XXII.

G. G. LEIBNITII RESPONSIO AD DN. NIC. FATII DUILLIERII IMPUTATIONES. ACCESSIT NOVA ARTIS ANALYTICAE PROMOTIO SPECIMINE INDICATA, DUM DESIGNATIONE PER NUMEROS ASSUMTITIOS LOCO LITERARUM, ALGEBRA EX COMBINATORIA ARTE LUCEM CAPIT. *)

Cum ad me pervenisset Tractatio *Domini Nicolai Fatii Duillierii* de Curva brevissimi descensus Solidoque minimam (in medio) resistentiam habente, nuper Londini edita **), miratus sum non mediocriter, Virum a me nunquam laesum animi tam male erga me affecti indicia dare. Dubitavi, an quicquam reponerem, cum semper fuerim a litibus literariis alienissimus, putarimque unum esse honestum certamen inter eruditos, imo inter probos, si contendant non verbis, sed rerum argumentis, uter melius possit mereri de re publica. Veritus tamen sum, ne silentium meum in contemtum sui traheret Vir certe minime contemnendus; deinde publice interesse judicavi, moderationis potius, quem animi exacerbati specimen dari. Occasione etiam oblata admonendos putavi viros doctos, ut pravus ille mos sese invicem impetendi dictis mordacibus, qui literas literarumque cultores infamat, paulatim antiquetur. Idque consilium meum Inclytae Societati Regiae Anglicanae, cujus se membrum in ipso libri titulo profitetur Dominus Duillerius, et in qua idem honor mihi tanto ante fuit delatus, placiturum credidi; nulla enim bene constituta Societas probat Socium, praesertim inter seniores numeratum nec suo loco habitum indignum, ab alio Socio indigne haberi. Itaque quando factum fieri infectum nequit, speravi imposterum autoritatem Societatis laudatissimae, saltem inter suos, huic malo obicem ponere posse, et laudabile exemplum deinde etiam apud alios pro efficaci ad aequanimitatem

---

*) Act. Erud. Lips. an. 1700.

**) Unter den Leibnizischen Manuscripten findet sich ein Exemplar dieser jetzt seltenen Schrift; ihr vollständiger Titel ist: Nicolai Fatii Duillerii R. S. S. Lineae Brevissimi Descensus Investigatio Geometrica duplex. Cui addita est Investigatio Geometrica Solidi Rotundi, in quod minima fiat Resistentia. Londini 1699. 4.

exhortatione futurum. Neque eam spem irritam esse, ex literis Dn. Secretarii Societatis ad amicum scriptis intellexi.

Fortasse erunt qui suspicabuntur, factum a me aliquid, quo jure irritaretur Dominus Duillierius. Equidem si quid tale per incogitantiam excidisset, tantum admonitione opus erat; eo enim animo sum, ut fuerim emendaturus ultro. Sed ipsa Viri verba ostendunt, nihil aliud habere, quo se laesum putet, quam quod non fuit nominatus inter eos, a quibus solutio problematis de linea brevissimi descensus, a Domino Johanne Bernoullio propositi, data fuit, aut qui similis argumenti speciminibus effecerant, ut judicari posset, facile daturos fuisse, si animum illuc adjecissent. Sed qui potuit nominari, cum ipse scribere sustineat, se non fuisse *dignatum* edere aliquid eorum, quae in hoc inquisitionis genere habebat. Ita enim loquitur p. 5: *Ejusmodi problemata, quamvis a me non semel soluta, verbi gratia circa catenariam, velariam, harumque linearum identitatem, curvam descensus aequabilis etc. magnopere semper aversatus sum, neque solutiones meas publicis scriptis unquam dignatus sum exponere.* Nobis ergo ignoscenda fuit nostra de progressibus ejus ignorantia.

Videtur deinde publicam causam agere velle, accusatque (dicta pag. 5) nos affectati Principatus in Mathematicis, et tantum non Ostracismum nobis minatur. Sed hic profecto possem Apologia supersedere, et judicium lectoribus committere, cum non unus ex viris praeclaris, nuperque Doctissimus Dominus Johannes Christophorus Sturmius, publice modestiam meam commendarit: tantum interest, quo res animo spectentur tranquillo, an fluctibus quibusdam agitato. Sed argumenta tamen videamus, quibus reus peragor. Duo affert: primum proponendorum problematum quam vocat luxuriem; deinde existimationis atque ordinis, velut ex solio Mathematico, singulis Geometris factam distributionem. Utrique satisfaciam, non tam mea causa, quam utilitatis publicae, ne mos problemata pulchra vel utilia proponendi, et eos qui labores suos praeclaros impertiti sunt publice laudandi, sub odiosis nominibus traducatur.

Itaque quod primum attinet, constat iis, quibus nota est Historia nostri temporis literaria, magnam incrementorum scientiae partem problematum propositioni deberi, idemque in futurum licet augurari, si scilicet problemata nondum sint in potestate receptae Analyseos. Ita enim discitur, quae *desiderata* ad perfectionem artis supersint, simulque ingenia *ad augmenta scientiarum* animantur. Certe ut olim Cycloidem, ita nuper Catenariam plurimum profuisse constat. Neque ego Catenariam ipse delegi, sed ab alio mihi propositam et confestim solvi et proposui aliis porro. Nec *Dn. Johannes Bernoullius* in suo problemate Lineae brevissimi descensus diu laboravit: nempe non casui, sed methodo successum debuimus.

Alterum accusationis caput non aliud habet fundamentum, quam quod solitus sum studiose commemorare merita insignium virorum in eo argumento quod tracto. Hoc Dominus Duillierius vocat ex solio mathematico existimationis atque ordinis distributionem: sed qui amant Historiam literariam, non aspernabuntur meam diligentiam suum cuique tribuentis, et qui laude digna facere student, probabunt meritis laudes rependi. Caeterum cum notavi, non nisi ab iis datam solutionem Curvae brevissimi descensus, qui nostrum calculum aut ei similem tractare norunt, an quicquam dixi falsum? Interest scilicet eorum, qui ad scientiam non vulgarem aspirant, ut sciant, qua quidque via pateat. Cumque addidi, quosdam egregios viros idem praestituros fuisse, si huc animum adhibuissent, nunquam credidissem, mente mea in contrarium versa, quod aequitatis erat, superbiae adscriptum iri. Nec tamen omnes (fateor) nominavi, a quibus talia (praesertim post nostra tunc jam edita) expectare licuisset. Poteram exempli causa insignis rerum difficillimarum enodatoris *Wallisii*, ut alias, mentionem facere, cui multum omnes debemus. Poteram et ab *Hookio* et *Halaeo* (post visam unius Theoriam Elasticam, alterius Ratiocinationem de atmosphaerae expansione), sed et a *Dn. Craigio* in his non parum progresso aliquid pulchrum sperare. Sed si quis hic se jure posset queri praeteritum, profecto esset non Duillierius, sed *Römerus*, Danicae in re Mathematica laudis conservator, cujus pulchra interioris Geometriae specimina tunc, cum ambo Parisiis versaremur, pene supra illius temporis captum erant, et quem ab eo tempore multa invenisse dignissima, credi par est. Hunc quis dubitet egregium aliquid fuisse praestiturum, si ad problemata nostra animum appulisset? Ut de Nobilissimo *Dn. de Tschirnhaus* nunc nihil dicam, a quo maxima quaeque expectanda saepe sum professus, nec de *Dn. La Hire*, qui utiliter id inter alia agit, ut sua alienaque per vias novas inventa ad morem Veterum demonstret, nec de *Dn. Varignonio*, qui et ipse in his non vulgaria praestitit. Sed nec omnes contemnuntur, a quibus ista non expectantur, cum sint qui

omnia alia agunt non minus ingeniosa et egregia, alia tamen. Caeterum nuspiam dixi, solos potuisse problema solvere, quorum mentionem nominatim feci, sed tantum solos, quibus nostri calculi mysteria patuerint (quibus se computat Dn. Duillierius), ex quibus quosdam prae caeteris honoriis causa et meritorum hujus generis extantium nominavi.

Interea vel nunc apparet, quam utile sit laudare bene meritos, ut alii quoque ad bene merendum invitentur, et Dominus Duillierius medias inter querelas Apologiam ipse meam non animadvertens scribit, dum scilicet praeteritus hoc ipso se stimulo excitatum tandem fatetur: *cum videamus* (inquit pag. 4) *silentium nostrum in nos verti* (id est, sua publico impertiri nolentem ob ignota merita non laudari), *quod hac in re praestitimus, exponemus.* Recte, atque ordine. Si qua igitur in hoc genere praeclara producet, hanc ex aliqua parte mihi (qui silendo ne sileret admonui) debebit ipse gloriam, Respublica fructum. Vellem tamen versari jam tum maluisset in re non praeoccupata, et perpendisset attentius edita circa problemata brevissimi descensus. Ita enim non habuisset, cur quereretur, ex Newtoniana constructione solidi minimum medio resistentis nullam sibi lucem affulgere, sed viam vidisset eodem perveniendi, quemadmodum *Dn. Marchio Hospitalius* et *Dn. Johannes Bernoullius* praeclare ostenderunt, qui etiam optime animadverterunt, quod ipse Dn. Duillierius credit, proprietatem Newtonianam esse perplexiorem, suam vero ex consideratione osculi vel radii curvitatis simpliciorem, id contra esse, cum illa constructionem per quadraturam hyperbolae vel logarithmos facile praebeat, haec vero a differentio-differentialibus pendeat, quae sunt, ut nos loquimur, transcendentia secundi gradus: quod perinde est, ac si quis problema planum ad sectiones Conicas, immo altiores referat. Quod si det imposterum Dn. Duillierius, quae novam lucem praebeant, habebit nos candidos laudum suarum depraedicatores. Interim mei mentionem faciens, *aliis*, inquit, *discipulis glorietur, me certe non potest* (pag. 18). Ex his, qui me non aliunde noverit, hominem valde gloriosum et valde quidem inepte gloriosum putabit. Ego vero contrario ambitionis genere libenter ipsius me Domini Duillierii discipulum gloriarer, id est, valde vellem aliquid praeclari ab eo doceri, quamvis ille se nihil a me didicisse praedicet: quod vereor ne in nonnullis paulo sit verius, quam ipsius interfuisset, uti vel hic ipse libellus ejus ostendit. Nam nisi nostra quaedam spreta praetervidisset, animadversioni praedictae non fuisset locus.

Ait *jam anno* 1687 *proprio se Marte invenisse fundamenta universa et plerasque regulas calculi, quem nos differentialem vocamus.* Credamus ita esse (saltem pro parte, nam ne nunc quidem omnia hujus calculi fundamenta ipsi satis nota putem, etsi ea fiducia, tamquam cuncta jam effuderimus, promptior ad provocandum factus fuisse videatur); jam manifestariam tenemus causam animi a me alienioris, quam fortasse ipse non satis animadvertit, uti in versu est: *non amo te, nec possum dicere quare.* Neque enim mirum est odisse pronam quam vocat (pag. 18) sedulitatem meam, qua mea ejusdem calculi elementa triennio ante, quam ipsi succurrerent, edens, quas se meruisse putavit laudes, innocenter praeoccupavi, quemadmodum quidam Veterum dicebat: *pereant qui ante nos nostra dixere.* Ego nihil malignum ipsi imputo, sed ea tamen est naturae humanae infirmitas, ut mirandum potius censerem, si juvenis tunc quidem et ad praeclara tendens gloriaeque cupidus his stimulis non cessisset. Pauci ad tantam virtutem perveniunt, ut noxiam sibi virtutem alterius amare possint; quanto minus, si (ut ipse de me) suspiciones sibi fingant (uti certe suspicax est aversus animus) non recta via, sed obliquis artibus alium ad laudem esse grassatum? Libenter enim affectum, quo nudo nobis ipsi displiceremus, justitiae velo velamus. Ego vero, quanto magis intelligo hos animorum recessus, eo minus aliquid humani passo irascor. Interim minus (credo) festinationem meam culpabit, ubi intelliget, ex Horatii praecepto nonum in annum et amplius me meditata pressisse, nec cum aliqua edidi anno 1684, vel gloriam vel invidiam expectasse, id fere tunc agentem, ut amicis meis Actorum Lipsiensium curatoribus satisfacerem, qui aliquid a me subinde postulabant; rei famam casus deinde potius dedit, quam ratio aut studium meum.

Hactenus Dn. Duillierius vel suam vel publicam, ut putabat, rem egit; nunc vero cum eminentis Geometrae Isaaci Newtoni, aliorumque etiam causam tamquam contra me suscipit, ignoscet mihi, si non ad omnia respondeo, donec mandatum procuratorium tum a caeteris, tum maxime a Domino Newtono ostendat, cum quo nulla mihi simultas fuit. Certe Vir egregius aliquoties locutus amicis meis semper bene de me sentire visus est, neque unquam, quod sciam, querelas jecit: publice autem ita mecumegit, ut iniquus sim, si querar. Ego vero libenter ejus ingentia merita oblatis occasionibus praedicavi, et ipse scit unus omnium optime, satisque indicavit publice, cum sua Mathematica Naturae Principia publicaret anno 1687, nova quaedam inventa Geometrica, quae ipsi communia mecum fuere, neutrum luci ab altero acceptae, sed meditationibus quemque suis debere, et a me jam decennio ante exposita fuisse. Certe cum Elementa calculi mea edidi anno 1684, ne constabat quidem mihi aliud de inventis ejus in hoc genere, quam quod ipse olim significaverat in literis, posse se tangentes invenire non sublatis irrationalibus, quod Hugenius quoque se posse mihi significavit postea, etsi caeterorum istius calculi adhuc expers: sed majora multo consecutum Newtonum, viso demum libro Principiorum ejus, satis intellexi. Calculum tamen differentiali tam similem ab eo exerceri, non ante didicimus, quam cum non ita pridem magni Geometrae Johannis Wallisii Operum volumina primum et secundum prodiere, Hugeniusque curiositati meae favens locum inde descriptum ad Newtonum pertinentem mihi mature transmisit. Caeterum etsi post tanta jam beneficia in publicum collata iniquum sit aliquid a Dn. Newtono exigere, quod novum quaerendi laborem postulet, non possum tamen mihi temperare, quin hac oblata occasione maximi ingenii Mathematicum publice rogem, ut memor humanorum casuum et communis utilitatis diutius ne premat praeclaras reliquas ac jam paratas meditationes suas, quibus cum scientias mathematicas, tum praesertim naturae arcana porro illustrare potest. Quodsi nulla movet tantarum gloria rerum (quamquam vix quicquam ei, quam nactus est, addi possit), illud saltem cogitet, generosum animum nihil magis ad se pertinere putare, quam ut optime de humano genere mereatur.

Unum tantum superest, in quo video Apologia aliqua mihi esse opus. Cum *Dn. Johannes Bernoullius* programma, quo invitabantur Geometrae ad quaerendam lineam brevissimi descensus, speciatim ad Dn. Newtonum misisset, sparsae sunt voces in Anglia, Newtonum a me fuisse provocatum, eaque sententia etiam Dn. Duillierii esse videtur, tamquam ego suasor mittendi atque impulsor fuerim. Sed inscio plane me factum, ipse Dn. Bernoullius testabitur. Quodsi Domino Duillierio credimus, aegre illud tulisse Newtonum (uti certe fatendum, immunitatem ei ab hoc laboris genere plenissimam deberi), saltem ut spero me non aegre nunc absolvet. Itaque nec ad me pertinet, quod queri videtur Dn. Duillierius, invitationem nullam ad se pervenisse, cum ait pag. 4, se quoque, si qua invitatione dignus visus fuisset literis, suas dudum solutiones fuisse exhibiturum. Sed habet nunc quoque campum, in quo se exerceat, et vero si propriis meditationibus tantum se profecisse persuasum cupit omnibus, problemata aggredi potest Dn. Johannis Bernoullii, de quibus post editas jam solutiones curvae brevissimi descensus in Actis Eruditorum Diarioque Gallico (vid. Journal des Sçavans an. 1697 pag. 395, edit. Paris.) facta mentio est, sed ita, quemadmodum nondum extant solutiones, ut scilicet pro Parabolis vel pro Ellipsibus ordinatim datis, quarum mentio fit in Diario Gallico loco dicto, intelligantur curvae quaecunque ordinatim datae, etiam quae non sint similes inter se, et solutio detur saltem ex suppositis quadraturis, cum in ista inquisitione sit adhuc aliquid, quod nostra etiam edita tenentem morari possit. Quale etiam est problema a Dn. Joh. Bernoullio propositum in Actis Erudit. Lips. Maji 1697 pag. 211, invenire curvam, aut saltem proprietatem tangentium curvae, quae curvas etiam transcendentes ordinatim datas secet ad angulos rectos. Nam si ea tantum producit, quorum jam datae sunt a nobis methodi, satis intelligit, quantum proprio Marte consequi potuerit, hinc non probari. Si quid in Physicis Theoriae Gravitatis Newtonianae adjecit, uti quidem pag. 18 insinuat, pariet hoc ipsi alterius generis laudem.

Quod alios quosdam attinet, de quibus me pariter ac de se non bene meritum ait Dn. Duillierius pag. 19, nihil adderem (cum neminem de me querentem norim) nisi speciatim de Theorematibus quibusdam Dn. Moyvraei circa series infinitas mentionem injecisset. Equidem talia hunc edidisse Theoremata ignorabam, donec nuper amicus ex Anglia redux secum attulit volumen postremum Transactorum Philosophicorum. Memini cum alios, tum Dn. Newtonum et me quoque in istis seriebus ante multos annos versari, ut in iis hospes Dn. Duillierio videri non debeam. Interim Dn. Moyvraeo gratias agendas, quod hunc laborem perutilem et valde ingeniosum velut pro derelicto habitum in se suscepit, rogandumque etiam censeo, ut in eo genere pergat, ubi multa adhuc restant. Diu enim est, quod complura Theoremata ampla satis ipse tam pro *finitis* seu *indefinitis*, quam pro *infinitis* formulis fabricans consideravi; si prosequerentur hoc studium, qui possunt et intelligunt, habituros nos quasdam *Canonum* utilissimorum velut *tabulas*, praestituras in analyticis aliquid illis usibus simile, quos in

Geometria practica tabulae sinuum aliorumve numerorum praebent, scilicet ut calculos semel factos non semper repetere necesse sit, uti defectu Canonum quotidie facimus. Sic optarem haberi generales Canones pro sublatione irrationalium, itemque pro inventione maximi communis divisoris, ac sublatione literarum, reductioneque aequationum plurium plures incognitas habentium ad pauciores incognitarum pauciorum, ac denique ad unam unius.

Sed haec nihil habent commune aut simile cum illis Methodis nostris, quibus problemata Catenariae aut lineae brevissimi descensus, aliaque id genus interioris Geometriae solvimus, ut adeo non possim in animum inducere meum, ipsi Dn. Moyvraeo videri injuriosum, quod nulla ipsius mentio facta est, cum de hujusmodi problematibus ageretur, quod tamen Dn. Duillierius insinuat, qui cum me ignarum in illo solio Mathematico collocasset, unde, si Diis placet, existimationem singulis Geometris distribuo, haec pag. 19 subjicit: *sed ignoscendum viro, si minus de me aliisque, saltem de Mathematicis rebus optime merito: aliis dico, qua enim aequitate, ut caeteros taceam, lineae brevissimi descensus inventio, subtilis quidem illa et egregia, opponetur eximiis illis Theorematis usus prorsus infiniti, quae Dominus de Moyvre in Transactionibus Philosophicis communicavit?* Equidem credo memini praeter Dn. Duillierium in mentem venisse, ut opponat inter se res toto adeo coelo diversas. Interim considerandum relinquo, qua ipsa aequitate dissimulet, aut qua animi praeventione obliviscatur, non hic de problemate aliquo particulari lineae brevissimi descensus, sed de Methodo summi momenti valdeque diffusa circa maxima et minima fuisse actum, quam ante Dn. Newtonum et me nullus quod sciam Geometra habuit, uti ante hunc maximi nominis Geometram nemo specimine publice dato se habere probavit, ante Dominos Bernoullios et me nullus communicavit, cum tamen constet, esse Methodi de maximis et minimis partem sublimiorem, et in applicatione Geometriae ad Mechanicen naturamque summe utilem, cum ex omnibus figuris possibilibus eligitur ad aliquid praestandum aptissima. Magnum sane Geometram *Huddenium* de his jam cogitasse apparet, sed quid consecutus sit, non constat. *Hugenius* certe (quamvis et ipse in Geometria ante detectum a me Calculum recepta summus), tamen narrante Domino Duillierio tale quid frustra tentavit, haud dubie quod nondum tunc satis usum nostrarum artium perspexisset, quem ubi tandem agnovit, mire illis et Methodis et (quae Dn. Duillierius adeo aversatur) problematis est delectatus candideque fassus publice ac privatim, jam apertum ad illa aditum, quae alia ratione vix sperari posse videbantur.

Postremo ne vacua sit haec Apologia, occasione Theorematis Moyvreani nostrum infinities generalius subjicere placet, adhibendo *novum designationis genus*, cujus magnum in re Analytica et Combinatoria usum reperimus, de quo alias fusius. Nempe modum damus extrahendi radicem, seu valorem quantitatis cujuscunque ut z ex aequatione generalissime determinante ipsam z per aliam quamcunque y. Nempe aequatio data generalissima relationis z ad y sic exprimetur $0 = (01y + 02y^2 + 03y^3 \text{ etc.}) + (-10 + 11y + 12y^2 + 13y^3 \text{ etc.})\,z^1 + (20 + 21y + 22y^2 + 23y^3 \text{ etc.})\,z^2 + \text{etc.}$, ubi hoc Calculi commoditatem, ut valores quaesitorum fiant affirmativi, ideo ipsi 10 praefiximus signum —. Quaeritur jam valor ipsius z, seu quaeritur in aequatione $z = 101y + 102y^2 + 103y^3 + 104y^4 + 105y^5 + \text{etc.}$, qui sint valores *numerorum* quaesitorum *assumtitiorum* 101, 102, 103 etc. (quos *majusculos* hic vocabimus) per numeros assumtitios aequationis datae (quos vocabimus *minusculos*) nempe per ipsos 01, 02, 03 etc. 10, 11, 12 etc. 20, 21, 22 etc. etc. Dico fore $101 = 01 : 10$; et $102 = 02 + 11 . 101 + 20 . 101^2, : 10$; et $103 = 03 + 11 . 102 + 12 . 101 + (2)\, 20 . 101 . 102 + 21 . 101^2 + 30 . 103^3, : 10$; et $104 = 04 + 11 . 103 + 12 . 102 + 13 . 101 + (2)\, 20 . 101 . 103 + (2)\, 21 . 101 . 102 + 22 . 101^2 + (3)\, 30 . 101^2 . 102 + 31 . 101^3 + 40 . 101^4, : 10$. Eodemque modo habebuntur 105, 106 etc. hac *regula generali*, ut denominator cujusque valoris sit 10, numerator vero constet ex omnibus membris possibilibus in unum additis *Lege combinationis* sequenti formatis, et multiplicatis respective per *numeros transpositionum* formae in membro ex majusculis conflatae convenientes, qui *numeri* sunt *veri*, parenthesibus inclusi. Porro in Minusculis ut 01, 02, 03; 10, 11, 12; 20, 21, 22 etc. nota prior significat, ad quam potentiam ipsius z, nota posterior, ad quam potentiam ipsius y numerus minusculus pertineat in aequatione data. In Majusculis (ut 101, 102, 103 etc.) nota prima (hoc loco 1) nihil aliud est quam nota majusculi; nota vero ultima indicat, ad quam Majusculus pertineat potentiam ipsius y in aequatione quaesita seu valore ipsius z. Jam *Lex Combinationis* haec est: notae ultimae *numerorum supposititiorum* vel assumtitiorum membri cujusque formanto eandem summam, aequalem notae ultimae majusculi, cujus membra ingrediuntur valorem, et in mem-

bro quolibet minusculus non esto nisi unicus, majusculi autem tot, quot nota prior in minusculo habet unitates: ita simul omnia cujusque valoris membra possibilia determinantur. Ex hoc jam theoremate habetur non tantum extractio radicis definitae ex aequatione unius incognitae finita vel infinita, sed etiam valor indefinitus, qualis exempli gratia desideratur, cum quaeritur valor generalis ordinatae ad Curvam aliquam sive Algebraicam sive transcendentem. Theorema vero Dni. Moyvraei hujus nostri est casus specialis, qui prodit, si omnes minusculi sint aequales nihilo, praeter solos primi ordinis 01, 02, 03 etc. et 10, 20, 30 etc., ita ut solis curvis applicari id possit, in quarum aequatione duae coordinatae in se invicem non ducuntur. Non tamen dubitem, et ad haec et ad alia abstrusiora eum pervenire potuisse aut posse, si ut jam rogavimus, pergere in tam utili inquisitione velit. Videbunt autem intelligentes *novam Analyticae promotionem in hac nostra designatione per Numeros loco literarum*, qui adeo fictitii seu supposititii sunt, contineri. Nam cum mens nostra saepissime pro rebus cogitandis notas adhibere debeat, et *Characteristica* sit maximum meditandi subsidium, consequens est, tanto utiliores esse notas, quando magis exprimunt rerum relationes. Unde porro sequitur, literas Algebraicas indiscriminatim adhibitas non satis esse utiles, quia ob vagam generalitatem suam non admonent mentem relationis, quam ex prima suppositione sua habent inter se invicem. Hinc ut nonnihil succurramus defectui, solemus interdum (inprimis cum multae adhibendae sunt) in ordine earum subsidium quaerere. Sed ubi magna est nec simplex varietas, utilissimum reperi ad numeros recurri, cum et ipsae literae apud multas gentes ordine suo numeros significent. Numeros autem intelligo fictitios, pro literis stantes, etsi interdum tali arte adhibere liceat, ut simul haberi pro veris, et examen calculi novenarium, vel aliud subire possint. Haec autem designatio quantae utilitatis sit ad Canones novos, utiles et late fusos, cum ex praesenti theoremate judicari potest, tum progressu temporis, ubi eae quas opto *Canonum Analyticarum Tabulae* condentur, magis apparebit. Atque ita demum per Characteristicam ex Combinatoria Arte, Algebra ei subordinata perficitur. Combinatoriam autem (quam animo complexus sum) ex ea, quam pene puer conscripsi et anno 1666 edidi (me inconsulto ante annos aliquot recusam) nolim aestimari, tametsi jam tum quasdam meditationes non poenitendas nec momenti nullius asperserim.

XXIII.

MÉMOIRE DE MR. G. G. LEIBNIZ TOUCHANT SON SENTIMENT SUR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL. *)

Un des Journaux de Trevoux contient quelque méthode de Mr. Jacques Bernoulli, et y méle des réflexions sur le calcul des différences, où j'ai tant de part. L'Auteur de ces réflexions semble trouver le chemin par l'infini et l'infini de l'infini pas assez sûr et trop éloigné de la méthode des Anciens. Mais il aura la bonté de considérer que si les découvertes sont considérables, la nouveauté de la méthode en relève plutôt la beauté. A l'égard de la sureté du chemin, le livre de Mr. le Marquis de l'Hospital lui pourra donner satisfaction. J'ajoûterai même à ce que cet illustre Mathématicien en a dit, qu'on n'a pas besoin de prendre l'infini ici à la rigueur, mais seulement comme lorsqu'on dit dans l'optique, que les rayons du Soleil viennent d'un point infiniment éloigné, et ainsi sont estimés parallèles. Et quand il y a plusieurs degrés d'infini ou infiniment petits, c'est comme le globe de la Terre est estimé un point à l'égard de la distance des fixes, et une boule que nous manions est encore un point en comparaison du semidiamétre du globe de la Terre, de sorte que la distance des fixes est un infiniment infini ou infini de l'infini par rapport au diamétre de la boule. Car au lieu de l'infini ou de l'infiniment petit, on prend des quantités aussi grandes et aussi petites qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que l'erreur donnée, de sorte qu'on ne diffère du stile d'Archimède que dans les expressions, qui sont plus directes dans nôtre méthode et plus conformes à l'art d'inventer.

XXIV.

SPECIMEN NOVUM ANALYSEOS PRO SCIENTIA INFINITI CIRCA SUMMAS ET QUADRATURAS. **)

Ut in Algebra reciprocae sibi sunt *Potentiae* et *Radices*, ita in calculo infinitesimali *Differentiae* et *Summae*: et uti in Algebra

*) Journal de Trevoux an. 1701.
**) Act. Erudit. Lips. an. 1702.

seu scientia generali finitae magnitudinis potissimus scopus est *extrahere radices* formularum, ita in scientia infiniti *invenire summas* serierum, quae cum ex terminis constant continue seu elementariter crescentibus nihil aliud sunt, quam quadraturae vel areae figurarum. Et quemadmodum aliae radices *purae* sunt, cum valores ex solis cognitis habentur, aliae *affectae*, cum ipsae earum potentiae valorem ipsarum ingrediuntur: ita quae summanda sunt, aut pure et plane sunt cognita, aut rursus implicant summam quaesitam, ut si sit $dy = yxdx : , ax + yy$, ubi y summa quaesita ingreditur valorem summandi dy. Et utrobique artis est (nondum absolutae, quantum quidem in publicum constet) reducere affectas expressiones ad puras, quod in calculo infinitesimali est *reducere aequationes differentiales cujuscunque gradus* (nempe differentiales, differentio-differentiales etc.) *ad quadraturas*, atque adeo suppositis quadraturis ex data *tangentium* aut *osculationum* cujuscunque gradus proprietate lineam invenire. In ipsis autem rursus *quadraturis* magni res momenti foret, quod nunc agimus, reducere compositas ad simpliciores. Atque haec est analysis Tetragonistica, in qua nonnullos a multis annis progressus feci. Nempe cum vix quadraturam meam Arithmeticam invenissem per reductionem tetragonismi circularis ad quadraturam rationalem, comperto scilicet $\int dx : (1 + xx)$ pendere ex quadratura circuli, mox animadverti, omnes quadraturas, quae reductae sunt ad summationem formulae rationalis, eo ipso ad certa tandem capita simplicissimarum summationum revocari posse. Quod qua ratione fieri debeat, ostendemus novo genere Resolutionis, *Producto* scilicet *ex multiplicatione converso in Totum conflatum ex additione*, nempe transformatione fractionis denominatorem habentis multiplicatione radicum suarum continua utcunque exaltatum in aggregatum ex fractionibus simplices tantum denominatores habentibus. *Rationalem* autem quantitatem vel formulam hic voco, cum indeterminata quantitas, velut hoc loco x, non ingreditur vinculum, nam constantes utrum rationales sint, an surdae, non curatur.

Sit formula quaecunque finita rationalis $\frac{\alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \ldots}{\lambda + \mu x + \xi xx + \pi x^3 + \ldots}$. Hanc demptis integris puris ajo posse ostendi aequalem aggregato fractionum, quarum numerator sit constans seu sine x, denominator autem sit simplex, ita ut quaevis harum fractionum sit qualis $\frac{a}{x+b}$, quod qui fieri possit, sic ostendo. Primum ex Algebra suppono divisores simplices cujusque formulae rationalis integrae utcunque cognitos; sunt enim iidem cum radicibus aequationis, quae prodirent, si formula pro aequatione haberetur. Exempli gratia formula $xx = \frac{ax}{b} + ab$ habet divisores $x - a$ et $x - b$, et eadem si, esset aequatio seu aequalis nihilo, haberet has ipsas radices nihilo aequales, ita ut x valeret a vel b. Itaque ex suppositis resolutionibus aequationum Algebraicis habentur divisores formularum, et nostra haec Analysis infinitesimalis Analysin Algebraicam, ut superior inferiorem, supponit. Propositam nunc formulam denominatoris, nempe $\pi x^3 + \xi xx + \mu x + \lambda$ vel aliam altiorem, dividendo per π, si opus, faciemus $x^3 + \frac{\xi}{\pi} xx + \frac{\mu}{\pi} x + \frac{\lambda}{\pi}$. Hujus divisores ponamus esse $x + b$, $x + c$, $x + d$ etc. eosque per compendium vocemus l, m, n etc. Itaque proposita fractio $\dfrac{\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\beta}{\pi} x + \frac{\gamma}{\pi} xx + \frac{\delta}{\pi} x^3}{x^3 + \frac{\xi}{\pi} x + \frac{\mu}{\pi} xx + \frac{\lambda}{\pi}}$ divelli poterit in sequentes $\frac{\alpha : \pi}{lmn} + \frac{\beta x : \pi}{lmn} + \frac{\gamma xx : \pi}{lmn} + \frac{\delta x^3 : \pi}{lmn}$. Ajo jam, quamvis harum reduci posse ad talem, qualis est prima $\frac{\alpha : \pi}{lmn}$. Igitur primum hanc resolvemus, deinde quomodo caeterae ad hanc revocentur, ostendemus.

Neglecto igitur numeratore constante, qui nihil in summationibus turbat, aggredimur resolutionem fractionum $\frac{1}{lm}$, $\frac{1}{lmn}$, $\frac{1}{lmnp}$ etc. vel generalius fractionis $\frac{1}{lmnpq}$, posito ut dixi esse $l = x + b$, $m = x + c$, $n = x + d$, $p = x + e$, $q = x + f$, et ita porro. His positis reperi, quod quisque jam experiundo facile demonstrare poterit, esse

$$\frac{1}{lm} = \frac{1}{c - b, l} + \frac{1}{b - c, m}$$

$$\frac{1}{lmn} = \frac{1}{c - b, d - b, l} + \frac{1}{b - c, d - c, m} + \frac{1}{b - d, c - d, n}$$

$$\frac{1}{lmnp} = \frac{1}{c - b, d - b, e - b, l} + \frac{1}{b - c, d - c, e - c, m} + \frac{1}{b - d, c - d, e - d, n} + \frac{1}{b - e, c - e, d - e, p}$$

et ita porro; nam ex aspectu patet progressus in infinitum uniformis et regularis. Ut autem, qui volet, veritatem experiundo comprobare facile possit, sufficit praeiri exemplo casus primi: $\frac{1}{c - b, l} + \frac{1}{b - c, m} = \frac{bm - cm + cl - bl}{2bc - bb - cc, lm}$. Jam pro ipsis l, m substituendo in numeratore valores $x + b$, $x + c$, fiet $bm - cm + cl - bl = bx + bc - cx - cc + cx + cb - bx - bb =$ (destructis membris, in quibus est indeterminata x) $2bc - bb - cc$; ergo erit $\frac{bm - cm + cl - bl}{2bc - bb - cc, lm} = \frac{2bc - bb - cc}{2bc - bb - cc, lm} = \frac{1}{lm}$, prout asserebatur. Jam omnes Fractiones $\frac{x}{lmn..}$, $\frac{xx}{lmn..}$, $\frac{x^3}{lmn..}$, quarum numerator non est constans, reducemus ad fractiones numeratoris, qualis est $\frac{\alpha}{lmn..}$. Reperi igitur rursus, quae sequuntur:

Regulae universales pro Fractionibus Numeratoris indeterminati, non involventibus Integros indeterminatos, resolvendis in Fractiones numeratoris constantis,

$$l = x + b,\; m = x + c,\; n = x + d,\; p = x + e \ldots$$

$$\frac{x}{l..} = \frac{1}{..} - \frac{b}{l..}$$

$$\frac{xx}{lm..} = \frac{1}{..} - \frac{b + c}{m..} + \frac{bb}{lm..}$$

$$\frac{x^3}{lmn..} = \frac{1}{..} - \frac{b + c + d}{n..} + \frac{bb + cc + bc}{mn..} - \frac{b^3}{lmn..}$$

$$\frac{x^4}{lmnp..} = \frac{1}{..} - \frac{b + c + d + e}{p..} + \frac{bb + cc + dd + bc + bd + cd}{np...} - \frac{b^3 + c^3 + bbc + bcc}{mnp..} + \frac{b^4}{lmnp..}$$

Puncta... hic significant literas supplendas, ut si opus hae pro illis poni possint. Exempli causa, si pro $\frac{x}{l..}$ daretur $\frac{x}{lmn}$, loco $\frac{x}{l..} = \frac{1}{..} - \frac{b}{l..}$ prodiret $\frac{x}{lmn} = \frac{1}{mn} - \frac{b}{lmn}$.

Series exhibentes Regulas pro Fractionibus Numeratoris indeterminati involventibus Integros indeterminatos, resolvendis in suos Integros et in Fractiones numeratoris constantis.

$$\frac{xx}{l} = x - b + \frac{bb}{l}$$

$$\frac{x^3}{lm} = x - \frac{b+c}{l} + \frac{bb+cc+bc}{m} - \frac{b^3}{lm}$$

$$\frac{x^4}{lmn} = x - \frac{b+c+d}{l} + \frac{bb+cc+dd+bc+bd+cd}{n} - \frac{b^3+c^3+bcc}{mn} + \frac{b^4}{lmn}.$$

etc.

$$\frac{x^3}{l} = xx - bx + bb - \frac{b^3}{l}$$

$$\frac{x^4}{lm} = xx - \frac{b+c}{l}x + \frac{bb+cc+bc}{l} - \frac{b^3+c^3+bbc+bcc}{m} + \frac{b^4}{lm}$$

etc.

Seriei cujusque, serierumque ipsarum inter se progressus in infinitum apparet ex aspectu, praesertim columnarum. In membro unoquoque numerator constans est Formula plena sui gradus, ex literis sibi competentibus formata, tam simplex, ut nullis coefficientibus varietur. Ita $bb + cc + dd + bc + bd + cd$ est formula plena secundi gradus ex literis b, c, d formata, carens coafficientibus, adeoque constans ex aggregato quadratorum et rectangulorum.

Quodsi quis sublatis l, m, n, p etc. restituere velit valores ipsarum $x+b$, $x+c$, $x+d$, $x+e$ etc., Theoremata praecedentia stabunt, quemadmodum patet in exemplis hic subjectis:

$$\frac{1}{x^4 + bx^3 + bcxx + bcdx + bcde}$$
$$\begin{array}{ccc} c & bd & bce \\ d & be & bde \\ e & cd & cde \\ & ce & \\ & de & \end{array}$$

idem est quod

$$\frac{1}{c-b,\, d-b,\, c-b,\, x+b} + \frac{1}{b-c,\, d-c,\, e-c,\, x+c} + \frac{1}{b-d,\, c-d,\, e-d,\, x+d}$$
$$+ \frac{1}{b-e,\, c-e,\, d-e,\, x+e}.$$

Et $$\frac{x^3}{x^4 + bx^3 + bcxx + bcdx + bcde}$$
$$\begin{array}{ccc} c & bd & bce \\ d & be & bde \\ e & cd & cde \\ & ce & \\ & de & \end{array}$$

idem est quod

$$\frac{1}{x+e} - \frac{b+c+d}{xx+dx+de} + \frac{bb+cc+bc}{x^3+cxx+cdx+cde} - \frac{b^3}{x^4+bx^3+bcxx+bcdx+bcde}$$
$$\begin{array}{ccccccc} e & \quad & d & ce & \quad & c & bd & bce \\ & & e & de & & d & be & bde \\ & & & & & e & cd & cde \\ & & & & & & ce & \\ & & & & & & de & \end{array}$$

Operaeque pretium foret, quamlibet fractionem valoris hujus, qualem dat exemplum posterius, resolvere rursus in valorem ex fractionibus simplicibus compositum, ad modum valoris, quem dat exemplum prius, eoque modo novam Theorematum seriem dare pro valoribus ipsarum fractionum, ut $\frac{1}{lmnp..}$, ita $\frac{x}{lmnp..}$, $\frac{xx}{lmnp..}$, $\frac{x^3}{lmnp..}$ etc. exhibendis per aggregatum ex simplicibus fractionibus conflatum, si locus iste pateretur.

Ex his ergo patet, omnem Fractionem Rationalem reduci posse ad Fractiones simplices rationales constantis numeratoris, rationales, inquam, quoad indeterminatam x, quae extra vinculum esse debet. Itaque si daretur fractio aliqua resolvenda, velut $2xx + x\sqrt{2} + \sqrt{5}, :, xx + 2x + \sqrt{3}$, vel aliqua fractio simplex inter resolvendum occurrens, ut fractio $\sqrt{2} :, x + \sqrt{3}$, ea in hoc Analyseos genere habetur pro rationali, quia Analysin hanc summationum non moratur irrationalitas, quae indeterminatas non involvit. In quo commodior hoc loco est reductio irrationalium ad rationales, quam in Calculo Numerorum Figuratorum *Diophanteo*. Hinc sequitur, etsi irrationales sint Radices, modo sint reales, non vero imaginariae, in seriebus quidem Numericis rationalibus summandis, quae sunt determinati gradus seu ubi indeterminata non ingreditur exponentem, rem semper posse reduci ad summam numerorum progressionis Harmonicae aut potentiarum ab ipsis, aut his destructis ad quantitatem constantem seu summam absolutam, vel saltem ad seriem integrorum, quae in rationalibus tertii gradus semper summari potest pro parte seriei finita; in seriebus vero linearum ordinatarum rationalibus summandis seu in quadraturis Figurarum Algebraicarum rationalium omnia semper, cum radices sunt reales, reduci ad Quadraturam Hyperbolae. Hinc (ut id prius explicem) in seriebus Numericis summandis res redit ad summandas omnes $\frac{1}{y}$ vel omnes $\frac{1}{yy}$ vel omnes $\frac{1}{y^3}$ etc. posito $y = x + e$, vel $x + 2$, vel

$x+\sqrt{3}$ aliterve, ut placet. Nam si x sit 1 vel 2 vel 3 etc. et *e* constans sit 2, series numerorum $\frac{1}{x+e}$ seu $\frac{1}{y}$ erit $\frac{1}{1+2}$, $\frac{1}{2+2}$, $\frac{1}{3+2}$, $\frac{1}{4+2}$ etc. Sin x sit 1 vel 3 vel 5 vel 7 etc. et *e* constans sit $\sqrt{3}$, tunc series omnium $\frac{1}{y}$ erit $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$, $\frac{1}{3+\sqrt{3}}$, $\frac{1}{5+\sqrt{3}}$, $\frac{1}{7+\sqrt{3}}$ etc. id est, si x aut y sint progressionis Arithmeticae sive naturalis sive alterius cujuscunque, ipsae $\frac{1}{y}$ erunt progressionis harmonicae, itaque $\int\frac{dy}{y}$ erit in Numeris summa progressionis Harmonicae, et $\int\frac{dy}{yy}$, $\int\frac{dy}{y^3}$ etc. erunt summae potentiarum a terminis progressionis Harmonicae. Ad has ergo res redit, si series numericae rationales determinati gradus, finitae, vel cum id fieri potest, infinitae summandae intelligantur et formula fractionis non habeat nisi radices reales. Et licet series Harmonica infinita numero terminorum, etiam magnitudine sit infinita summarique adeo non possit (quod secus est in seriebus potentiarum ab harmonicis terminis), differentia tamen inter duas series harmonicae progressionis licet infinitas, finitam magnitudinem constituere potest. Et, quod eximium censeo, cum absoluta habetur summatio, independens ab harmonicis terminis horumque potentiis summandis, hac analysi nostra destruuntur harmonicae, aliaeque series minus tractabiles, et sese sponte ostendit summa, Exempli gratia $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}$ etc. seu $\int\frac{dx}{xx-1}$ posito x esse 2 vel 3 vel 4 etc. est series quae tota in infinitum sumta summari potest, et dx quidem hoc loco est 1. In numericis enim differentiae sunt assignabiles. Et $\frac{1}{xx-1}$ per regulam nostram (ob valorem ipsius $\frac{1}{lm}$, quia l hoc loco $=x+1$ et $x=m-1$, adeoque b est 1 et c est -1) erit $\frac{1}{-2, x+1}+\frac{1}{2, x-1}$ seu $\frac{1}{2}\overline{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}$; jam

$$+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} \text{ est} = \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\text{etc.}$$

$$-\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} = \tfrac{1}{2},\ *\ *-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}-\text{etc.},$$

ergo $\int\frac{dx}{xx-1}$ erit $=\frac{1}{2}, \frac{1}{1}+\frac{1}{2}***=\frac{3}{4}$. Tandemque erit $\frac{3}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+$ etc. quam summationem jam olim cum Quadratura Arithmetica edere memini. Similique methodo caeterae summationes serierum rationalium, determinati gradus realiter resolubilium inveniuntur, aut ad harmonicas earumque potentias rediguntur. De imaginaria resolutione, quae et ipsa prodest, mox dicetur Eademque subinde etiam pro seriebus rationalibus indeterminati gradus servire possunt.

Quodsi x vel y essent non termini discreti, sed continui, id est non numeri intervallo assignabili differentes, sed lineae rectae abscissae, continue sive elementariter hoc est per inassignabilia intervalla crescentes, ita ut series terminorum figuram constituat; patet eodem modo omnes summas fractionum rationalium gradus constantis, hoc est omnes Quadraturas figurarum rationalium Algebraicarum, supponendo *Radices* formulae denominatorem constituentis esse *reales*, posse vel absolute inveniri, vel ad Quadraturam Hyperbolae reduci. Nam quia praeter integros summandos, ut $\int dx$, $\int xdx$, $\int xxdx$ etc., res reducitur ad summationes simplices, posito $y=x+e$, quales $\int\frac{dy}{y}$, $\int\frac{dy}{yy}$, $\int\frac{dy}{y^3}$ etc., in quadraturis autem semper habentur $\int\frac{dy}{yy}$, $\int\frac{dy}{y^3}$ etc., hinc patet, solam superesse $\int\frac{dy}{y}$, id est Hyperbolae Quadraturam. Verum enim vero tenacior est varietatis suae pulcherrimae Natura rerum, aeternarum varietatum parens, vel potius Divina Mens, quam ut omnia sub unum genus compingi patiatur. Itaque elegans et mirabile effugium reperit in illo Analyseos miraculo, idealis mundi monstro, pene inter Ens et non-Ens Amphibio, quod radicem imaginariam appellamus. Hinc quoties denominator Fractionis Rationalis habet radices imaginarias, quod infinitis modis contingit, Hyperbola quoque, cujus opus esset Quadratura, fieret imaginaria construique nullo modo posset. Sed quia quaevis Radices imaginariae suas compares habent, oriuntur enim extrahendo radicem quadraticam ex quantitate privativa, extractio autem quadratica omnis duplex est, ut notae ejus $\sqrt[2]{\ldots}$ praefigi possit $+$ vel $-$; hinc ex radicum imaginariarum debito invicem ductu oritur productum reale, quod vel erit ipse denominator, eoque casu (si ad numeratorem constantem reducta sit fractio, tollaturque, si placet, terminus secundus Formulae) quadratura proposita non potest hic reduci ad simpliciorem, vel producitur realis aliquis divisor denominatoris, ejusque ope quadratura proposita ab alia simpliciore pendet, qualis est circuli quadratura. Exempli gratia sit fractio $\frac{1}{x^4-1}$, patet denominatoris radices esse $x+1, x-1, x+\sqrt{-1}, x-\sqrt{-1}$, quae in se invicem multiplicatae producunt x^4-1, et erit per regulam

$$\left.\begin{array}{l} +\dfrac{1}{-1-1,+\sqrt{-1}-1,-\sqrt{-1}-1,x+1}+\dfrac{1}{+1+1,+\sqrt{-1}+1,-\sqrt{-1}+1,x-1} \\ +\dfrac{1}{+1-\sqrt{-1},-1-\sqrt{-1},-\sqrt{-1}-\sqrt{-1},x+\sqrt{-1}}+\dfrac{1}{+1+\sqrt{-1},-1+\sqrt{-1},+\sqrt{-1}+\sqrt{-1},x-\sqrt{-1}} \end{array}\right\}=\frac{1}{x^4-1}$$

$$=-\frac{1}{4,x+1}+\frac{1}{4,x-1}+\frac{1}{4\sqrt{-1},x+\sqrt{-1}}-\frac{1}{4\sqrt{-1},x-\sqrt{-1}}$$

ubi $\int\frac{dx}{x+1}$ vel $\int\frac{dx}{x-1}$ pendent ex Quadratura Hyperbolae, sed $\int\frac{dx}{x\sqrt{-1}-1}$ vel $\int\frac{dx}{x\sqrt{-1}+1}$ non possunt ad Hyperbolam nisi imaginariam revocari. Jungendo ergo tot radices imaginarias inter se, quot ad expressionem realem obtinendam necesse est, id est hoc loco in unum aggregando duas posteriores fractiones, nempe $\frac{1}{4x\sqrt{-1}-4}-\frac{1}{4x\sqrt{-1}+4}$, prodibit $\frac{4,x\sqrt{-1}+1-x\sqrt{-1}+1}{4,x\sqrt{-1}-1,4,x\sqrt{-1}+1}$, id est $-\frac{1}{2,xx+1}$. Si vellemus similiter in unum congre-

gare $-\frac{1}{4,x+1}+\frac{1}{4,x-1}$, fieret inde $\frac{1}{2,xx-1}$, et aggregando in unum $\frac{1}{2,xx-1}-\frac{1}{2,xx+1}$ redibit $\frac{1}{x^4-1}$, quod adeo est $=\frac{1}{4,x-1}-\frac{1}{4,x+1}-\frac{1}{2,xx+1}$. Unde patet pendere $\int\frac{dx}{x^4-1}$ vel etiam $\int\frac{dx}{1-x^4}$ ex Quadratura Hyperbolae et Circuli simul. Nam $\int\frac{dx}{x-1}$ et $\int\frac{dx}{x+1}$, adeoque et $\int\frac{dx}{xx-1}$ pendere ex Quadratura Hyperbolae, dudum constabat; sed $\int\frac{dx}{xx+1}$ pendere ex Quadratura Circuli a me primum cum Quadratura mea Arithmetica est inventum, atque hinc duxi, quod initio Actorum Lipsiensium edidi Theorema, Quadrato diametri existente 1, Aream Circuli esse $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ etc. Ex his sequitur, omnium Figurarum Algebraicarum Rationalium, ubi denominator in valore ordinatae divisores reales habet primi gradus, ut $x+e$, reduci posse ad Quadraturam Hyperbolae; cum vero divisores reales habet planos seu secundi gradus (qui scilicet ipsimet non habent radices reales, alioqui ducturi ad quadraturas absolutas) ut $xx+fx+ag$ vel (sublato secundo termino) ut $xx\pm ae$, pendere ex Quadratura Hyperbolae, vel Circuli, vel utriusque.

Hic jam ordo nos ducit ad maximi momenti Quaestionem, utrum omnes Quadraturae rationales ad Quadraturam Hyperbolae et Circuli reduci possint, quae huc redit in nostra hac Analysi: utrum omnis Aequatio Algebraica seu formula realis integra quoad indeterminatam rationalis possit resolvi in divisores reales simplices aut planos. Verum comperi, qui hoc statueret, eum naturae copias arctius contracturum quam par sit. Esto $1:(xx+aa\sqrt{-1})$ ducendum in $1:(xx-aa\sqrt{-1})$, prodibit $1:(x^4+a^4)$, cujus denominator utique est formula realis, sed resolvendo hanc formulam non pervenitur ad divisores planos reales, nam $xx-aa\sqrt{-1}$ resolvi potest in $x+a\sqrt{\sqrt{-1}}$ et $x-a\sqrt{\sqrt{-1}}$, et $xx+aa\sqrt{-1}$ in $x+a\sqrt{(-\sqrt{-1})}$

et $x - a\sqrt{(-\sqrt{-1})}$. Itaque formula $x^4 + a^4$ prodit ducendo invicem $x + a\sqrt{\sqrt{-1}}$, $x - a\sqrt{\sqrt{-1}}$, $x + a\sqrt{(-\sqrt{-1})}$, $x - a\sqrt{(-\sqrt{-1})}$, sed quamcunque instituamus duarum ex his radicibus quatuor combinationem, nunquam consequemur, ut duae invicem ductae dent quantitatem realem, sed divisorem realem planum. Itaque $\int dx : (x^4 + a^4)$ neque ex Circuli neque ex Hyperbolae Quadratura per Analysin hanc nostram reduci potest, sed novam sui generis fundat. Et optarem (quod alias etiam me innuere memini), ut $\int dx : (x + a)$ seu Quadraturam Hyperbolae constat dare Logarithmos seu *Sectionem Rationis*, et $\int dx : (xx + aa)$ *Sectionem Anguli*, ita porro continuari posse progressionem, constareque cuinam problemati respondeant $\int dx : (x^4 + a^4)$, $\int dx : (x^8 + a^8)$ etc. Caeterum, ut obiter addam, $\int x^{\frac{e-1}{\cdot}} dx : (x^{2e} \pm a^{2e})$, verbi gratia $\int x dx : (x^4 \pm a^4)$ et $\int xx dx : (x^6 \pm a^6)$ et $\int x^3 dx : (x^8 \pm a^8)$, et ita porro, pendent ex Quadratura Circuli, si $\pm$ significet $+$, et ex Quadratura Hyperbolae, si significet $-$, uti facile agnoscit peritus calculi differentialis, quamquam et ex praesenti Analysi deduci posset.

Unum jam potissimum superest quaerendum, utrum jam et quomodo Figurae, quae Ordinatas habent irrationales, ad alias Figuras rationales Homometras (id est ut data quadratura unius, absolute vel rationaliter detur quadratura alterius) reduci nostraeque huic Analysi subjici possint. Quo in genere multa quidem tentavi, nec sine successu, nondum tamen quicquam satis universale aut insigne ausim polliceri, et ut verum fatear, rem pro dignitate tractare non vacavit. Itaque distuleram editionem Methodi, donec in reductione irrationalium summandarum ad summandas rationales majores progressus facere liceret, totamque hanc doctrinam servabam Operi meo *Scientiae infiniti*. Sed cum viderem, hac mora differri progressum artis, neque dum satis de tempore meo statuere possem, malui publicae utilitati velificari, ea spe fretus, fore qui latius spargant semina novae doctrinae uberioresque fructus colligant, praesertim si incumbatur diligentius quam factum est hactenus in amplificationem Algebrae Diophanteae, Cartesii discipulis fere neglectae, quod usum in Geometria parum perspexissent. Ego vero aliquoties innuere memini (quod mirum videri poterat) progressum Analyseos nostrae infinitesimalis circa quadraturas pendere bona ex parte ab incrementis ejus Arithmeticae, quam primus, qui nobis quidem notus sit, professa opera tractavit

Diophantus. Et spero, quae nunc damus, facta oculata fide, efficacioris ad haec porro excolenda adhortamenti loco fore.

XXV.

CONTINUATIO ANALYSEOS QUADRATURARUM RATIONALIUM. *)

Quam nuper edidi Analysin Summatoriam Rationalium sive in Numeris sive in Quadraturis, mirifice intelligentibus placere video. Nam (ut de summis Numerorum nunc taceam) Analysis transcendens linearum, ubicunque haec Methodus locum habet, deducitur ad suam perfectionem, quia tunc semper pro aequationibus differentialibus substitui possunt exponentiales. Sciendum enim, quod dudum notavi, expressionem lineae per Aequationem differentialem hoc habere incommodi, quod non prodest pro aequatione locali, neque proprie ad unum punctum refertur. Unde fit, ut per eam intersectio curvae cum alia linea haberi incognitave tolli non possit, atque adeo tunc demum in talibus aequatio differentialis prodesse potest, cum constat, duas lineas non tantum occurrere sibi, sed et se tangere. At aequatio curvae transcendens exponentialis omnes perfecte usus analyticos recipit, ejusque ope non tantum determinari concursus, sed et incognitae tolli possunt, simulque eadem opera apparet, quodnam problema deprimatur ex transcendenti ad commune, quoties nempe quantitates indeterminatae exeunt de exponente aut plane evanescunt. Ex. gr. si prodeat $b^{\frac{xx+yy}{\cdot}} = c^{aa}$, fiet $xx + yy = aa$ (loc. c : log. b), quae aequatio est ad Circulum, et si logarithmorum ipsius b et ipsius c ratio aliunde data sit, constructus erit circulus communi more; sin minus, saltem obtentum est, quod debuit obtineri. Et vero sciendum est, quoties in solis constantibus haeret difficultas, ut Algebraice exprimi nequeant, tunc non amplius incertum esse gradum, neque adeo problema amplius esse transcendens. Ex. gr. sit $\sqrt[e]{2}$ quantitas non ordinaria, veluti si e sit numerus irrationalis $\sqrt{2}$, tamen nec transcendens a me dicetur, sed interscendens, nam cadit inter gradus usitatos.

---

*) Act. Erudit. Lips. an. 1703.

Sed haec obiter dicta sunto, ut praestantia hujus Analyseos melius intelligatur. Fractio quaecunque rationalis quoad indefinitam potest facta concipi hujus formae, posito t esse numerum integrum rationalem,

$$\frac{\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\beta}{\pi}x + \frac{\gamma}{\pi}xx + \frac{\delta}{\pi}x^3 + \text{etc.}}{\overset{t}{x} + \frac{\xi}{\pi}x^{t-1} + \frac{\mu}{\pi}x^{t-2} + \frac{\lambda}{\pi}x^{t-3} + \text{etc.}}$$

Hinc primum detrahentur integra pura, ut x^0, x^1, x^2 etc. quantum fieri potest, quod fit dividendo Numeratorem per Denominatorem, quando nempe hic non est altior illo. Quo facto habebitur et quotiens integer et residua fractio, ubi Denominator est altior Numeratore, quae jam rursus tractanda, ut mox dicetur. Nunc si ponamus, Denominatorem esse formulam, quae nullas habeat radices aequales, dico Fractionem, quae superest, divelli posse in tot fractiones quot sunt radices, quarum fractionum quaelibet sit hujus formae $\frac{A}{x+B}$, ita ut A et B sint quantitates constantes. Atque adeo si detur figura, cujus abscissa existente x, ordinata sit aequalis dictae fractioni, figurae quadratura habebitur per Logarithmos veros, cum radices denominatoris sunt reales, vel per accedentes Logarithmos imaginarios, cum quaedam radices sunt imaginariae. Logarithmi autem veri coincidunt cum quadratura Hyperbolae, Logarithmi imaginarii primi gradus coincidunt cum quadratura Circuli. Sed quia dantur Logarithmi imaginarii infinitorum graduum altiorum, ut in Schediasmati Maji superioris*) specimine dato ostendimus, hinc etiam totidem dantur Quadraturarum gradus, a quadraturis Circuli et Hyperbolae independentes, atque ita magna quaestio decisa est, quae hactenus in Analysi Transcendente negotium facessivit.

Ponamus denominatoris radices esse $x+b$, $x+c$, $x+d$, $x+e$, $x+f$ etc. totidem, quot in t sunt unitates, quas radices per compendium vocabimus l, m, n, p, q etc., patet

$$\frac{1}{x^t + \frac{\xi}{\pi}x^{t-1} + \frac{\mu}{\pi}x^{t-2} + \frac{\lambda}{\pi}x^{t-3} + \text{etc.}}$$

*) Es ist die vorhergehende Abhandlung.

idem fore quod $\frac{1}{lmnpq\,..}$; reperi autem per Regulam generalem satis pulchre procedentem, fore $\frac{1}{lmnp}$ idem quod est sequens summa

$$\frac{1}{c-b,\, d-b,\, e-b,\, l} + \frac{1}{b-c,\, d-c,\, e-c,\, m} + \frac{1}{b-d,\, c-d,\, e-d,\, n}$$

$+\frac{1}{b-e,\, c-e,\, d-e,\, p}$, idemque est in altioribus, nam lex generalis attendenti patet. Et ita generaliter fractio denominatoris compositi divelli potest in fractiones denominatoris simplicis.

Quodsi post divisionem initio factam in residuae fractionis numeratore mansisset indefinita, veluti si residua foret formula $\frac{\vartheta + \varrho x + \upsilon xx + \varphi x^3}{lmnp}$, divellatur in tot partes, quot sunt membra in numeratore, quae erunt $\frac{\vartheta}{lmnp} + \frac{\varrho x}{lmnp} + \frac{\upsilon xx}{lmnp} + \frac{\varphi x^3}{lmnp}$, ubi ut numeratores liberentur ab indefinito, reperimus (omissis constantibus ϱ, υ, φ) fore

$$\frac{x}{lmnp} = \frac{1}{mnp} - \frac{b}{lmnp}$$

$$\frac{xx}{lmnp} = \frac{1}{np} - \frac{b+c}{mnp} + \frac{bb}{lmnp}$$

$$\frac{x^3}{lmnp} = \frac{1}{p} - \frac{b+c+d}{np} + \frac{bb+cc+bc}{mnp} - \frac{b^3}{lmnp}.$$

His addamus adhuc unum exemplum, ut melius appareat Lex:

$$\frac{x^4}{lmnpq} = \frac{1}{q} - \frac{b+c+d+e}{pq} + \frac{\begin{matrix}bb+cc+dd\\ bc+bd+cd\end{matrix}}{npq} - \frac{\begin{matrix}+b^3+c^3\\ +bbc+bcc\end{matrix}}{mnpq} + \frac{b^4}{lmnpq}$$

Equidem diversae prodire possunt expressiones, prout mutatur ordo literarum l, m, n, p etc. aut constantium in ipsis quantitatum b, c, d, e etc. Sed si ipsae jam a numeratoribus indefinitis liberatae fractiones, ut $\frac{1}{pq}$, $\frac{1}{npq}$, $\frac{1}{mnpq}$ etc. aliaeve hujusmodi rursus resolvantur in fractiones denominatorem habentes simplicem, more jam praescripto, diversae illae viae tandem desinent in idem, poteruntque ita adhuc nova Theoremata perpulchra condi. Idem aliter sic consequemur: Esto fractio habens potentiam ipsius x in numeratore, et denominatorem compositum, velut $\frac{x^4}{lmnp}$, resolvemus primam fractionem in fractiones denominatorum simplicium, modo jam praescripto, et ita res hoc loco redit ad quatuor fractiones, quales $\frac{x^4}{l}$, $\frac{x^4}{m}$, $\frac{x^4}{n}$, $\frac{x^4}{p}$, omissis coefficientibus constantibus. Jam quando in numeratore est x vel ejus potentia quaevis, denominator autem est simplex, potest res reduci ad integros puros aut fractiones numeratoris constantis simul simplicisque denominatoris hoc modo:

$$\frac{x}{l} = 1 - \frac{b}{l}$$

$$\frac{xx}{l} = x - b + \frac{bb}{l}$$

$$\frac{x^3}{l} = xx - bx + bb - \frac{b^3}{l}$$

$$\frac{x^4}{l} = x^3 - bxx + bbx - b^3 + \frac{b^4}{l}.$$

Nunc supplendi sunt casus, quos in praecedenti Schediasmate non attigimus, quando nempe radices aequales caeteris admiscentur; ibi enim regulae propositae non quadrant. Neque etiam soli Logarithmi aut quasi-Logarithmi occurrunt, sed interveniunt etiam Hyperboloidum quadraturae, quales sunt, quorum ordinatae sunt xx, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$ etc. Tales autem Hyperboloides omnes quadraturam ordinariam recipere constat. Sed ut hae quadraturae diversi generis ex se invicem evolvantur, ponamus $h = x + a$, et sit fractio $\frac{1}{h^4lmnp}$, haec per regulam praescriptam resolvi potest in totidem tales $\frac{1}{h^4l}$, $\frac{1}{h^4m}$, $\frac{1}{h^4n}$, $\frac{1}{h^4p}$. Dico quamvis harum rursus resolvi tali modo, ut posito $\omega = l - h$, id est $\omega = b - a$ constante (quoniam $h = x + a$, et $l = x + b$, unde $l - h = b - a$), fiat

$$\frac{1}{h^4l} = \frac{1}{\omega h^4} - \frac{1}{\omega\omega h^3} + \frac{1}{\omega^3h^2} - \frac{1}{\omega^4h} + \frac{1}{\omega^4l}.$$

eodemque modo habebitur et $\frac{1}{h^4m}$, tantum pro l ponendo m, et pro $l - h = \omega = b - a$ constante, ponendo constantem $m - h = c - a$, idemque est in caeteris.

Quid si diversae simul occurrant Radices aequales? Veluti si sit fractio $\frac{1}{h^4l^3mnp}$, patet eam produci ex his duabus $\frac{1}{h^4l^3}$ et

$\frac{1}{mnp}$. Dico priorem resolvi posse in fractiones constantes ex unius tantum speciei radicibus aequalibus, quae fractiones si singulae deinde multiplicentur per $\frac{1}{mnp}$, habebimus totidem novas fractiones similes huic $\frac{1}{h^4lmnp}$, quas jam resolvere docuimus. Superest ergo, ut resolvamus fractionem, qualis $\frac{1}{h^4l^3}$; dico, posito $b - a = \omega$ et $a - b = \psi$, fore

$$\frac{1}{h^4l^3} = \begin{cases} \frac{1}{\omega^3h^4} - \frac{3}{\omega^4h^3} + \frac{6}{\omega^5hh} - \frac{10}{\omega^6h} \\ \frac{1}{\psi^4l^3} - \frac{4}{\psi^5ll} + \frac{10}{\psi^6l} \end{cases}$$

Sed operae pretium est adscribere Theorema generale, quia hic Lex non aeque facile ac in prioribus de exemplorum inspectione fabricari potest. Nempe posito t et v esse numeros constantes rationales integros, dico fore

$$\frac{1}{h^tl^v} = \begin{cases} \frac{1}{\omega^v h^t} - \frac{\frac{v}{1}}{\omega^{v+1} h^{t-1}} + \frac{\frac{v.v+1}{1.2}}{\omega^{v+2} h^{t-2}} - \frac{\frac{v.v.+1.v+2}{1.2.3}}{\omega^{v+3} h^{t-3}} + \text{etc. usq. ad } \frac{\frac{\ldots}{\ldots}}{\ldots h^1} \\ \frac{1}{\psi^t l^v} - \frac{\frac{t}{1}}{\psi^{t+1} l^{v-1}} + \frac{\frac{t.t+1}{1.2}}{\psi^{t+2} l^{v-2}} - \frac{\frac{t.t+1.t+2}{1.2.3}}{\psi^{t+3} l^{v-3}} + \text{etc. usq. ad } \frac{\frac{\ldots}{\ldots}}{\ldots l^1} \end{cases}$$

Hinc si verb. gr. v esset 1 seu $l^v = 1$, retineretur solum terminus $\frac{1}{\psi^tl^v}$, sequentibus in quibus l alias occurreret omissis. Quodsi tres vel plures species radicum aequalium concurrerent, nihilominus patet ex praescripta jam methodo, omnia ad fractiones unius tantum literae indeterminatae, quae hoc loco sunt simplicissimae, reduci posse. Esto enim $\frac{1}{h^5l^4m^3}$, patet produci ex $\frac{1}{h^5l^4}$ per $\frac{1}{m^3}$. Jam $\frac{1}{h^5l^4}$ resolvatur in fractiones simplices more praescripto. Harum quaelibet ducatur in $\frac{1}{m^3}$, habebuntur totidem fractiones, quae non nisi binas babebunt species radicum; has autem posse resolvi in simplices, jam est ostensum. Reducuntur ergo binae species ad