occasione curvae elasticae a Viro Clarissimo feliciter inventam et ipsa ejus evolutione exhibitam, qua me invitare videtur, ut meam quoque solutionem prodam. Fecissem multo ante, si satis vacare liceret his laboribus. Jam enim ante complures annos habui, et quidem paulo post Isochronam simplicem inventam, quando et publice proposui quaerendam hanc paracentricam paulo difficiliorem. Sed plerumque viam reperisse contentus, prosecutione abstinere cogor, adeo ut ad ipsius Catenariae constructionem vix demum, diu post repertam ejus analysin, me accinxerim, cum scilicet amici urgerent. Apparebit autem, meum processum non tam ab eo, quod feliciter extrinsecus oblatum est, quam ex ipsius rei natura statim per se provenisse. Et quamquam adeo non improbem constructionem datam, ut laudem potius, quippe quae ad rem difficilem *Autori* aditum dedit, nec iis assentiar, qui peccatum dicunt, composito magis modo praestari, quod potest simpliciore, neque enim peccatum est, quod perfectissimum non est: cum tamen mihi sese obtulerit constructio satis expedita per rectificationem curvae ordinariae, hanc velut toto genere simpliciorem illa, quam Vir Cl. dedit, paucis designare volui. Nam ipse curvam quandam construit quadratura seu dimensione ejus figurae, cujus ordinata est $axx : \sqrt{a^4 - x^4}$, et hujus quadratricis transcendentis (quam ob usum Elasticam vocat) rursus dimensionem adhibet, ut solvatur problema quaesitum, atque ita curvam a me propositam efficit per solutionem transcendentalem secundi generis. Sed cum curva sit ipsamet nonnisi generis primi, quia tantum ad ejus constructionem requiritur quadratura figurae, cujus ordinata est $\sqrt{a^4 - x^4} : a$, ideo lineam quoque quaesivi algebraicam, cujus rectificatione quaesitum commode praestaretur. Quomodo autem hae duae quadraturae conicis dimensionibus respondeant, alias ostendam. Adest enim peculiaris pro talibus analysis. Sane, si quadranda esset figura ordinatarum $\sqrt{a^4 + x^4}$ (quae signo tantum a dicta differt), per extensionem curvae hyperbolicae res praestaretur. Sed nunc ad propriam constructionem problematis propositi progrediamur.

Quaeritur, qualis sit (fig. 147) linea *Isochrona paracentrica* ${}_1C_2C_3C$, in qua moto gravi, quod descendit ex altitudine H, accessus et recessus respectu centri cujusdam A seu puncti fixi sit aequabilis, adeoque elementa distantiarum ab A sint elementis temporum proportionalia. Distantiae AC repraesentent tempora t; ex ${}_1C$ agatur ${}_1C_1\vartheta$ normalis ad A_2C, erunt ${}_1\vartheta_2C$ ut elementa tem-

porum dt. Arcus curvae appellentur c, elementa eorum dc tamquam elementa spatiorum, quae grave percurrendo absolvit. Sunt autem (ex generalissima motus lege) *elementa spatiorum in ratione composita velocitatum et temporis elementorum.* Velocitas vocetur *v*. Hinc dc $\overset{(1)}{\text{ut}}$ vdt. Distantia inter horizontes punctorum H et A seu HA vocetur *a*. Porro ex lege motus gravium, velocitates sunt in duplicata ratione altitudinum HB. Sit AB, x, et HB erit $a + x$ (nam *varietates signorum* pro talibus in ipso literae valore comprehendo, nec in calculo moror, cum omnia eodem modo proveniant), fiet vv $\overset{(2)}{\text{ut}}$ $a + x$, et per (1) et (2) fit dc ut $dt\sqrt{a + x}$, seu ad implendam legem homogeneorum $dc \overset{(3)}{=} dt\sqrt{aa + ax} : a$. Jam centro A, radio si placet AH describatur circulus AKM, axem AB secans in K, et AC in M. Et Arcus KM (qui vocabitur *m*) repraesentet angulum conversionis rectae AMC circa A; itaque M_2M seu dm erit ipsius arcus circuli sive motus angularis seu vertiginis elementum. Itaque fit ${}_1C_1\vartheta = tdm : a$. Est autem quadr. ${}_1C_2C$ aequ. quadr. ${}_2C_1\vartheta$ + quadr. ${}_1\vartheta_1C$; ergo $dcdc \overset{(4)}{=} dtdt + ttdmdm : aa \overset{(5)}{=}$ (per aequ. 3) $dtdt + xdtdt : a$. Ergo $dt : t \overset{(6)}{=} dm : \sqrt{ax}$. Ex M ad axem agatur normalis ML, et AL vocetur z, fiet $ax \overset{(7)}{=} zt$, nempe ob triangula similia ALM, ABC. Et per (6) et (7) fit $dt : \sqrt{at} \overset{(8)}{=} dm : \sqrt{az}$. Jam ex proprietate tangentium circuli est dm ad dz $\overset{(9)}{\text{ut}}$ a ad $\sqrt{aa - zz}$, id est, ut AM ad ML, radius ad sinum anguli KAM. Et ex (8) et (9) fiet $dt : \sqrt{at} \overset{(10)}{=} adz : \sqrt{a^3z - az^3}$, unde summando $2\sqrt{at} = aa\int, dz : \sqrt{a^3z - az^3} + b$, ubi *b* est quantitas *constans pro arbitrio assumta.* Id enim licet inter summandum, quoties non vetamur Problematis conditionibus. Quod cum non satis observari videam, monere hoc loco volui, quoniam interest ad *solutionum generalitatem.* Nam infinitae satisfaciunt curvae, iisdem manentibus punctis H et A, sed quae variari possunt pro variata recta *b*, adeo ut curva quaesita (quantum judico) reperiri possit, quae transeat per punctum datum. Nunc superest absolvenda quadratura $\int, dz : \sqrt{a^3z - az^3}$, id est (si AN sit media proportionalis inter AL et AK), invenienda est area figurae, cujus ordinata sit ad AH ut quadratum ab AH ad rectangulum sub AN et LM.

Hanc quadraturam ita efficiemus: In HK sumatur LW aequalis ipsi EK diagonali quadrati ab AH vel AE, et juncta MW, sumatur $A\beta$ in AK, si opus producta, quae sit ad AN in duplicata ratione MW ad WL seu EK. Et ipsis $A\beta$ ordinatim ad angulos rectos applicentur $\beta\gamma$, quae sint ad LM (respondentes) ut rectangulum NAL ad quadratum ab EK. Et per puncta γ describatur linea $A\gamma$, cujus extensione in rectum habebitur quadratura paulo ante dicta. Nempe triplum rectanguli sub curva $A\gamma$ et recta AH, demto quintuplo dimidii rectanguli sub AN et LM $(=\frac{5}{2}\sqrt{a^3z-az^3})$ dabit figurae supradictae ab A incipiendo sumtae (cujus ordinatae sint reciproce proportionales dictis rectangulis sub AN et LM) aream, quam applicando ad *a* prodibit recta $aa\int, dz : \sqrt{a^3z-az^3}$. Haec recta sumatur cum recta constante *b* (signis tamen, prout casus postulant, variatis), provenientis dimidium vocetur *p*. Ergo per aequ. 10 fit $\sqrt{at}=p$ seu $t \overset{(11)}{=} pp:a$. Et cum *p* habeatur ex *z* et *a*, habebitur ex illis et *t* seu AC. Ergo et *x* seu AB per aequ. 7. Cum ergo ex assumta AL seu z quacunque habeatur AB magnitudine, adeoque et positione, at AC magnitudine; habebitur AC etiam positione, seu dabitur punctum C. Nam centro A, radio AC magnitudine dato describatur circulus, cui ex B normaliter ad AB educta occurret in puncto C, quod est in curva Isochrona paracentrica quaesita. Delineationes variabunt pro casibus, quam in rem et *b* assumta variari debet. Nam quod arbitratur Vir Clarissimus, non nisi unam lineam quaesitam dari ad idem punctum A et ad eandem altitudinem H, id rogo, ut denuo expendat: mihi enim visum est infinitas haberi posse, ita ut assignari regulariter queat, quae per datum punctum transeat, exceptis punctis horizontalis rectae transeuntis per A. Quin et supra A talis linea intelligi potest. Tantum vero ipsius acumini et profundae harum rerum notitiae tribuo, ut quod re rite expensa meisque rationibus consideratis, secunda meditatione statuet, plurimum apud me ponderis sit habiturum.

Interim quemadmodum *rationem* universalem hic aperui, *per quam solutiones Problematum differentialium redduntur generales*, quae neglecta, ni fallor, obstitit, quominus Vir Clarissimus hic omnes lineas quaesito satisfacientes complecteretur: ita dabo *modum Mechanicum* quidem, sed tamen ob universalitatem et praxeos commoditatem non contemnendum, cujus ope *quaecunque lineae quaesitae transcendentes differentialiter datae per punctum datum*

(quando id fieri potest) duci possunt, idque tamen exacte, quam quis volet, licet non ut *Geometricus* supra declaratus (exemplo lineae sinuum) per puncta vera, sed tantum per veris proxima incedat. Habetque hunc usum, ut de linearum possibilitate, forma et natura multa etiam ante veram solutionem cognoscere possimus. Quin et ad differentio-differentiales cujuscunque gradus applicari potest. Nempe in exemplo praesente datum sit punctum ${}_1C$, per quod ducenda linea Isochrona paracentrica CC, in qua grave lapsum ex altitudine H aequabiliter recedat a centro A; quaeritur punctum aliquod aliud proximum ${}_2C$, ita ut recta ${}_1C_2C$ sit latus polygoni, curvae succedanei. Praeter rectam A_1M, in quam (si opus productam) incidit ${}_1C$, ducatur alia, quantum satis vicina A_2M (ad eas partes, ad quas ducere volumus lineam CC) et ad A_2M agatur ex ${}_1C$ perpendicularis ${}_1C_1\vartheta$. Et in $A_1\vartheta$ (si opus producta) sumatur (ad eas partes, ad quas ducitur linea ${}_1C_2C$) recta ipsi AH aequalis ${}_1\vartheta_1P$; unde perpendiculariter educatur ${}_1P_1Q$ (ad easdem quas dixi partes). Bisecta AB in ω, centro ω, radio ωH descriptus circuli arcus secet AE si opus productam in R, seu brevius, quaeratur AR media proportionalis inter AH et HB. Denique centro ${}_1C$ radio aequali ipsi AR descriptus arcus circuli secet ${}_1P_1Q$, in ${}_1Q$, et juncta ${}_1C_1Q$, secabit ipsam A_2M si opus productam in puncto quaesito ${}_2C$. Eodemque modo ex puncto ${}_2C$ quaeretur ${}_3C$, et ita porro. Et sic habebitur polygonum ${}_1C_2C_3C$ etc. lineae quaesitae succedaneum, seu *linea Mechanica Geometrica vicaria*, simulque manifeste cognoscimus, possibilem esse Geometricam per datum punctum ${}_1C$ transeuntem, cum sit limes, in quem tandem polygona continue advergentia evanescunt. Ita simul et seriem quantitatum ordinariarum habemus transcendenti quaesitae advergentem.

Quae ad tangentium conversam de caetero meditati sumus, alio loco, Deo volente, proferemus; multa enim diversissima itinera non sine successu exploravimus, tametsi prosequi satis non vacet. Pro radicibus aequationum omnino dari puto methodum generalem, neque imaginarias moramur. Itaque quod inde colligit Vir Doctissimus, hactenus probo, ne miremur, si in Transcendentibus intra paucissimos annos non omne praestitum est quod vellemus, quando in ipsa Analysi ordinaria seu algebraica circa radices aequationum seu valores incognitarum analyticos nemo gradum quarto altiorem absolvit, nec *Vieta* vel *Cartesius* in eo negotio quicquam majorum inventis adjecerunt.

Postremo ne disceptatiunculae pristinae inter nos circa numerum radicum osculationis, monitorumque Viri Clarissimi plane obliviscar. Equidem quod initio scripseram, cum materiam hanc Geometris proponerem, adhuc mihi verum videtur, quando scilicet circulus lineam osculatur, duos contactus seu quatuor intersectiones in unum abire, adeoque adesse quatuor radices aequales. Interim verum quoque est, si quis modo circulum reperiat lineae in tribus punctis coeuntibus occurrentem, habere osculantem. Nam quartum punctum eo ipso adest, etsi ejus non fiat mentio. Cujus rei ratio est, quod nunquam circulus lineam ad easdem partes cavam secat in tribus punctis, quin simul secet in quarto. Si vero circulus lineam secet in tribus tantum punctis, oportet in arcum lineae, in punctis interceptum, cadere punctum flexus contrarii. Et tamen nihilominus in ipsomet puncto flexus possumus pro osculante concipere quatuor intersectionum coincidentiam, seu duos ab eodem latere curvae contactus circulares, unum ante, alterum post punctum flexus, seu unum in concava, alterum in convexa parte arcus ex duabus partibus hujusmodi compositi, qui contactus continue convergentes tandem in ipso flexu coibunt. Et revera flexus contrarius est punctum extremum commune, in quo duae lineae, una concava, altera convexa (unam totam constituentes) se tangunt. Coincidunt ergo duo contactus seu quatuor intersectiones in omni osculo. Sed si de intersectionibus rectae cum linea quaeratur, tria tantum puncta intersectionum coincidentia, vel contactum cum intersectione coeuntem, nempe in ipso puncto flexus, non vero duos contactus, concipere licet.

XVII.

NOTATIUNCULA AD CONSTRUCTIONES LINEAE, IN QUA SACOMA, AEQUILIBRIUM CUM PONDERE MOTO FACIENS, INCEDERE DEBET, MENSE FEBR. ANNI 1695 IN ACTIS DATAS, ET QUAEDAM DE QUADRATURIS. *)

Jucundissimum fuit solutionem Dn. Marchionis Hospitalii egregiam problematis elegantis et utilis, tum Additiones ingeniosissimi

*) Act. Erudit. Lips. an. 1695. — Die vorstehende Notiz bezieht sich auf das von dem Marquis de l'Hospital im Jahre 1695 vorgelegte und gelöste Problem: Sit (fig. 148) pons sublicius AB convertibilis circa axem A, sitque trochleae C circumductus funis BCM, cujus una extremitas sustinet pontem, altera pondus vel sacoma M. Quaeritur qualis debeat esse curva CMN aut LMN, sic ut ubicunque existens pontus M in curva, semper aequilibrium faciat cum ponte AB. Dasselbe wurde von Johann und Jacob Bernoulli ebenfalls gelöst, und zwar von dem ersteren in der folgenden allgemeineren Form: Data in plano verticali curva quavis AB (fig. 149), quaeritur in eodem plano altera curva LM, ita ut duo pondera data B, M communi funiculo BCM, trochleam positione datam C ambienti, alligata et curvis ubicunque imposita, semper sibi mutuo aequilibrentur, vel quod tantundem est, minima vi moveri possint.

Dn. Joh. Bernoullii videre, quibus solutionem universaliorem et constructionem faciliorem reddit, meritoque rem notatu dignam censet, quod idem hic et per differentiales et per methodum Geometriae communis obtinetur. Cujus rei complura exempla et mihi occurrerunt. Et sane in concreto saepe ostenduntur rerum origines connexionesque, in abstractis terminis non aeque apparentes. Consideratio autem centri gravitatis jam ipsa per se compendium differentialium seu summationem involvit, unde mirum non est, si per eam differentiales resuantur. Quod ut clarius appareat, ostendam, quomodo brevissima illa constructio etiam ex differentialibus statim et recta via sine interventu centri gravitatis nascatur. Nempe ex natura aequilibrii, quod semper manere supponitur, patet debere (fig. 149) pondus M ductum in elementum ipsius IP, aequari ponderi B ducto in elementum ipsius IH: ita enim non plus descendetur quam ascendetur, seu erunt elementa descensuum vel ascensuum reciproce ut pondera. Quia ergo M in dIP aequal. B in dIH, erit summando M in IP aequ. B in IH, seu M ad B ut IH ad IP, prorsus ut Bernoulliana constructio habet. Si intelligatur ipsa trochlea C non fixa manere, sed lineam durante motu ponderum et sacomatum (nam vicissim sibi sunt pondus vel sacoma) describere, eadem tamen methodus locum habebit, quemadmodum et in aliis similibus. Pulcherrimum autem est, quod notat, lineam a *Dn. Marchione Hospitalio* praescriptam ex genere Epicycloidum esse.

Quod vero observat, summationem ordinatarum, quae sunt ut $\sqrt{a^4 + x^4}$, pendere ex dimensione curvae parabolae cubicae, etiam *Dn. Marchio* me monuerat. Visus autem mihi sum, cum ista sub manibus haberem, connexionem videre cum dimensione curvae Hyperbolicae, sed talia nunc resumere non licet, quae aliquando curatius tractare spero.

De caetero video doctissimum *Dn. Joh. Bernoullium* non probare, quod *Dn. Craigius* tacite supposuit in tractatu de Quadraturis *), quantitatem irrationalem habere summatricem etiam irrationalem similem. Et fateor hoc sine demonstratione illic fuisse positum, sed quoniam mihi methodo simili nonnihil, universaliore tamen ni fallor et breviore, talia tractanti *principium* innotuit, nondum quod sciam in hoc argumento consideratum, unde demonstratio ad rem pertinens haberi potest, proponere hoc loco placet. Dico igitur terminum summandum et terminum summatorem, vel quod eodem redit, differentiam et terminum differentiandum (*Dn. Bernoullii* integralem vocant) habere easdem ambiguitates seu radicum varietates, cum quaevis radix termini det propriam seriem, suas quoque proprias differentias habentem. Et proinde si sit y differentia vel summandus, et v summa vel differentiandus, seu si sit $\int y dx = v$, sequitur in aequatione, quae exprimit relationem inter y et x, et in aequatione quae exprimit eam inter v et x, ipsas y et v ascendere ad easdem dimensiones. Sequitur etiam irrationalitates se simili modo habere, quippe quibus itidem varietas radicum indicatur. Certe *Cl. Craigius* non pauca attulit egregia, quae faciunt, ut incrementa adhuc majora his scientiis ab eo sperem, multumque ejus ingenuitati debeo, quod meis meditationibus aliquid debere voluit. Si consilium ejus scivissem, potuissem fortasse aliqua ad methodi incrementum suppeditare. Utinam tantum illis abstinuisset, quae acerbe in Virum excellentis ingenii et doctrinae dixit, cui, quae ipse innuit, imputare mihi nunquam in mentem venit.

XVIII.

RESPONSIO AD NONNULLAS DIFFICULTATES A DN. BERNARDO NIEWENTIIT CIRCA METHODUM DIFFERENTIALEM SEU INFINITESIMALEM MOTAS. **)

Egregii Geometrae Batavi, *Domini Bernardi Niewentiit*, tractatus duos novas circa calculum differentialem et Analysin infinite

*) Tractatus Mathematicus de Figurarum curvilinearum quadraturis, et locis geometricis. Autore Joh. Craige. Londini 1693.

**) Act. Erudit. Lips. an. 1695.

parvis utentem *), nuper missu alterius, ut apparet, doctissimi Geometrae *Dn. J. Makreel*, autoris jussu accepi. Itaque cum a me pluribus in locis difficultatum quarundam solutio humanissime petatur, operam reipublicae literariae debitam defugere nolui, tametsi summa tantum capita attingere tot aliis distractus nunc quidem possim. Ad tria potissimum res redit: *methodum meam calculi differentialis et summatorii laborare communi cum aliis difficultate, quod scilicet quantitates infinite parvae abjiciantur, quasi essent nihil*; secundo, *hanc methodum non posse applicari ad curvas, in quarum aequatione indeterminata ingreditur exponentem*; tertio, *tametsi meus calculus differentialis primi gradus sustineri possit, differentias tamen inferiores, secundi, tertii et aliorum graduum, ut ddx seu d^2x, dddx sive d^3x, et ita porro, non posse conciliari cum principio clarissimi Autoris*, quo tamen solo Geometriam hanc statuminari posse arbitratur. Specialia nonnulla, quae Hospitalianis, Bernoullianis et meis objecit, nunc non attingo, cum illustrissimus *Marchio Hospitalius* et ingeniosissimi *Fratres Bernoullii* tot praeclara inventa sua optime tueri possint.

Quod ad primam objectionem attinet, clarissimus Autor hanc in praefatione Considerationum ponit enunciationem, quam liquidissimae veritatis esse autumat: *Solae eae quantitates aequales sunt, quarum differentia nulla est seu nihilo aequalis*. Et in Analysi curvilineorum, sub initium axiom. 1 pag. 2: *Quicquid toties sumi, hoc est per tantum numerum* (etiam infinitum, sic enim intelligit) *multiplicari non potest, ut datam ullam quantitatem, utut exiguam, magnitudine sua aequare valeat, quantitas non est, sed in re Geometrica merum nihil.* Hinc quia in aequationibus pro tangentibus investigandis, Maximisque et Minimis (quam Dn. Autor Barrovio tribuit, primus tamen, ni fallor, Fermatius usurpavit) remanent quantitates infinite parvae, abjiciuntur autem earum quadrata vel rectangula; hujus rei rationem ex eo ducit, quod quantitates ipsae infinite parvae seu infinitesimae sunt aliquid, quoniam per numerum infinitum multiplicatae quantitatem datam (id est, ordinariam vel assignabilem) efficiunt; secus autem se habere earum rectangula vel quadrata, quae proinde ex axiomate praemisso sint me-

*) Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia. Amstelod. 1694. 8. — Analysis infinitorum. Amstelod. 1695. 4.

rum nihil. Ego quidem fateor magni me eorum diligentiam facere, qui accurate omnia ad prima principia usque demonstrare contendunt et in talibus quoque studium non raro posuisse; non tamen suadere, ut nimia scrupulositate arti inveniendi obex ponatur, aut tali praetextu optime inventa rejiciamus, nosque ipsos eorum fructu privemus, quod et olim Patri *Gottignies* et discipulis ejus circa Algebrae principia scrupulosis inculcavi. Caeterum aequalia esse puto, non tantum quorum differentia est omnino nulla, sed et quorum differentia est incomparabiliter parva; et licet ea Nihil omnino dici non debeat, non tamen est quantitas comparabilis cum ipsis, quorum est differentia. Quemadmodum si lineae punctum alterius lineae addas, vel superficiei lineam, quantitatem non auges. Idem est, si lineam quidem lineae addas, sed incomparabiliter minorem. Nec ulla constructione tale augmentum exhiberi potest. Scilicet eas tantum homogeneas quantitates comparabiles esse, cum Euclide lib. 5 defin. 5 censeo, quarum una numero, sed finito multiplicata, alteram superare potest. Et quae tali quantitate non differunt, aequalia esse statuo, quod etiam Archimedes sumsit, aliique post ipsum omnes. Et hoc ipsum est, quod dicitur differentiam esse data quavis minorem. Et Archimedeo quidem processu res semper deductione ad absurdum confirmari potest. Quoniam tamen methodus directa brevior est ad intelligendum et utilior ad inveniendum, sufficit cognita semel reducendi via postea methodum adhiberi, in qua incomparabiliter minora negliguntur, quae sane et ipsa secum fert demonstrationem suam secundum lemmata a me Febr. 1689 communicata. Et si quis talem aequalitatis definitionem rejicit, de nomine disputat. Sufficit enim intelligibilem esse et ad inveniendum utilem, cum ea, quae alia magis (in speciem) rigorosa methodo inveniri possunt, hac methodo semper non minus accurate prodire sit necesse. Itaque non tantum lineas infinite parvas, ut dx, dy, pro quantitatibus veris in suo genere assumo, sed et earum quadrata vel rectangula dxdx, dydy, dxdy, idemque de cubis aliisque altioribus sentio, praesertim cum eas ad ratiocinandum inveniendumque utiles reperiam. Nec profecto video, quomodo doctissimus Autor in animum suum inducere potuerit, ut statueret, lineam seu latus dx esse quantitatem, at quadratum vel rectangulum talium linearum esse nihil. Licet enim hae quantitates infinities infinite parvae, numero infinito primi gradus multiplicatae, non producant quantitatem datam seu ordinariam, faciunt

tamen hoc multiplicatae per numerum infinities infinitum, quem rejicere par non est, si numerum infinitum admittas; prodibit enim numero infinito primi gradus ducto in se. Quod autem in aequationibus Fermatianis abjiciuntur termini, quos ingrediuntur talia quadrata vel rectangula, non vero illi quos ingrediuntur simplices lineae infinitesimae, ejus ratio non est, quod hae sint aliquid, illae vero sint nihil, sed quod termini ordinarii per se destruuntur, hinc restant tum termini, quos ingrediuntur lineae simplices infinite parvae, tum quos ingrediuntur harum quadrata vel rectangula: cum vero hi termini sint illis incomparabiliter minores, abjiciuntur. Quod si termini ordinarii non evanuissent, etiam termini infinitesimarum linearum non minus, quam ab his quadratorum abjici debuissent. Adjungi possunt Lemmata quaedam mea, calculi differentialis fundamentis inservientia, ex Actis Eruditorum Lipsiensibus Febr. 1689, quae Cl. Autor non nisi post editas Considerationes in praefatione Tractatus Analytici sibi occurrisse profitetur, ubi jam tum incomparabilium considerationem adhibui ad has difficultates praeveniendas.

Quod ad secundum attinet, doctissimus Vir aequationes exponentiales (ut a me appellantur) sua methodo tractari posse putat, mea non item. Idque tali ratione cap. 1 Analys. pag. 62 seqq. et cap. 8 pag. 280 per suam calculandi rationem ostendere conatur, quam tamen usitatis mihi symbolis ratiociniisque sic exprimo. Sit aequatio (ad curvam transcendentem) $y^x \overset{(1)}{=} z$, unde alia pari jure fiet $\overline{y+dy}^{\,x+dx} \overset{(2)}{=} z + dz$. Itaque differentiando aequationem (1), id est aequationem (1) ab aequ. (2) subtrahendo, ut dz seu differentia inter duorum z valores (ipsius nempe z et ipsius $z + dz$) habeatur (quod calculi differentialis fundamentum est), utique ex (2) et (1) fiet $\overline{y+dy}^{\,x+dx} - y^x \overset{(3)}{=} dz$, sed $\overline{y+dy}^{\,x+dx} \overset{(4)}{=} y^{x+dx} + x \cdot y^{x+dx-1}\,dy$ (quia ut olim in his Actis a me generaliter notatum est $\boxed{m}\,\overline{y+a} \overset{(5)}{=} y^m + \frac{m}{1} y^{m-1} a^1 + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} y^{m-2} a^2$ etc.; unde ex sententia Autoris, evanescente termino $\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}\,{}^{-2} a^2$ et sequentibus, quia *a* est infinities infinite parva, et pro *a* substituendo dy, et pro litera *m* substituenda $x + dx$ prodit aequ. (4). Itaque ex aequ. (3) per aequ. (4) fit $y^{x+dx} + xy^{x+dx-1}\,dy - y^x \overset{(6)}{=} dz$. Verum haec ratio exprimendi maximis laborat difficultatiqus, quia non servat leges homogeneorum calculi differentialis, et quod caput est, non exhibet quaesitum, nempe rationem dx ad dy seu subtangentialis ad ordinatam, in terminis ordinariis expressam, neque adeo ductu linearum assignabilium construi potest. Imo redit ad identicum. Nam juxta principium meum supra expositum, quantitas incomparabiliter minor alteri majori frustra additur, et, si haec non evanescat (actu vel virtualiter), ipsamet abjici debet. Itaque in aequ. (6) pro dy, dx, dz additis ad alia incomparabiliter majora, scribendo 0, fiet $y^{\overline{x+0}} + x \,.\, y^{\overline{x+0-1}}\, 0 - y^x = 0$,[7] hoc est abjecto 0 pariter, et termino per 0 multiplicato, fiet $y^x - y^x = 0$, quae aequatio vera quidem, sed identica est, unde talis calculus non prodest. Quale quid ego quoque expertus sum, ut si sit $b^x = y$, posita *b* constante, tunc $b^{\overline{x+dx}} - b^x$ erit $= dy$; et hanc dividendo per b^x fit $b^{\overline{dx}} - 1 = dy : b^x$, et pro dx et dy ponendo 0, fit $b^0 - 1 = 0 : b^x$, seu $b^0 - 1 = 0$, seu $b^0 = 1$, ut constat, ergo fit $1 - 1 = 0$. Sed talis identicismus in meo calculo differentiali evitatur. Interim non diffiteor obtulisse se mihi casus, ubi ista quoque calculandi ratio non prorsus negligenda sit. Verum ut videat Cl. Niewentiit meam methodum differentialem ad aequationes quoque, ubi incognita vel indeterminata ingreditur exponentem, (et quidem utiliter) porrigi, quas ego fortasse omnium primus considerandas Geometris proposui, cum meum Tetragonismum Circuli Numericum darem in Actis Eruditorum anni 1682 mens. Febr., attingam hoc loco paucis, quod jam a multis annis habui, et ad summum Geometram *Christianum Hugenium* dudum perscripsi, nempe modum differentiandi aequationes exponentiales, quem Algorithmo meo olim publicato inserere non admodum necesse erat ob talium expressionum raritatem et insolentiam, quae, fateor, tanta est, ut ipse *Hugenius* eas aegre admiserit. Nec quisquam mihi notus est praeter ingeniosissimum *Bernoullium*, qui proprio Marte, me non monente, et ipse in calculo differentiali huc pervenerit atque ad haec penetrarit, quae *Hugenius* per jocum hypertranscendentia appellabat. Nempe sit $x^v = y$, fiet $v. \log. x = \log. y$; jam $\log. x = \int, dx : x$ et $\log. y = \int, dy : y$. Ergo $v . \int, dx : x = \int, dy : y$, quam differentiando fit $v dx : x + dv \log. x = dy : y$. Porro v debet dari ex x et y, ambobus vel singulis, ergo scribi potest $dv = m dx + n dy$, et *m* pariter atque *n* dabuntur ex x et y et prodibit: $v dx : x + \log. x \,.\, m dx = dy : y - \log. x \,.\, n dy$, et fiet dx ad dy (seu subtang. ad ordi-

natam) ut y ad $\frac{v}{x} + m \log. y$. Itaque habetur modus ducendi tangentem talis curvae ex supposita hyperbolae quadratura vel Logarithmis; pro generali autem differentiatione exponentialium sufficit Algorithmo meo hunc canonem ascribi: $d, x^v = x^v, \frac{v}{x} dx + dv + dv. \log. x$. Unde si v sit constans numerus ut e, prodit $d, x^e = x^e \frac{e}{x} dx$, id est $e \,.\, x^{\overline{e-1}} dx$, quod est theorema nostri Algorithmi pro differentiatione potentiarum vel radicum dudum traditum.

Superest, ut tertiam Viri Cl. difficultatem paucis absolvam, contra differentiationes scilicet successivas seu quantitates differentio-differentiales. Itaque ipsas ddx non putat admittendas, nec esse quantitates, quia per infinitum numerum multiplicatae non dent quantitatem ordinariam. Sed sciendum est omnino eam prodire, ut ad primam difficultatem jam monui, si numerus multiplicans sit infinitus altioris gradus. Et res sane etiam aliunde multis modis confici potest. Nam quotiens termini non crescunt uniformiter, necesse est incrementa eorum rursus differentias habere, quae sunt utique differentiae differentiarum. Deinde concedit Cl. Autor, dx esse quantitatem; jam duabus quantitatibus tertia proportionalis utique est etiam quantitas; talis autem, respectu quantitatum x et dx, est quantitas ddx, quod sic ostendo. Sint x progressionis Geometricae, et y arithmeticae, erit dx ad constantem dy, ut x ad constantem *a*, seu $dx = x dy : a$; ergo $ddx = dx dy : a$. Unde tollendo $dy : a$ per aequationem priorem fit $x ddx = dx dx$, unde patet esse x ad dx, ut dx ad ddx. Et continuata progressione Geometrica etiam reliquae differentiae ulteriores ordine prodeunt. Et generaliter in progressione Geometrica non tantum series differentiarum ejusdem gradus, sed et series transitus seu differentiationum, Geometricae est progressionis. Sed et harum differentiationum successivarum veritas ususque rebus ipsis confirmatur. Nempe, ut jam alias notare memini, quantitas ordinaria, quantitas infinitesima prima seu differentialis, et quantitas differentio-differentialis vel infinitesima secunda, sese habent ut motus et celeritas et sollicitatio, quae est elementum celeritatis. Motu describitur linea, velocitate elementum lineae, sollicitatione (velut initio descensus a gravitate, vel motus a conatu centrifugo) elementum elementi. Et in ipsa Geometria quantitates ordinariae sunt pro vulgari Algebra, differentiales primi gradus referuntur ad tangentes seu linearum directiones, sed differentiales ulterioris gradus ad oscula seu linearum curvedines, quod etiam jam notare memini. Finiam, ubi hoc unum adjecero, mirari me, quomodo doctissimus Niewentiit credere potuerit, ex nostris principiis sequi hoc absurdum, quod in omni curva subtangentialis sit ordinatae aequalis, Consid. p. 19. Sit curvae elementum dc, erit $dxdx + dydy = dcdc$, ut constat; ergo differentiando $dxddx + dyddy = dcddc$. Si jam dc constans fit $ddc = 0$, et fit $dxddx + dyddy = 0$, sed hac differentiali in summatricem rursus versa, ait prodire $\frac{1}{2}\,dxdx = \frac{1}{2}\,dydy$, adeoque $dx = dy$, quod utique absurdum est. Si talibus uteremur calculis, quomodo eorum ope tot veritates detexissemus? Sed respondeo summando seu versa differentiali in summatricem, proditurum $\frac{1}{2}\,dxdx + \frac{1}{2}\,dydy - \beta dc = 0$, seu constantem areolam esse subtrahendam, alioqui fieret non quidem $dxdx = dydy$, sed potius $-\,dxdx = dydy$, seu $dy = dx\sqrt{-1}$, quae est aequatio impossibilis, quod indicat β non debere esse 0, sed habere signum $-$, et esse quantitatem constantem, quae non alia est, quam $\frac{1}{2}\,dc$, quia ipsam dc posuimus constantem. Unde redit aequatio initio posita $dxdx + dydy = dcdc$, prout oportet. Et simili abusu calculi differentialis laboratur Consid. p. 21; nec mirum est hoc modo calculum non esse tutum aut incidere in absurda. Sic et in ipso Tractatu majore seu Analys. inf. c. 8 p. 283 ponit triangula characteristica ejusdem curvae, modo numero sint finita et serie non interrupta sese consequantur, esse similia inter se; unde facile infert, positis elementis abscissarum aequalibus, etiam elementa ordinatarum etc. fore aequalia. Sed cum ubique curva directionis suae inclinationem mutet (alioqui non curva, sed recta foret) etiam anguli continue, licet insensibiliter seu per discrimina incomparabiliter parva mutantur. Qua de re me quoque olim ratiocinationes instituere memini. Difficultas quoque objecta Consid. p. 20 contra triangulum, cujus basis est altitudine incomparabiliter minor, ejusdem est commatis: id enim pro isoscele habetur, quia differentia inter altitudinem et hypotenusam incomparabiliter parva est, perinde ac differentia inter radium et secantem anguli infinite parvi. Sed haec sufficere judico, et ipsi Cl. Niewentiit satisfactura spero, qui si ingenium et doctrinam magis ad augenda, quam retractanda haec studia vertere volet, haud dubie praeclara dare poterit, quemadmodum ex his ipsis speciminibus judicare licet.

Additio ad hoc Schediasma.

Unum adhuc addere placet, ut omnis de realitate differentiarum cujuscunque gradus tollatur disputatio, posse eas semper exprimi rectis ordinariis proportionalibus. Nempe sit linea quaecunque, cujus ordinatae crescunt vel decrescunt, poterunt ad eundem axem in iisdem punctis applicari ordinatae secundae ad novam lineam terminatae, proportionales differentiis primi gradus seu elementis ordinatarum lineae primae. Quod si jam idem fiat pro secundis ordinatis, quod factum est pro primis, habebuntur ordinatae ad lineam tertiam, proportionales primarum ordinatarum differentio-differentialibus seu differentiis secundis, seu, quod idem est, secundarum ordinatarum differentiis primis. Et eodem modo etiam differentiae tertiae et aliae quaecunque per quantitates assignabiles exponi possunt. Modum autem differentiis primi gradus proportionales exhibendi rectas ordinarias jam tum explicui, cum primum hujus calculi elementa traderem in Actis Octobris 1684. Nempe inspiciatur ibi fig. 111, reperietur dx, elementum abscissae AX vel x, repraesentari per rectam assignabilem in figura separatim positam, et deinde dy, elementum ordinatae XY seu y, repraesentari per rectam quae sit ad dictam dx jam assignatam, ut XY ordinata est ad XD interceptam in axe inter tangentem et ordinatam. Et quoniam eadem opera habetur modus exponendi differentias gradus secundi per proportionales illis differentias gradus primi, et in universum posteriores per praecedentes proximas, patet nullum esse gradum differentialium utcunque remotum, qui non per rectas assignabiles exhiberi tandem queat. Quod si solae darentur differentiae primae, sequeretur omnes ordinatas crescere uniformiter, seu omnem lineam esse rectam. Interdum autem, continuando aliquousque differentiationes, tandem finiendum est, cum nimirum linea differentiarum repraesentatrix, secunda vel tertia vel alia ulterior, fit recta. Nempe si ordinatae primae sint ut abscissae, tunc linea prima est recta et caret differentiis secundis. Si ordinatae primae sint ad parabolam (nempe quadraticam) seu si sint ut quadrata abscissarum, tunc linea secunda erit recta, et linea prima (parabola scilicet) carebit differentiis tertiis. Si ordinatae primae sint ad paraboloeidem cubicam, seu sint ut cubi abscissarum, tunc linea tertia erit recta, et linea prima (paraboloeides scilicet cubica) carebit differentiis quartis, et ita porro. Idem est si ordinatae (primae scilicet) componantur ex ordinatis paraboloeidum dictis, sive per additionem sive per subtractionem; tunc enim finientur tandem differentiae cum altissimae paraboloeidis ingredientibus ordinatis. Sed in caeteris lineis omnibus differentiationes procedunt in infinitum, quoties scilicet in valore ordinatae abscissa in nominatore vel vinculo reperitur. Ex his jam intelligitur, calculum differentialem posse concipi tamquam si fieret non nisi in quantitatibus ordinariis, tametsi origo ex inassignabilibus petenda sit, ut abjectionum seu destructionum ratio reddatur. Itaque si vel ipsa initia calculi a me publicata satis meditatus fuisset Cl. Niewentiit, facile vidisset, non magis de ulterioribus quam de primis differentiis dubitari posse, et vel ideo evitatam tunc a me fuisse mentionem inassignabilium, re ad ordinarias traducta, ut tales scrupuli tollerentur; caeterum si quid notasset animadversione dignum, sensisset me eo esse ingenio, ut libenter dem veritati manus, quemadmodum nunc re accuratius considerata, ea quae Celeberrimus *Jacobus Bernoullius* de numero radicum osculi monuerat probo, quibus quo minus assentirer antea, non alia causa fuit, quam quod diversae occupationes cogitationesque effecerant, ut tardius accederem ad rem de integro satis considerandam. Dum haec scribo, tristem nuntium mortis Viri incomparabilis, *Christiani Hugenii,* accipio. Non poterant majorem jacturam pati literae illae sublimiores, quae humanae menti aditum faciunt in arcana naturae. Ego *Hugenium* solo tempore *Galilaeo* et *Cartesio* postpono. Cum maxima dederit, expectabantur non minora. Et spero inter schedas ejus thesaurum quendam repertum iri, qui nos utcunque soletur. Eoque magis orandus est Frater ejus, vir meritis in rempublicam illustris, ut maturata editione communi utilitati pariter ac fraternae gloriae, imo suae consulere velit. Oblitus eram eorum quae Dn. Niewentiit contra notam concavitatis vel convexitatis a me allatam objicit, instantia parabolae producta. Sed mirum est ipsum non animadvertisse, tantum errore sive scribentis sive typothetae transposita esse verba, et pro concavitate ponendam esse convexitatem, ac vice versa. Itaque non tam afferri debuerat instantia parabolae (quando in omnibus curvis contrarium fit ejus quod verba insinuabant) quam generaliter notari inversio. Adeoque regula sic efferenda est: si crescentibus ordinatis crescant etiam ipsarum differentiae, curva axi obvertet convexitatem, alias concavitatem, posito scilicet aequales inter se esse differentias abscissarum.

XIX.

G. G. LEIBNITII NOTATIUNCULA AD ACTA DECEMB. 1695, pag. 537 et seqq.*)

Iniquus sim, si agnoscam, excellentis Mathematici *Jacobi Bernoullii* Basileensium Professoris meditationibus plurimum debere scientias istas profundiores, et me potissimum ipsi pariter ac fratri ejus ingeniosissimo, *Johanni Bernoullio*, nunc apud Groninganos Professori clarissimo, obstrictum esse, quod qualiacunque a me jacta Analyseos cujusdam superioris fundamenta ad varios usus applicuere suisque inventis mirifice auxere, et ut magis magisque innotescerent ac celebrarentur effecere. Virum autem celeberrimum *Jacobum Bernoullium*, cujus nupera me ad hoc Schediasma invitavere, persuadere sibi velim, longissime a me abesse animum de meritissimis ejus laudibus detrahendi. Gloriam inventarum figurarum Elasticarum (ex hypothesi scilicet valde verisimili) ipsi illibatam relinquo. Theoremata de radiis circulorum osculantium, etsi mihi non ignota, ne attigissem quidem, nisi originem eorum pariter ac similium aliorum ex singulari quodam differentialis calculi genere simplicissimam exponendam occasione data putassem. Ut iis in Elasticis figuris uterer, in mentem non venit, quod figuris illis quaerendis nunquam animum adjecissem, non quod res non sit pulchra et inquisitu digna, sed quod in tanta agendorum copia, quae ab illo recte acta putavi, nollem denuo agere, incertus etiam, an possem. Itaque non est, cur imputet theorematum de osculis defectui, cum ipse agnoscat, etiam publicatis illis nondum vel *Hugenium* vel me de lineis illis Elasticis satis meditatos fuisse. Ac ne nunc quidem, exposita Analysi Viri egregii, a me impetrare possum, ut hunc campum licet pulcherrimum ingrediar, cujus rei plures habeo rationes, quam vellem. De caetero video, eum a mea de constructionibus sententia vix dissentire, optaremque ipsum, si vacat, ulterius cogitare de constructione transcendentium per puncta Algebraice inventa:

*) Act. Erudit. Lips. an. 1696. — Die vorstehende Notiz bezieht sich auf die Abhandlung Jacob Bernoulli's: Jac. B. explicationes, annotationes et additiones ad ea, quae in Actis super. anni (1695) de Curva Elastica, Isochrona Paracentrica et Velaria hinc inde memorata et partim controversa leguntur, ubi de Linea mediarum directionum, aliisque novis.

id enim magis analyticum fuerit, etsi non aeque sit in potestate hactenus, ac reductio quadraturarum ad Euthynses. De numero radicum osculi candide professus sum dudum, me re diligentius excussa sententiam ipsius amplecti. Quod instantiam a me postulat curvae ordinariae rectificabilis in se redeuntis, succurrit non Epicycloeidalis, quam punctum describit fixum in circulo provoluto super alio circulo. Hanc rectificabilem esse, a celeberrimis Viris, *Hugenio* et *Tschirnhausio* est ostensum; esse autem in se redeuntem, haec constructio ipsa monstrat, cum circumferentiae sunt commensurabiles. Praeclare facient *Bernoullii* Fratres, si conjunctis vel etiam separatis studiis velariae figurae contemplationem coeptam absolvant. Quod medias directiones attinet, de quibus ego in Ephemeridibus Gallicis Sept. 1693, cum tendentiae puncti mobilis sunt infinitae, puncta tendentiarum intervallulis aequalibus assumi arbitrarium putem. Diversis autem punctis tendentias exercentibus, ex punctorum progressibus habetur et progressus communis centri gravitatis, nempe conferendo ejus situm ante progressum cum situ proximo post progressum punctorum elementarem. Quod si punctorum impulsorum tendentias consideremus, quae saepe ab impellentium tendentia diversa est, tendentia media ab iis recepta eodem modo definietur. Eaque omnia pro re nata sunt varianda, sed in his promte eleganterque exhibendis a Viro clarissimo non vulgaria expecto, ac publico eum nomine rogandum censeo, ut sua de fluidorum motibus aliisque meletemata praeclara diutius non premat. Quod controversias attinet inter D. D. *Hugenium* et *Renaudum*, ingeniarium rei apud Gallos marinae generalem, ipse *Hugenius* (cujus certe summi viri amissi et ipse desiderium tanto fero aegrius, quanto propius mihi cum eo commercium erat, notioresque maximae dotes, in quibus vis animi candorque certabant) me sententiam rogare dignatus est; sed tunc nondum erant ad manus utrinque agitata. De re ipsa alias. Recte notatur, eundem ventum magis impellere navem quiescentem, quam procedentem, et discrimen aliquando non esse negligendum. Puto etiam, diversa venti vi, declinationem (la Dérive) secus quam *D. Renaudus* supposuit, non esse aequalem, sed eo majorem quo major est venti violentia. Modum generalem construendi tangentium inversas, mense Augusto superioris anni p. 373, ipse non nisi pro Mechanismo venditavi. Utilissima cogitatio est, de iisdem ad quadraturas redigendis separandisve ab invicem indeterminatis. Problema de eo praestando circa aequationem dif-

ferentialem $ady = ypdx + ly^n . qdx$ solvere possum et reduco ad aequationem, cujus forma est $\ldots dv + \ldots vdz + \ldots dz = 0$, ubi per puncta intelliguntur quantitates utcunque datae per z. Talis autem aequatio generaliter per me reducta est ad quadraturas, ratione jam dudum Amicis communicata, quam hic exponere necessarium non puto, contentus effecisse, ut acutissimus Autor problematis agnoscere possit methodum (ut opinor) non dissimilem suae. Neque enim dubito et hoc ipsi innotuisse. Et sunt a me in istis multa olim tentata, non pauca etiam praestita, quae jacent dispersa in schedis, nec mihi ipsi in numerato habentur, copia inopi, ut simul habere videar et non habere. Haec tamen facilius suppeditavit memoria, ea ipsa die qua Lipsiensia Acta Decembris proximi sum nactus, id est hesterna, in ipsis scilicet nundinis Brunsvicensibus, ubi haec inter distractiones utcunque in chartam conjeci.

XX.

COMMUNICATIO SUAE PARITER DUARUMQUE ALIENARUM AD EDENDUM SIBI PRIMUM A DN. JOH. BERNOULLIO, DEINDE A DN. MARCHIONE HOSPITALIO COMMUNICATARUM SOLUTIONUM PROBLEMATIS CURVAE CELERRIMI DESCENSUS A DN. JOH. BERNOULLIO GEOMETRIS PUBLICE PROPOSITI, UNA CUM SOLUTIONE SUA PROBLEMATIS ALTERIUS AB EODEM POSTEA PROPOSITI.*)

Problemata proponere Geometris dudum usitatum et publice utile est, cum non fit animo suos profectus jactandi, sed alienos excitandi, ut dum quisque methodos suas exercet, ars inveniendi augeatur. Saepe fit, ut viri eruditi quidem et in recepta Analysi versati, sed nihil altius agitantes, dum de iis quas didicere methodis nimium sibi pollicentur, vulgari doctrinae securi indormiant, magno scientiae detrimento: nam qui sibi persuadent nihil superesse, quod, si modo animum adhibere velint, non sit in potestate, nova non quaerunt, et suae simul desidiae et vanitati litant. Hi igitur non melius veterno suo excutiuntur, quam si problemata proponantur, elegantia vel utilia, praesertim si magis sint artificiosa

*) Act. Erudit. Lips. an. 1697.

quam laboriosa. Et puto ea re maxime factum fuisse, ut methodus infinitesimalis differentiarum et summarum (cujus calculum differentialem appellare placuit) a me proposita increbresceret et a viris egregiis in usum transferretur, quod appareret, problematibus insignibus solvendis aptissimam esse. Cum enim forte Dn. Abbati Catelano, nescio quae contra Dynamica mea opponenti et alioqui Cartesianis methodis nimirum tribuenti, in Novellis Reipublicae Literariae responderem, venit in mentem ipsi pariter aliisque eadem sentientibus proponere Problema (non admodum quidem difficile) Lineae Isochronae, in qua descendens grave uniformiter appropinquaret horizonti. Sed illis silentibus, solutionem dedit *Dn. Hugenius*, quod elegans ipsi quaestio videretur. Cumque alia consulto indicta reliquisset, haec ego suppleveram et demonstrationem adjeceram in Actis Eruditorum: idque magis feceram, ut problemati ultimam manum imponerem, quam ut aliquem magnopere fructum inde mihi pollicerer. Verum uti aliqua est rerum omnium concatenatio, fecit haec mea demonstratio, ut *Dn. Jacobus Bernoullius*, qui antea calculum differentialem, quem in Actis iisdem dudum communicaveram, minore fructu aspexerat, majorem inde lucem subito hauriret, et percepto methodi ad quaestiones Physico-mathematicas usu, problema Lineae Catenariae a Galilaeo frustra tentatum mihi proponeret. Quod cum ego reperissem, et publicata solutione possem qualicunque illa laude solus frui, malui tamen alios in partem venire, ut in excolenda pulcherrima methodo adjutores mihi pararem. Certum enim est, egregia ingenia laude duci solere, et libentius ea tractare, in quibus non omnia aliis, sed multum etiam sibi debent. Itaque significavi publice, me solutionem Galilaeo frustra quaesitam reperisse, editionem autem in annum differre constituisse, ut aliis spatium daretur vel suas excolendi methodos, vel nostram meditandi et rite adhibendi. Id vero feliciter successit. Nam *Dn. Hugenius* (quem nunc ereptum nobis dolemus) sua quadam methodo ad solutionem aliquam, licet (ut ipse postea ingenue agnovit) imperfectiorem pervenit. Sed *Dn. Jo. Bernoullius*, meo calculo profundius inspecto, ejus ope optatam solutionem obtinuit, problemate, quemadmodum et a me factum fuerat, ad Hyperbolae aream reducto, eo tantum discrimine, quod ipse per Curvae parabolicae rectificationem, ego per Logarithmos constructionem exhibuissem. Hic autem successus tam insignis Dominos Bernoullios fratres mirifice animavit ad praeclara porro ope hujus calculi prae-

standa, efficiendumque, ut jam non ipsorum minus quam meus esse videretur, ipso mox *Hugenio*, qui antea de eo tenuius senserat, utilitatem ejus et privatim experiente et publice praedicante, aliisque, sed inprimis *Dn. Marchione Hospitalio* in Gallia et *Dn. Craigio* in Anglia exempla eorum sequentibus. Et prae caeteris quidem egregia fuere, quae *Dn. Jac. Bernoullius*, Professor Basileensis, circa Lineam Veli et circa Elasticam dedit. Sed *Dn. Marchio Hospitalius* praecepta ipsa methodi justo opere nuper exposuit, multisque exquisitis speciminibus mirum in modum illustravit.

Tandem novissime *Dn. Bernoullius*, Professor Groninganus, aliud problema nempe Lineae brevissimi descensus, itidem a Galilaeo frustra tentatum, problemate Catenariae lineae pulchritudine usuque non inferius, examinandum sibi sumsit solvitque, et aliis etiam solvendum commendavit. Ita duo problemata illustria a Galilaeo pulchre quidem proposita, sed nequicquam ab ipso et male tentata, ope calculi nostri solutionem accepere. Fuit sane *Galilaeus* Vir ingenii judiciique maximi, sed quod ipsius tempore ars analytica nondum satis promota esset, pars autem ejus superior seu infinitesimalis adhuc in tenebris jaceret, solutiones hujusmodi sperare non debuit. Conjecit quidem Catenariam esse Parabolam et Lineam brevissimi descensus esse Circulum; sed longissime aberravit, cum Catenaria per Logarithmos seu per arcus parabolicos in rectam extensos, at Linea brevissimi descensus per arcus circulares rectificatos determinetur. Sed *Dn. Joh. Bernoullius* melioribus rem auspiciis aggressus, non tantum primus reperit Lineam brevissimi descensus esse Cycloidem, sed et aliud mysterium in linea hujusmodi Brachystochrona latere reperit, radiorum lucis scilicet curvaturam in medio continue difformi, quam ipse *Dn. Hugenius* in libro de Lumine consideraverat quidem, sed determinare in se non susceperat. Hoc problema igitur *Dn. Bernoullius* in Actis Lipsiensibus intra sex menses solvendum publice proposuit, et privatis literis a me postulavit, ut aliquid temporis ei impenderem. Ego vero, velut missione dudum impetrata, potuissem hoc labore supersedere, dum tot alia urgent, nisi pulchritudo problematis me velut invitum pellaci sua vi ad se traxisset. Evenit autem, ut mox feliciter voti fierem compos. Solutione igitur mea Autori problematis communicata agnitoque consensu, statim ipse solutionem suam mihi transmisit, et suo tempore edendam apud me deposuit. Cum autem sex menses praestituti fuissent elapsi neque alius quisquam solutionem a se repertam significasset, potuisset *Dn. Joh. Bernoullius* solutionem suam publicare et gloriam inventi elegantissimi sibi pene soli vindicare, idque ego quoque ipsi suasissem, magis laudi nostrae privatae, quam utilitati publicae velificari voluissemus. Cum vero nobiscum expenderemus, praestare ad incrementum scientiae et rei memoriam, ut plures participes fierent successus, placuit ipsi pariter et mihi, ut terminus ad sex alios menses prorogaretur, tametsi praevideremus facile egoque ipsi in literis meis praedixissem, eos ipsos, quos nunc solutionem tandem assecutos videmus, praesertim anterioribus nostris inventis communicatisque adjutos, ad eam esse perventuros, si satis animum intenderent. Et sane notatu non indignum est, eos solos solvisse hoc problema, quos solvere posse conjeceram, nec vero nisi illos, qui in nostri calculi differentialis mysteria satis penetravere. Cumque praeter Dn. Fratrem Autoris, tale quid de *Dn. Marchione Hospitalio* in Gallia fuissem auguratus, adjeceram ex abundanti, me credere *Dn. Hugenium*, si viveret, *Dn. Huddenium*, nisi haec studia dudum seposuisset, *Dn. Newtonum*, si operam hanc in se reciperet, quaesito pares fore, quod ideo repeto, ne excellentes viros contemnere videar, quibus nostra tractare aut non licet aut non vacat. Caeterum Dn. Joh. Bernoullii solutio ad me fuit missa mense Augusto anni superioris; Dn. Jac. Bernoullius quid et quo tempore praestiterit, docebunt ea, quae ipsemet recta transmisit ad Acta. Sed Dn. Marchionis Hospitalii solutio literis mense Martio hujus anni ad me datis fuit adjecta. Porro Dn. Joh. Bernoullius praeter solutionem etiam methodum quandam suam publicare voluit, qua ad solutionem pervenit, sed cum duas habuerit, prodit hic indirecta tantum, ut sic dicam, etsi perelegans, nempe sumta ex consideratione dioptrica; sed habet adhuc aliam magis directam et magis ex ipsis visceribus sumtam, quam petentibus non denegabit. Est autem in hoc problematum genere circa maxima et minima tali modo proposita aliquid inusitatum et longe superans vulgares de maximis et minimis quaestiones, quibus solis *Fermatius* (primus aliqualis circa ipsa Methodi Autor) *Cartesius*, *Huddenius*, *Slusius*, aliique methodos suas (de quibus quidem constat) aptavere. Nam in ipsorum quaestionibus res fere eo redit, ut quaeratur maxima vel minima ordinata alicujus curvae datae, quod non nisi corollarium est Methodi tangentium vulgaris seu directae. Sed hoc loco curva ipsa aliquid *optime* praestans quaeritur, cujus saepe adeo recondita est natura, ut ex datis conditionibus ne

tangentium quidem proprietas appareat, adeoque nec ad methodum tangentium altiorem seu inversam facile quaestio reduci possit. Et ipsum problema Curvae Catenariae talis naturae foret, nisi praeparatione facta ad methodum tangentium inversam reducatur. Quaeritur enim ibi, quae sit forma curvae inter duo data puncta magnitudine data sic interceptae, ut ipsius centrum gravitatis maxime descendat. Unde apparet, quam longe hactenus Analysis a perfectione abfuerit, quicquid aliqui de Methodis suis jactarint. Caeterum ex solutione Dn. Joh. Bernoullii hunc praeterea fructum insignem capimus, ut problemata duo dioptrica maximi momenti, quae Hugenium aliosque omnes ipso difficultatis aspectu a tentanda solutione absterruerre, soluta habeamus, et jam curvataram continuam radiorum lucis pariterque inde radiationibus formatae lineam definire possimus.

Caeterum meae solutioni exponendae non est quod immorer, cum caeteris consentiat, mihique quaesiti determinatione contento rem porro illustrare non vacaverit, nisi forte observari operae pretium videbitur, quod calculus mihi obtulit, lineam quaesitam esse figuram segmentorum circularium repraesentatricem. Nempe si linea ABK talis sit naturae (fig. 150), ut circulo descripto, qui imo ejus puncto K occurrat et horizontalem per A tangat in G, ductisque axi verticali AC normaliter occurrentibus in C, et lineae in M, et circulo in L, et diametro ejus verticali GK in O, sint ordinatae CM proportionales segmentis circularibus, rectangulumque sub semiradio circuli et ipsa CM aequale segmento comprehenso sub arcu GL et chorda GL; tunc AB, arcus lineae inter duo data puncta A et B interceptus, erit linea, per quam grave vi descensus a puncto A ad punctum B quam citissime venire potest. Hanc autem figuram segmentorum esse Cycloidem vulgarem ita facillime ostendi potest, quia OC semiperipheriae GLK, et LM arcui KL, erit $OL + CM =$ arcui GL. Sumto circuli centro N, jungatur NL, patet rectangulum sub semiradio et sub $OL + CM$ aequari sectori GNLG: rectangulum autem sub semiradio et sub OL aequatur triangulo GNL, ergo rectangulum sub semiradio et sub CM aequatur segmento GLG, residuae scilicet parti sectoris, detracto triangulo GNL.

Quoniam autem *Dn. Joh. Bernoullius* aliud quoque magni momenti problema nuper proposuit pure Geometricum: *Invenire lineam, quam recta quaevis per punctum fixum transiens ita secet in duobus punctis, ut summa potestatum a segmentis, interceptis inter punctum fixum et alterutrum punctum curvae, aequetur quan-*

titati constanti, ideo solutionem ejus adscribere placet, quam didici eamdem prorsus esse cum ea, quae ipsi Autori problematis occurrerat placueratque, etsi ipse non minus quam ego rem aliis adhuc modis infinitis praestare possimus. Solutio autem nostra haec est: In fig. 151 quaeritur linea DEFD, quam recta quaecunque AEF per punctum fixum A transiens ita secet in duobus punctis E et F, ut sit $\mathrm{AE}^{\frac{e}{\cdot}} + \mathrm{AF}^{\frac{e}{\cdot}} =$ constanti b. Jam AE (vel AF) vocetur x, et EK vocetur y, assumtaque recta quadam in vicem unitatis, et constante aliqua c, fiat $cy = bx^{\frac{e-1}{\cdot}} - x^{2\frac{e-1}{\cdot}}$, quae aequatio exhibebit naturam curvae quaesitae modumque puncta ejus determinandi, quod desiderabatur.

XXI.

ANIMADVERSIO AD DAVIDIS GREGORII SCHEDIASMA DE CATENARIA, QUOD HABETUR IN ACTIS ERUDITORUM AN. 1698.

Excerpta ex Epistola G. G. Leibnitii ad***. *)

Doctissimus Mathematicus *David Gregorius* rem ab aliis jam ante septennium inventam et publice expositam, nempe Catenariae naturam et primarias proprietates, suo quodam modo demonstrare aggressus est in Transactis Philosophicis Anglicanis mensis Augusti 1697 p. 633, quae demonstratio inde translata est in Acta Erud. Lipsiensia Julii 1698 p. 305. Et fieret sane operae pretium, si res, licet cognita dudum, ex novo sed solido principio derivaretur, quod ab aumine et doctrina Autoris expectari poterat. Nescio quomodo tamen factum, ut principiis ab eo allatis aliquid ad soliditatem desit, quod veritatis amore annotare dignum visum est, ut Geometriae sua sinceritas constet. Suffecerit autem attente considerare, quomodo demonstraverit Dn. Autor propositionem primam et primariam, cui reliquae superstruuntur, utemurque figura et literis Gregorianis ac verba ipsa fideliter sequemur.

Proponit sibi (fig. 152) catenam FAD suspensam ex duobus extremis F et D, cujus imum seu vertex sit A. Deinde sumto d puncto in curva proximo ipsi D, ductaque tangente TDd axi AB occurrente in T, et ordinatis BD, bd, et in hac sumta δd differentia ordinatarum, et ducta Dδ normali ad bd, seu parallela ad AB,

---

*) Act. Erudit. Lips. an. 1699.

differentia abscissarum, probandum suscipit, eam esse naturam curvae catenariae, ut sit δd ad δD, uti constans quaedam a ad arcum catenae AD. Hoc ut demonstret, postquam quaedam ex Mechanicis constare dixit, quae distinctius enuntiare atque etiam applicare operae pretium fuisset, subjicit: *Si Dd exponat gravitatem absolutam particulae Dd, ut in catena aequaliter crassa rite fit* (id est, si gravitates partium catenae sint ut ipsarum longitudines), *dδ repraesentabit gravitatis partem eam quae normaliter in Dd agit, quaque fit, ut dD, ob catenae flexilitatem circa d mobilis, in situm verticalem se componere conetur.* Haec vera sunt, si hunc habeant sensum: pondus π (vide figuram 153) esse ad pondus Dd ut recta dδ ad rectam Dd seu vim, rectae Dd ubique aequaliter gravi ac mobili circa d normaliter applicandam in ejus medio, ut dictam rectam in hoc situ servet et versus situm verticalem tendere impediat, adeoque et aequalem ei vi vel ponderi π gravitationem ipsius rectae Dd, qua ad situm illum tendit, esse ad absolutam gravitatem ipsius Dd (qua scilicet perpendiculariter descenderet, si libera prorsus esset), quemadmodum dδ est ad ipsam Dd. Pergit Dn. Gregorius: *Adeoque si δd sive fluxio* (vel incrementum aut elementum) *ordinatae BD constans sit* (id est, si ordinata lineae catenariae ponatur crescere uniformiter), *gravitatis actio in partes correspondentes catenae Dd normaliter, exercita, etiam constans erit seu ubique eadem*, id est, cujusque rectae Dd seu portionis elementaris in catena assumtae *gravitatio*, qua situm verticalem affectat circa punctum superius d, ex quo suspensa est (suppositum immotum) gyrare conando, erit ad gravitatem absolutam ejusdem portionis, ut constans quaedam recta est ad illam ipsam portionem.

Pergit: *Exponatur haec* (constans gravitationis quantitas) *per rectam a.* Sed hic apparet aliqua difficultas, nam haec *Gravitationis*, qua Dd situm verticalem affectat, expositio vel repraesentatio facta per rectam a, quae assignabilis assumitur vel ordinaria (quoniam infra dicitur, ipsam erga AD catenam (fig. 152) debere esse in ratione δd ad δD seu BD ad BT) concedi quidem posset, si id quod assignabilem ad eandem gravitationem habet rationem, nempe gravitas absoluta ipsius Dd (quae dicta est esse ad gravitationem ut Dd ad δd, seu ut TD ad BD) etiam exponeretur per rectam assignabilem. Verum id non fit, paulo ante enim gravitas illa absoluta exposita est per ipsam Dd, rectam utique infinite parvam. Alterutra ergo expositio rejicienda est, nec simul stare possunt.

Et praeterea, si gravitas absoluta ipsius Dd, portionis elementaris catenae, exponenda esset per rectam assignabilem, utique gravitas ipsius catenae ex infinitis portionibus, qualis est Dd, compositae, non posset exponi per lineam assignabilem (ut mox fieri videtur, dum ejus pondus exprimitur per ipsam ejus curvam), sed exponenda foret per lineam infinitae magnitudinis. Et quid opus erat (nisi ad occasionem propriae deceptionis) exponere gravitationem illam per rectam constantem assignabilem a, cum exposita jam sit per inassignabilem constantem dδ, quippe quae gravitationem ipsius Dd (semper eandem) repraesentat, uti Dd exponit vel repraesentat absolutam ejus gravitatem semper pro magnitudine variantem, et quemadmodum mox (licet non recte) dicetur, vim secundum directionem Dd exponi per inassignabilem Dδ.

Pergamus cum Dn. Autore: *Porro* (inquit) ex *supra citato Lemmate Mechanico, Dδ sive fluxio Axeos AB exponet vim secundum directionem ipsius dD, quae priori conatui lineae gravis dD ad componendum se in situm verticalem aequipolleat, eumque impedire possit.* Non satis apparet ex verbis Autoris vel sensus illius Lemmatis mechanici, vel applicatio, ut quod hic affirmatur, inde duci possit. Sed aliunde satis apparet, aliquid erronei subesse oportere. Nam quae hic affertur repraesentatio vel expositio, caeteris positis admitti non potest. Quoniam enim pondus absolutum ipsius rectae gravis Dd exponitur per ipsam rectam Dd, ut supra a Domino Autore est assumtum, atque adeo pondus π normaliter ad Dd applicatum (quod aequat gravitationem ipsius Dd situm verticalem affectantis) exponitur per rectam dδ, seu est ad gravitatem absolutam ipsius Dd ut dδ ad Dd; ideo his positis ajo pondus Z seu vim, quae secundum ipsius Dd directionem impediat gyrationem seu affectationem situs verticalis, non posse repraesentari vel exponi per rectam Dδ; pondus enim Z debere esse infinitum, cum quantumcunque sit, modo finitae sit magnitudinis, trahendo in directione ipsa Dd non possit retinere Dd in situ praesenti, ut jam ab aliis est ostensum. Nempe puncto D semper nonnihil descendente fiet in D angulus aliquis ipsius dD cum filo, per quod pondus Z suam tractionem exercet, isque tanto magis obtusus seu ad rectam accedens, quando majus est pondus Z.

Pergit: *Haec vero vis oritur a linea gravi DA secundum directionem Dd trahente.* Hoc verum est, sed objectionem nostram confirmat. Nam pondus lineae DA vel dA est infinitum compara-

tione ponderis ipsius rectae Dd, quae non est nisi infinite parva portio ipsius dA. Cum ergo gravitas absoluta seu pondus ipsius elementaris rectae Dd exponatur per ipsam rectam Dd, pondus autem π sit ad ipsum pondus rectae Dd ut dδ ad Dd, erit et ipsum pondus π infinite parvum. Sed pondus Z, cum ex Autoris sententia oriatur ex ipsius catenae DA pondere, quae infinities continet Dd, utique infinitum erit respectu ipsorum ponderum Dd et π, adeoque per Dd exponi nequit, seu non potest esse ad pondera Dd et π, ut recta Dδ ad rectas Dd et dδ.

Estque proinde (pergit) *caeteris manentibus lineae DA proportionalis.* Ne hoc quidem siquitur, si quidem sensus est, pondus Z, quod retinet rectam Dd in situ suo, directione Dd, esse ad pondera Dd et π ut linea catenae DA se habet ad ipsas lineas, pondera Dd et π exponentes vel repraesentantes. Ostendendum scilicet foret, gravitationem catenae DA, qua trahit Dd in directione dD, absolutae ipsius gravitati esse aequalem, seu esse eandem, qua traheret, si suspensa esset in Z, quod non admittetur.

Concludit tandem Dn. Autor his verbis: *Est igitur δd fluxio ordinatae ad δD fluctionem abscissae, sic ut constans recta a ad DA curvam.* Vera est conclusio, sed nihil minus quam probata, et mirum est, quam multis opus fuerit assumtis erroneis, ut tandem veritas prodiret. Nam, ut caetera taceam, nunc oportuit ponderis infinite parvi π rationem ad pondus infinite parvum Dd exponi per rectae ordinariae a rationem ad rectam infinite parvam Dd; nunc contra oportuit ponderis ordinarii Z rationem ad pondus infinite parvum Dd exponi per rationem rectae infinite parvae Dδ ad rectam itidem infinite parvam Dd, ut tandem destruentibus sese erroribus perveniretur ad modum apparenter concludendi, esse duas lineas infinite parvas δd, δD ut duas lineas ordinarias a et DA. Abusus expositionis inassignabilium per assignabilia (alias permissae et utilis) itemque theorematis mechanici, ut alia taceam, sub specie successus blandiente fefellerunt. Credibile est, ipsum Doctissimum Gregorium hoc posterioribus cogitationibus ingenue agniturum, aut si adhuc dubitat, consulto saltem Celeberrimo Newtono, cujus methodum sequi profitetur, esse crediturum.
