ubi subtractione numerorum per unitates crescentium, veluti si $e=3$ seu $e-3=0$, evanescit terminus, in quo est $e-3$, et omnes eum sequentes. Ita cum sit $e=3$, fiet $p^3(x+p) = 1x^3 + \frac{3}{1}x^2y + \frac{3.3-1}{1.2}xy^2 + \frac{3.3-1.3-2}{1.2.3.}y^3$ seu $1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3 = 1p^3xp^0y + 3p^2xp^1y + 3p^1xp^2y + 1p^0xp^3y$, ubi notandum, x^0 vel y^0 sive p^0x, p^0y, vel aliam cujusque quantitatis potentiam, cujus exponens evanescit seu fit 0, abire in unitatem. Nam si ordine ponamus

Quantitates progressionis Geometricae	$\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{xx}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{1}$, x, xx, x^3,
Exponentes respondentes progressionis Arithmeticae erunt	$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,$

unde $p^0x = 1$ et $p^{-1}x = \frac{1}{x}$ vel $1:x$ et $p^{-2}x = \frac{1}{xx}$ vel $1:xx$. Itaque formula generalis pro potestate Binomii sic scribi potest:

$$p_e(x+y) = 1p_e x p^0 y + \frac{e}{1}p^{e-1}xp^1y + \frac{e.e-1}{1.2}p^{e-2}xp^2y + \frac{e.e-1.e-2}{1.2.3}p^{e-3}xp^3y + \frac{e.e-1.e-2\,e-3}{1.2.3.4}p^{e-4}xp^4y + \text{etc}.$$

Veniamus jam ad differentiationes, idemque illic provenire ostendamus, tantum pro $x+y$ ponendo xy et pro p ponendo d. Primum ergo $d(xy) = ydx + xdy$, ut olim docuimus, cum primum multis abhinc annis calculum differentialem proponeremus, ex quo uno fundamento totus reliquus differentiarum calculus demonstrari potest. Ipsum autem fundamentum hoc sic ostenditur: $d(xy)$ est differentia inter $(x+dx)(y+dy)$ et xy, sive inter rectangulum proximum et propositum. Est autem $(x+dx)(y+dy) = xy + ydx + xdy + dxdy$, unde si auferas xy, fit $ydx + xdy + dxdy$; sed quia dx vel dy est incomparabiliter minus quam x vel y, etiam $dxdy$ erit incomparabiliter minor quam xdy et ydx, ideoque rejicitur, tandemque fiet $(x+dx)(y+dy) - xy = ydx + xdy$. Jam $x = d^0x$ et $y = d^0y$, nempe ubi differentia nulla est, et d^1x est dx, et $d^1y = dy$, ideo scribi poterit $d^1(xy) = d^1xd^0y + d^0xd^1y$. Caeterum, quae evenire possent in signis variationes, cum crescente x decrescit y, aut cum aliqua ex differentiis, velut dx aut dy, fit quantitas negativa, nunc non explico, rem tractans generaliter, salva potestate cujusque signa in casibus specialibus, ubi opus est, immutandi.

Pergamus ad differentiationes secundas: $dd(xy) = d(ydx + xdy) = d(ydx) + d(xdy)$. Jam $d(ydx) = yddx + dxdy$ ex calculo praecendente, nam pro dx scribamus z, erit $ddx = dz$ et fiet $d(ydx) = d(yz) =$ (per calculum praecedentem) $ydz + zdy = yddx + dxdy$; et pari jure fiet $d(xdy) = dxdy + xddy$. Itaque colligendo, fiet $dd(xy) = yddx + 2dxdy + xddy$, prorsus ut quadratum ab $x+y$ dat $xx + 2xy + yy$, seu $d^2(xy) = d^2xd^0y + 2d^1xd^1y + d^0xd^2y$ prorsus ut $p^2(x+y) = p^2xp^0y + 2p^1xp^1y + p^0xp^2y$. Quae analogia inter differentiationem et potentiationem servatur perpetuo, continuata potentiatione (seu Potentiae excitatione) et differentiatione. Nempe ut in nova potentiatione Binomii totum praecedens multiplicatur tam per y quam per x, et priore casu p ipsius y, posteriore p ipsius x augetur unitate; ita in differentiando totum praecedens differentiatur tum secundum y quam secundum x, et priore casu d ipsius y, posteriore autem d ipsius x augetur unitate.

Exempli gratia

si $\left.\begin{matrix} p^1xp^0y \\ p^0xp^1y \end{matrix}\right\}$ multiplicemus per y, fit $\left\{\begin{matrix} p^1xp^1y \\ p^0xp^2y \end{matrix}\right\}$ sin illud multiplicemus per x, fit $\left\{\begin{matrix} p^2x\,p^0y \\ p^1x\,p^1y \end{matrix}\right.$

et similiter

si $\left.\begin{matrix} d^1xd^0y \\ d^0xd^1y \end{matrix}\right\}$ differentiemus secundum y, fit $\left\{\begin{matrix} d^1xd^1y \\ d^0xd^2y \end{matrix}\right\}$ sin illud differentiemus secundum x, fit $\left\{\begin{matrix} d^2x\,d^0y \\ d^1x\,d^1y \end{matrix}\right.$

Ex quo sequitur porro, $d^3(xy)$ esse $1d^3xd^0y + 3d^2xd^1y + 3d^1xd^2y + 1d^0xd^3y$, vel vulgari modo scribendi $yd^3x+3ddxdy+3dxddy+xd^3y$. Et generaliter, ut paulo ante potentiando literam p adhibuimus, ita nunc differentiando adhibita litera d fore $d^e(xy) = 1d^exd^0y$

$$+\frac{e}{1}d^{e-1}xd^1y+\frac{e\,.\,e-1}{1\,.\,2}d^{e-2}xd^2y+\frac{e\,.\,e-1\,.\,2}{1\,.\,2\,.\,3}d^{e-3}xd^3y+ \text{ etc.}$$

Quin imo etiam inter potentias multinomii et differentias combinationis seu facti ex pluribus factoribus eadem Analogia locum habebit, velut inter $d^e(xyz)$ differentiam ternionis et $p^e(x+y+z)$ potentiam trinomii, cum semper verum maneat, Exponentem tam ipsius p, quam ipsius d in formula ad altiorem potentiam elevanda vel amplius differentianda secundum quamlibet literam separatim augeri unitate et ex omnibus provenientibus colligi formulam novam. Porro generalis olim a me inventa est regula coefficientium, qua potentia polynomii cujusque exprimitur; eadem ergo regula etiam ad numeros coefficientes ejus formulae valebit, quae differentiationem facti ex pluribus factoribus exprimit.

Sunt autem numeri coefficientes in potentiis nihil aliud, quam numeri transpositionum, quas recipiunt literae in forma seu termino, cui numerus praefigitur, veluti pro $p^3(x+y+z)$ seu pro cubo ab $x+y+z$ prodit

$$\begin{array}{lll} 1x^3 + & 3x^2y & +6xyz \\ 1y^3 & 3xy^2 & \\ 1z^3 & 3x^2z & \\ & 3xz^2 & \\ & 3y^2z & \\ & 3yz^2 & \end{array}$$

ibi coefficiens omnium, qualis x^2y, est 3, quia pro xxy scribi potest xxy, xyx, yxx; et coefficiens omnium, qualis xyz, est 6, quia pro xyz scribi potest yxz, xyz, xzy, yzx, zxy, zyx; sed coefficiens omnium, qualis x^3, est 1, quia in xxx transpositio nihil variat. Modum autem inveniendi numerum transpositionum formae propositae, alibi, commoda satis ratione, exhibuimus.

Ad analogiam autem cum differentiis servandam cubus seu potentia tertia ab $x+y+z$ ita scribetur:

$$\left.\begin{array}{lll} 1p^3xp^0yp^0z+ & 3p^2xp^1yp^0z+ & 6p^1xp^1yp^1y \\ 1p^0xp^3yp^0z & 3p^1xp^2yp^0z & \\ 1p^0xp^0yp^3z & 3p^2xp^0yp^1z & \\ & 3p^1xp^0yp^2z & \\ & 3p^0xp^2yp^1z & \\ & 3p^0xp^1yp^2z & \end{array}\right\} \text{aequale est}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} p^3(x+y+z) = 1x^3+ & 3xxy+ & 6xyz \\ 1y^3 & 3xyy & \\ 1z^3 & 3xxz & \\ & 3xzz & \\ & 3yyz & \\ & 3yzz & \end{array}\right.$$

ergo similiter differentia tertia ab xyz talis prodibit

$$\left.\begin{array}{lll} 1d^3x\,d^0y\,d^0z+ & 3d^2xd^1yd^0z+ & 6d^1xd^1yd^1z \\ 1d^0x\,d^3y\,d^0z & 3d^1xd^2yd^0z & \\ 1d^0x\,d^0y\,d^3z & 3d^2zd^0yd^1z & \\ & 3d^1xd^0yd^2z & \\ & 3d^0xd^2yd^1z & \\ & 3d^0xd^1yd^2z & \end{array}\right\} \text{aequale est}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} d^3(xyz) = 1d^3x\,.\,yz+ & 3ddxdy\,.\,z+ & 6dxdydz \\ 1xd^3y\,.\,z & 3dxddy\,.\,z & \\ 1xyd^3z & 3ddx\,.\,ydz & \\ & 3dx\,.\,y\,ddz & \\ & 3xddy\,dz & \\ & 3xdyddz & \end{array}\right.$$

ubi patet, novo scribendi more apparere analogiam inter potentias et differentias, vulgato (nempe hic posterius posito) non apparere. Eaque analogia eousque porrigitur, ut tali scribendi more (quod mireris) etiam $p^0(x+y+z)$ et $d^0(xyz)$ sibi respondeant et veritati, nam

$$\begin{array}{rll} p^0(x+y+z) = & 1 & = p^0xp^0yp^0z \\ \text{et } d^0(xyz) = & xyz & = d^0xd^0yd^0z. \end{array}$$

Eadem etiam opera apparet, quaenam sit *Lex homogeneorum transcendentalis*, quam vulgari modo scribendi differentias non aeque agnoscas. Exempli gratia, novo hoc *Characteristicae* genere adhibito, apparebit addx et dxdx non tantum Algebraice (dum utrobique binae quantitates in se invicem ducuntur), sed etiam transcendentaliter homogeneas esse et comparabiles inter se, quoniam illud scribi potest d^0ad^2x, hoc d^1xd^1x, et utrobique exponentes differentiales conficiunt eandem summam, nam $o+2=1+1$. Caeterum lex homogeneorum transcendentalis vulgarem seu Algebraicam praesupponit. Interim non omnes formae transcendentes, licet homogeneae inter se, aeque per se aptae sunt summationi. Exempli causa adxddx absolute summabile est, sed dxdxdx seu $p^3(d^1x)$, homogeneum priori tam Algebraice quam transcendentaliter, summabile non est, nisi quaedam suppositio accedat.

XXVIII.

EPISTOLA AD V. CL. CHRISTIANUM WOLFIUM, PROFESSOREM MATHESEOS HALENSEM, CIRCA SCIENTIAM INFINITI. *)

Quaeris a me, Vir Celeberrime, quid de Quaestione nuper a *Guidone Grandio* renovata sentiam, utrum $1-1+1-1+1-1+$ etc. in infinitum sit $\frac{1}{2}$, et quomodo absurditas evitari possit, quae in tali enuntiatione se ostendere videtur. Nam cum infinities occurrere videatur $1-1=0$, non apparet quomodo ex veris nihilis infinities repetitis possit fieri $\frac{1}{2}$. Intelligo, Dn. Grandium hanc vim infinito tribuere, ut ex nihilo faciat aliquid, et hinc non ineleganter illustrare velle Creationem rerum, quae ex nihilo fit per Divinam omnipotentiam. Sed Creatio non est simplex repetitio Nihilorum, continetque realitatem novam et positivam superadditam. Audio etiam *Cl. Marchettum*, Professorem Matheseos Pisanum, Grandianae sententiae contradixisse, quanquam rationes ejus ad me non pervenerint. Sed rem, cum jucundae sit disquisitionis et imprimis ad *Scientiam infiniti* (hactenus nondum pro dignitate tractatam) illustrandam faciat, paulo altius repetere et ad fontes suos revocare operae pretium erit, quod ipsi Cl. Grandio non ingratum fore confido, cujus primariam hic conclusionem confirmamus, etsi nonnullas ejus ratiocinationes et consequentias animadversione indigere putemus, ne quid scientia detrimenti capiat.

---

*) Act. Erudit. Lips Supplem. Tom. V. ad an. 1713.

Ostensum est dudum ab iis, qui summam terminorum progressionis Geometricae (post magni *Archimedis* exhibitum in quadratura Parabolae specimen) dederunt, sed inprimis a *Gregorio a S. Vincentio*, esse $\frac{1}{1-x} = 1+x+xx+x^3+x^4$ etc. in infinitum, si scilicet ponatur x esse quantitas minor unitate. Hoc *Nicolaus Mercator* Holsatus transtulit ad $\frac{1}{1+x} = 1-x+xx-x^3+x^4-x^5+$ etc. in infinitum, quod (una cum priore) ostendit ex continuata quadam divisione, quanquam hoc etiam ex priore sequatur, pro $-x$ ponendo $+x$. Idem primus in edita a se Logarithmotechnia docuit hoc applicare ad Quadraturam per seriem infinitam, atque hoc modo Quadraturam Hyperbolae Arithmeticam nobis dedit, eamque ad Logarithmos adhibuit. Ego exemplo ipsius excitatus feliciter inveni, non solum quadraturam Areae, cujus ordinata est $\frac{1}{1-xx}$, inservire ad Quadraturam Hyperbolae, sed etiam similiter Tetragonismo Arithmetico Circuli inservire $\frac{1}{1+xx}$. Cum enim (loco x ponendo xx) $\frac{1}{1+xx}$ sit $1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+$ etc. in infinit., hinc sequebatur $\int \frac{dx}{1+xx}$ (quae summa dat quadraturam sectoris Circuli, ut singulari quadam methodo detexeram) fore $\int dx - \int xxdx + \int x^4dx - \int x^6dx +$ etc. seu (ex nota Quadratura Paraboloeidum) $\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} +$ etc. Unde in eo casu, quo $x=1$, prodit $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ etc. in infinit, quae series infinita est ad unitatem, ut area Circuli ad Quadratum Diametri. Hoc multo ante repertum in primo anno Actorum Reipublicae Literariae Lipsiensium publicavi; postea autem in iisdem Actis generalem expressionem dedi, quae Quadraturam Sectoris Conicae cujuscunque centrum habentis uno theoremate complectitur. Atque haec Cl. Grandius suo more ad captum eorum, qui minus in calculo generali versati sunt, per lineas demonstrare non spernendo consilio voluit, ut res magis imaginationi subjiciatur, quod ego ipse juvenis olim (sed cum multis aliis cognatis inventis) cum Parisiis agerem, in publicum dare constitueram, simulque aperire originem inventionum, quae fortasse ne nunc quidem satis patet. Sed ad alia postea vocatus intermisi. Sane facilius multo est inventionum dare demonstrationem, quam originem, quae auget ipsam inveniendi artem.

Nunc omissa quadratura redeamus ad seriem ex terminis progressionis Geometricae (qua sola ad scopum nostrum nunc indigemus) qualis est $\frac{1}{1+x} = 1 - x + xx - x^3 +$ etc. in infinit. vel $\frac{1}{1+xx} = 1 - xx + x^4 - x^6 +$ etc. in infinit., consideremusque, quid fiat, si sit $x=1$: ibi vero prodit, non sine admiratione considerantis, $\frac{1}{1+1}$ seu $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. in infinit., idque oculis quodammodo admovet figura a Dn. Grandio adhibita. Sit enim (fig. 154) quadratum bIAV, ducatur recta diagonalis Ab vel A_1b, ducantur et infinitae parabolae vel paraboloeides A_2b, A_3b, A_4b, A_5b etc., ita ut latus quadrati appellando unitatem, et abscissam AG vocando x, et ducendo rectam yG ad AG normalem, quae secet diagonalem et paraboloeides in 1, 2, 3, 4, 5 etc.; tunc ordinatae Gy, G1, G2, G3, G4, G5 etc. respective futurae sint $1, x, xx, x^3, x^4, x^5$ etc., et proinde rectae Gy, G1, G2, G3, G4 etc. sint progressionis Geometricae. His positis, producatur bV usque in B, ita ut BV sit $=$ bV; et yG in D, ita ut GD sit aggregatum harum ordinatarum alternis per additionem et subtractionem conjunctarum, seu ut GD sit $Gy - G1 + G2 - G3 +$ etc. vel quod (per supra ostensa) eodem redit, ut GD sit $= \frac{1}{VA + AG} = \frac{1}{1 + AG}$, et completo quadrato AVAH describatur curva SDH, transiens per quaecunque puncta ut D, et occurrens ipsi AH in H, et ipsi BV in S: patet in casu, quo fit $AG = VA = 1$, fore $GD = \frac{1}{1+xx} = \frac{1}{2} = VS$, seu $GD = \frac{1}{2} BV$, et proinde in eo casu, quippe quo G cadit in V, et D in S, fore $VS = \frac{1}{2} BV$ vel $\frac{1}{2} AV$. Et quia in eo casu omnia puncta 1, 2, 3, 4, 5 etc. coincidunt in unum idemque punctum B, hinc G1, G2, G3, G4 etc. fiunt GB vel BV, et postremo ex $Gy - G1 + G2 - G3 +$ etc. fiet $BV - BV + BV - BV +$ etc. $= \frac{1}{2} BV$.

Atque hoc consentaneum est *Legi Continuitatis*, a me olim in Novellis Literariis Baylianis primus propositae, et Legibus Motus applicatae: unde fit, *ut in continuis extremum exclusivum tractari possit ut inclusivum*, et ita ultimus casus, licet tota natura diversus, lateat in generali lege caeterorum, simulque paradoxa quadam ratione, et ut sit dicam, *Figura Philosophico-rhetorica* punctum in linea, quies in motu, specialis casus in generali contradistincto comprehensus intelligi possit, tanquam punctum sit linea infinite parva seu evanescens, aut quies sit motus evanescens, aliaque id genus, quae *Joachimus Jungius*, Vir profundissimus, *toleranter vera* appellasset, et quae inserviunt plurimum ad inveniendi artem, etsi meo judicio aliquid fictionis et imaginarii complectantur, quod tamen reductione ad expressiones ordinarias ita facile rectificatur, ut error intervenire non possit: et alioqui Natura ordinatim semper, non per saltus procedens, legem continuitatis violare nequit.

Verum enim vero hic ostendit se difficultas et a Te, Vir Clarissime, et a Cl. Marchetto merito objecta. Cum enim $BV - BV$ vel $1 - 1$ sit 0, nonne sequitur $BV - BV + BV - BV + BV - BV +$ etc. in infinitum, vel $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. in inf. nihil aliud esse quam $0 + 0 + 0 +$ etc.? quod quomodo facere possit $\frac{1}{2}$, non apparet. Cl. Grandius difficultatem simili quodam ingeniose tollere conatur. Fingit, duos fratres in familia herciscunda occupatos invenire in paterna haereditate immensi pretii gemmam, eamque alienare testamento prohiberi; itaque ita convenire inter se, ut alternis annis in alterutrius Museo collocetur. Itaque si in aeternum haec lex inter haeredes servari ponatur, alterutram fratrum lineam, cui infinities detur et infinities adimatur gemma, dimidium juris in ea recte habituram.

Sed re accuratius considerata, similitudo hic nimis claudicat, et *primum* quidem quia in casu nostro (ipso sentiente Cl. Grandio) res pendet a privilegio infiniti, quod, secundum ipsum, repetitione ex Nihilo Aliquid faciat. At in casu isto familiae herciscundae res aeque locum habet, licet finitus sit annorum numerus. Finge enim, duobus gemmam non ex haereditate paterna, sed legato amici obvenisse, nec proprietatem relictam in perpetuum, sed usum tantum in centum annos; patet eodem modo jura eorum salva fore, si alternis eam annis possideant. At vero in casu nostro, si centies ponantur unitates, alternis addendo et subtrahendo, seu si quingenties ponatur $1-1$, imo quingenties millies, semper prodibit 0.

Et *secundo* ipsa ratio differentiae in eo consistit, quod in casu communis juris duorum, alternis possidentium, id quod datur et tollitur, non est totum jus in re, sed usus unius anni, et non nisi totius juris particula: et toto jure in annos distributo, usuque in centum annos concesso, patet usum unius anni non esse nisi centesimam partem juris integri; et ita cum unusquisque hoc modo obtineat quinquaginta centesimas, patet unumquemque totius juris dimidium habere. Sed in casu nostro ipsa unitas, ipsum totum (non particula) nunc datur, nunc adimitur. Itaque similitudo illa, etsi speciosa, si accuratius intueare, nihil ad rem facit.

Nunc ergo veram, et fortasse inexpectatam, certe singularem, *aenigmatis* solutionem, et *paradoxi* rationem afferamus, redeundo ad seriem finitam, et deinde transeundo ad infinitam. Considerandum est nempe, casus seriei infinitae esse duos, inter se distinguendos, eosque in casu seriei infinitae mira quadam ratione confundi. Nempe series finita $1-1+1-1+$ etc. dupliciter explicari potest, vel enim constat ex *numero membrorum pari*, et terminatur per —, velut

$$1-1, \text{ aut } 1-1+1-1, \text{ aut } 1-1+1-1+1-1,$$

aut quousque tandem progrediare, quibus casibus semper prodit 0; vel *numero membrorum impari*, et terminatur per +, veluti

$$1, \text{ aut } 1-1+1, \text{ aut } 1-1+1-1+1,$$

aut quousque tandem progrediare, quibus casibus semper prodit 1. At cum *Series* est *infinita*, nempe $1-1+1-1+1-1+$ etc. in infinitum, ita ut excedat numerum quemcunque, tunc evanescente natura numeri, evanescit etiam paris aut imparis assignabilitas: et cum ratio nulla sit pro paritate magis aut imparitate, adeoque pro prodeunte 0 magis quam pro 1, fit admirabili naturae ingenio, ut transitu a finito ad infinitum simul fiat transitus a disjunctivo (jam cessante) ad unum (quod superest) positivum, inter disjunctiva medium. Et quoniam ab iis qui de aestimatione aleae scripsere, ostensum est, cum medium inter duas quantitates pari ratione nitentes sumendum est, sumi debere medium arithmeticum, quod est dimidium summae, itaque natura rerum eandem hic observat *justitiae legem*; et proinde cum $1-1+1-1+1-1+$ etc. in casu finito numeri membrorum paris sit 0, at in casu finito numeri terminorum imparis sit 1, sequitur evanescente utroque in casum membro-

rum multitudine infinitorum, ubi paris imparisque jura confunduntur, et tantundem rationis pro utroque est, prodire $\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$. Quod proponebatur.

Porro hoc argumentandi genus, etsi Metaphysicum magis quam Mathematicum videatur, tamen firmum est: et alioqui Canonum *Verae Metaphysicae* (quae ultra vocabulorum nomenclaturas procedit) major est usus in Mathesi, in Analysi, in ipsa Geometria, quam vulgo putatur. Hoc loco autem aliunde, ratione scilicet initio posita (cum quaevis ordinata GD sit $\frac{1}{1+AG}$, adeoque cum AG fit AV vel 1, fiat VS, $\frac{1}{1+1}$), scimus VS esse $\frac{1}{2}$BV; et possemus etiam ostendere, sumendo G quantumlibet vicinum ipsi V, fore etiam GD quantumlibet vicinum ipsi $\frac{1}{2}$BV, ita ut differentia reddi possit minor data quavis quantitate; unde Archimedeo inferendi more, etiam sequitur VS esse $\frac{1}{2}$BV. Interim ex ipsa serierum et infiniti natura idem colligi, non jucundum tantum, sed etiam ad accuratas de infinito ratiocinationes instituendas, recludendosque magis magisque novae doctrinae fontes, utilissimum futurum est. Simul cavebitur, ne scientia nova per paradoxa minime defendenda infametur. Itaque ad objectionem, quod ex nullitatibus quotcunque minime fieri possit aliquid, non respondendum erat distinguendo inter finitum et infinitum, quasi regula in infinito fallat; sed concessa generaliter regula, ostendendum erat, uti nunc factum est, applicationem ejus hic cessare.

XXIX.

OBSERVATIO QUOD RATIONES SIVE PROPORTIONES NON HABEANT LOCUM CIRCA QUANTITATES NIHILO MINORES, ET DE VERO SENSU METHODI INFINITESIMALIS. *)

Cum olim Parisiis Vir summus *Antonius Arnaldus* sua nova Geometriae Elementa mecum communicaret, atque in iisdem admirari se testatus fuisset, quomodo posset esse 1 ad -1, ut -1 ad 1,

*) Act. Erudit. Lips. an. 1712.

quae res probari videtur ex eo, quod productum est idem sub extremis quod sub mediis, cum utroque prodeat $+1$; jam tum dixi mihi videri, *veras* illas *rationes* non esse, in quibus quantitas nihilo minor est antecedens, vel consequens, etsi in calculo haec, ut alia *imaginaria*, tuto et utiliter adhibeatur. Et sane identitatis rationum verarum fundamentum est rerum similitudo, quae facit exempli causa, ut segmentis similibus diversorum circulorum assumtis sit ubique eadem ratio chordae ad radium, seu ut chorda minoris se habeat ad radium minoris, vel ut chorda majoris ad radium majoris. Sed vero nulla plane apparet similitudo in supradicta Analogia. Si enim -1 est minus nihilo, utique 1 ad -1 erit ratio majoris ad minus; sed vero contra ratio -1 ad 1 est ratio minoris ad majus; quomodo ergo utrobique eadem ratio erit? Sed rationes istas esse imaginarias, etiam alio certissimo argumento comprobabo, scilicet a Logarithmis. Nempe ratio, cui nullus datur respondens Logarithmus, ratio vera non est. Porro posito unitatis Logarithmum esse 0, rationis -1 ad 1 idem est Logarithmus, qui ipsius -1; at ipsius -1 non datur Logarithmus. Non enim est positivus, nam talis omnis est Logarithmus numeri positivi unitate majoris. Sed tamen etiam non est negativus, quia talis omnis est Logarithmus numeri positivi unitate minoris. Ergo Logarithmus ipsius -1 cum nec positivus sit nec negativus, superest ut sit non verus, sed imaginarius. Itaque et ratio, cui respondet, *non vera*, sed *imaginaria* erit. Idem etiam sic probo: Si daretur verus Logarithmus ipsius -1, seu rationis -1 ad 1, ejus logarithmi dimidium foret Logarithmus ipsius $\sqrt{-1}$, sed $\sqrt{-1}$ est quantitas imaginaria. Itaque daretur Logarithmus verus imaginariae quantitatis, quod est absurdum. Et proinde nonnihil humani passus est insignis in paucis Geometra *Johannes Wallisius*, cum dixisset rationem 1 ad -1 esse plus quam infinitam; et recte hoc (etsi aliis considerationibus) celeberimus *Varignonius* rejicit. Interim nolim cum ipso negare, -1 esse quantitatem nihilo minorem, modo id sano sensu intelligatur. Tales enuntiationes sunt *toleranter verae*, ut ego cum summo Viro *Joachimo Jungio* loqui soleo; Galli appellarent *passables*. Rigorem quidem non sustinent, habent tamen usum magnum in calculando, et ad artem inveniendi, universalesque conceptus valent. Talis fuit locutio Euclidis, cum Angulum contactus dixit esse rectilineo quovis minorem; tales sunt multae Geometrarum aliae, in quibus est

figuratum quodammodo et crypticum dicendi genus. Sunt tamen quidem, ut sic dicam, *tolerabilitatis*. Porro, ut nego rationem, cujus terminus sit quantitas nihilo minor, esse realem, ita etiam nego, proprie dari numerum infinitum vel infinite parvum, etsi Euclides saepe, sed sano sensu, de linea infinita loquatur. *Infinitum continuum* vel *discretum* proprie nec unum, nec totum, nec quantum est, et si analogia quaedam pro tali a nobis adhibeatur, ut verbo dicam, est modus loquendi; cum scilicet plura adsunt, quam ullo numero comprehendi possunt, numerum tamen illis rebus attribuemus analogice, quem infinitum appellamus. Itaque jam olim judicavi, cum infinite parvum esse errorem dicimus, intelligi dato quovis minorem, revera nullum; et cum ordinarium, et infinitum, et infinities infinitum conferimus, perinde esse ac si conferremus ascendendo diametrum pulvisculi, diametrum terrae, et diametrum orbis fixarum, aut his quantumvis (per gradus) majora minoraque, eodemque sensu descendendo diametrum orbis fixarum, diametrum terrae, et diametrum pulvisculi posse comparari ordinario, infinite parvo, et infinities infinite parvo, sed ita ut quodvis horum in suo genere quantumvis majus aut minus concipi posse intelligatur. Cum vero saltu ad ultimum facto ipsum infinitum aut infinite parvum dicimus, commoditati expressionis seu breviloquio mentali inservimus, sed non nisi *toleranter vera* loquimur, quae explicatione *rigidantur*. Atque haec etiam mea sententia est de areis illis Hyperboliformium Asymptoticis, quae infinitae, infinitiesque infinitae esse dicuntur, id est talia rigorose loquendo vera non esse posse, tamen sano aliquo sensu tolerari. Atque haec tum ad terminandas virorum clarissimorum Varignonii et Grandii controversias, tum ad praecavendos chimericos quosdam conceptus, tum denique ad elidendas oppositiones contra methodum *infinite similem* prodesse possunt.

XXX.

REMARQUES DE MR. LEIBNIZ SUR L'ART. V. DES NOUVELLES DE LA RÉPUBLIQUE DES LETTRES DU MOIS DE FÉVRIER 1706.*)

On rapporte dans cet Article des Nouvelles de la République des Lettres un éloge de feu *Mr. Bernoulli* (prononcé à l'Académie

*) Nouvell. de la Républiq. des lettres de l'an. 1706.

des Sciences de Paris), où il y a des erreurs de fait qui me regardent. Et, comme il importe beaucoup pour l'avancement même des Sciences, que les personnes appliquées aux méditations profondes joignent les bonnes qualités du coeur à celles de l'esprit, j'ai crû à propos d'éclaircir et de rectifier quelques endroits de cet Article, qui pourroient faire tort à Mrs. Bernoulli et à moi. Parmi les choses avantageuses qu'on a la bonté de dire de moi et qu'on dit d'eux avec justice, on en ajoute, que des Juges sévères auroient raison, à mon avis, de condamner. Car on insinue, qu'ayant laissé entrevoir quelque chose de mon système des Infinitesimales, Mrs. Bernoulli avoient médité si profondément sur ces foibles rayons, qui m'étoient échappés, qu'ayant résolu de *m'enlever* la gloire de l'invention, ils y avoient réussi, et avoient même *publié mon système* avant moi. Il semble que c'est me faire passer pour envieux, et eux pour injustes. L'un et l'autre est sans fondement. Voici le fait. Ayant trouvé mon nouveau calcul dès l'an 1674, je fus longtems sans en rien faire paroître, parce qu'étant retourné de France en Allemagne, j'eus des occupations et des emplois qui m'en détournèrent. L'affaire méritoit un Ouvrage exprès, et je n'avois pas tout le loisir qu'il demandoit, pour répondre à mes vûes et à l'attente du Public, outre que j'ai toujours eu de la peine à travailler sur ce que j'avois déja en mon pouvoir, aimant à pousser plusieurs autres vûes d'une nature toute différente dont je pourrai peut-être quelque jour entretenir encore le Public, si Dieu me continue la vie et la santé. Cependant, quelques-uns de mes anciens amis, et particulièrement Mrs. Menken et Pfauz, ayant commencé le Journal de Leipsic, je fus bien aise de leur communiquer quelques échantillons de mes méditations Géométriques, pour contribuer à varier leurs collections. L'approbation publique et leurs invitations m'engagèrent à continuer de tems en tems. Enfin, ne me voyant ni trop en état, ni assez en humeur de travailler à l'Ouvrage de ma nouvelle Analyse, je pris la résolution, de peur qu'elle ne se perdit, d'en publier des Elémens en abrégé, c'est à dire, *l'Algorithme* de ce calcul, qui en contient l'application à l'addition et soustraction, à la multiplication et division, et aux puissances et racines. Feu Mr. Bernoulli Professeur de Basle m'ecrivit là-dessus, et me demanda quelque éclaircissement sur la résistance des solides, dont j'avais donné une détermination dans le Journal de Leipsic au-delà de celle de Galilée.

Cela fit naître quelque commerce de lettres entre nous, que mon voyage d'Italie interrompit. Cependant, je donnai un échantillon nouveau de mon calcul, en l'appliquant au mouvement des Planètes, et j'y fis voir l'usage des Infinitesimales du second degré. Feu Mr. Bernoulli y étoit attentif, mais il n'y trouva entrée, que lorsqu'il vit comment je m'y prenois pour appliquer ce calcul à des Problêmes Physico-Mathématiques. J'en avois proposé un à Mr. l'Abbé Catelan, qui dans un petit démêlé que nous avions vantoit trop les méthodes Cartésiennes comme suffisantes à tout. Cet Abbé demeura court là-dessus, et il n'y eut que Mr. Huygens, qui trouvant le Problême digne de sa curiosité (c'étoit de trouver une courbe, dans laquelle le corps pesant descende également vers l'horizon ou sans accélération) en donna la solution, quoique par une méthode différente de la mienne, mais sans en ajouter la démonstration. Donc pour dépêcher ce Problême, j'en publiai une, laquelle marquoit les traces de mon Analyse. C'est ce qui acheva d'ouvrir les yeux à Mr. Bernoulli. Il l'avoua lui même, et voyant qu'un nouveau champ étoit ouvert, il me pria, à la suggestion de Mr. son Frère, qui entroit déja bien avant dans ces matières, de penser si par la même Analyse, on ne pourrait point arriver à des Problêmes plus difficiles, maniés inutilement par d'autres, et particulièrement à la courbe, qu'une chaine doit former, supposé qu'elle soit parfaitement flexible par-tout, que Galilée avoit crûe être la Parabole, quoiqu'ils ne sçussent point alors qu'il y avoit travaillé. J'y pensai, et j'en vins d'abord à bout; mais au lieu de publier ma solution, j'encourageai Mr. Bernoulli à la chercher aussi. Mon succès fut cause, sans doute, que les deux Frères s'y appliquèrent fortement, et que le plus jeune, dont je viens de parler, depuis Professeur à Groningue et maintenant à Basle, eut l'avantage d'y réussir entièrement. Pour y arriver par le moyen de ce que j'avais déja communiqué, il falloit une adresse extraordinaire et quelque exercice, que l'application et l'envie de se signaler leur donna pour se bien servir de ce nouveau calcul. Après cela ils furent en état d'aller bien loin. Cependant, ils m'ont toujours fait la justice de m'attribuer l'invention de cette Analyse, comme on le voit par plusieurs endroits de leurs écrits dans les Actes de Leipsic et ailleurs, et par l'Ouvrage de Mr. le Marquis de l'Hospital, à qui Mr. Bernoulli le jeune en avoit communiqué les fondemens et la matière à Paris: et moi, je leur ai rendu la pareille, en avouant qu'ils