a :, a — x sit numerus et y sit logarithmus, fore $x = \frac{y}{1} - \frac{y^2}{1.2a} + \frac{y^3}{1.2.3a^2} - \frac{y^4}{1.2.3.4a^3}$ etc., ergo $z = y - x$. Itaque quaesitae lineae, cujus subtangentialis sit $yy - zy, : a$, haec est natura, ut posito y logarithmo, fiat z differentia inter logarithmum y et ejus subnumeralem. Voco autem subnumeralem x, posito a :, a — x esse numerum. Unde patet aliquando per series infinitas commode obtineri valorem finitum, etiam transcendentem; sed hoc obiter nobis hic suffecerit, problemata etiam impeditissima quantalibet exactitudine per hanc methodum in praxi solvi posse. Eadem methodo etiam *aequationum* utcunque assurgentium *radices* obtineri posse, manifestius est, quam ut explicari hoc loco sit opus.

---

## XIII.

### AD PROBLEMA IN ACTIS ERUDITORUM AN. 1693 MENSE MAJO PROPOSITUM*).

Perplacet Problema Bernoullianum nupero mense Majo propositum de invenienda linea ABC (fig. 133) ex data ratione inter tangentem BD et resectam AD ex axe AE per tangentem, vel ideo, quod etiam illi, qui nostrae methodi differentialis faciliora tenent, non statim huc pervenient. Nec motu tantum, sed et calculo analytico exhiberi potest, si detur ratio inter factum ex his duabus rectis (tangente t, resecta r) vel earum potentiis, et inter chordae AB ipsis subtensae potentiam facto homogeneam, veluti inter tr et cc, vel trr et $c^3$ aliterve. Itemque locum habet in aliis innumeris, ut si detur ratio dictae resectae AD ad ordinatam BE.

*) Act. Erudit. Lips. an. 1693. Die obige Bemerkung Leibnizens bezieht sich auf das folgende, von Joh. Bernoulli vorgelegte Problem: Quaeritur, qualis sit (fig. 133) Curva ABC, quae hanc habet proprietatem, ut ducta ubicunque tangente BD terminata ab axe AE, portio ejus abscissa AD sit ad tangentem BD in ratione constante M ad N. — In der vorstehenden Nummer ist alles, was dieses Problem betrifft, zusammengestellt.



### Christ. Hugenii Z. de Problemate Bernoulliano, in Actis Lipsiensibus an. 1693 proposito, cum additione G. G. Leibnitii.*)

Elegans imprimis esse hoc Problema, cum ex iis quae clarissimus Inventor de eo prodidit, tum ex solutione et commentatione Fraterna**) manifestum est. A quo investigando cum propter insignem difficultatem, quae statim sese offerebat, abstinere statuerim (neque enim omnibus perquirendis, quae a Viris eruditis exercitii gratia proponuntur, incumbere necesse existimo, aut assequendis parem me profiteor), non desiit tamen quasi invitum compellere recurrens identidem quaesiti non vulgaris idea, donec tandem quod desiderabam obtinui, inventa nimirum *aequatione differentiali*, in qua ex altera parte erat elementum trapezii hyperbolici, ab asymptoto perpendicularibus intercepti, ab altera elementum spatii curvilinei, quod itidem ad trapezium hyperbolicum reduci posset. Quod apertius exponerem, nisi relinquendam etiamnum aliis putarem inquirendi voluptatem. Inde eo rem deducebam, ut trapezium ejusmodi hyperbolicum secandum esset aut augendum secundum rationem datam. Quod cum per medias aut continue proportionales fieri possit, ubi ratio tangentis ad abscissam est ea quae numeri ad numerum, hinc apparuit, curvam quaesitam tunc iis accensendam, quae geometricae vocantur, alias esse ex heterogeneis: ac tamen constructionem dari posita lineae logarithmicae descriptione, quam quidem hic adducerem, nisi viderem haud difficulter ex ipsa *Jacobi Bernoullii* doctissima simul brevissimaque solutione omnia erui posse, ut jam ab aliis occupatam dubitem.

Colligitur vero ex his illud animadversione dignum, nempe quandocunque in investigatione curvarum ex tangentibus aut subtangentibus ejus ad similes ei quam dixi aequationes perveniatur, aut in quibus habeatur utrinque elementum spatii ad trapezium hyperbolicum reductibilis; tunc idem hoc, quod mirabile hic accidit, eventurum, ut curvae geometricae diversorum generum graduumque existant, si hyperbolarum ad quas devenitur rectangula quae in asymptotis, sint commensurabilia. Praeterea observanda venit in hoc problemate inusitata ac singularis analysis via, quae ad alia

*) Act. Erudit. Lips. an. 1693.

**) Jac. Bernoullii solutio Problematis Fraterni. Act. Erudit. Lips. an. 1693. Jun.

multa in hac Tangentium doctrina aditum aperit, ut egregie jam animadvertit Vir celeberrimus, *calculi differentialis* inventor, sine quo vix esset, ut ad hasce geometriae subtilitates admitteremur. Porro quod ad curvarum, de quibus agitur, designationem in plano attinet, possem, si operae pretium esset, alios modos ac fortasse commodiores indicare, quam qui a *Cl. Bernoullio* praescribitur, atque etiam docere, qua ratione optime peragatur descriptio nostrae quadratricis hyperbolae, quae inter *Tractorias* (ita enim vocari possunt) simplicissima censenda est, cum ad eam filis nihil opus sit, sed bacillo tantum utrimque cuspidem lateri infixam habente, quo fit ut et regressu explorari possit quam recte exarata sit. Sed his supersedendum arbitror, donec insignis usus aliquis harum linearum in lucem proferatur. Interim aliam quandam utilissimam curvam nuper mihi repertam Geometrae sciant, cujus opera horologiis aequalis motus conciliatur, atque ejusmodi ut maris agitatione nequaquam turbari aut imminui queat, quod in pendulis nostris hactenus usurpatis non satis caveri potuit, adeo ut nova ac certior spes nunc affulgeat perficiendi longitudinum inventi. Curva haec formatur: aabbcdeeeeefiiiiilllmmmmnorrssttuux.

### Excerptum ex epistola G. G. Leibnitii.

Mitto meditationem quae satis indicat autorem suum, tum magnitudine praeclarorum inventorum, tum ipsa magnis viris sueta ingenuitate. Nam et meo qualicunque invento debere aliquid voluit, cum ipse pro sua in his studiis autoritate et meritis, facile omnia a se petiisse videri possit. Caeterum video ipsum, qua est perspicacia, ubi primum animum ad nostrum calculum differentialem appulit, statim animadvertisse, quid in eo sit optimum, nempe quod ita solutiones generales habeantur, quae sua natura porriguntur ad quantitates transcendentes, in certis autem casibus, ut fieri potest, ad ordinarias ducunt. Mirarer, quod solas illas, quae aequationibus certi gradus subjacent, Geometricas vocare adhuc videtur, nisi judicarem, sequi magis vulgi morem ea in re, quam probare, dum de iis ait, *quae Geometricae vocantur*. Ego putem, ut veteres quidam recte reprehensi sunt, quod Geometricum satis esse negarent, quicquid circulo aut regula effici non posset; ita nec illorum hodie errori favendum esse, qui Geometriam solis aequationibus Algebraicis gradariis metiuuntur, cum Geometricum potius sit, quicquid motu continuo exacte construi potest. Quod si ille non admittit, sui



ipse praeclaris inventis injuriam facit, cum ipsemet inprimis auxerit Geometricas constructiones: nam evolutionum inventum, quod *Hugenio* debemus, quantivis pretii est, et nunc tractorias constructiones protraxit in publicum primus. Nam etsi ego prior jam a multis annis idem tacitus versaverim, et ut arbitror longius etiam provexerim, fateor tamen ideam primam hujus motus mihi a *Perralto* venisse, etsi a me profecta sit resolutio ejus seu applicatio ad Geometriam. At *Hugenium* judico utrumque sibi ipsi debere. Quod vero nunc spem facit motus hujus tractorii reddendi quam accuratissimi, si forte insignis aliquis hujusmodi linearum usus in lucem proferatur, non dubito quin sit libentius impleturus, viso nupero Schediasmate meo mensis Septembris,*) ubi ostensum est, omnes quadraturas tali motu, etsi compositiore, construi posse. Ad Schediasma dictum adjicere placet, posse in fig. 141 totam tabulam RM cum appendicibus, nempe cylindris TG, FE et directrice rigida EE, in eodem plano vel aequivalente esse cum ipso plano lineae describendae C(C); caeterum curvam directricem rigidam saepe commode vitari posse, et adhibitis pro ea rectis materialibus, quibus potest describi.

### Christ. Hugenii Z. Constructio universalis Problematis a Cl. Viro Joh. Bernoullio mense Majo anni 1693 in Actis Erud. propositi, cum additione G. G. Leibnitii.**)

Cum in Actis Lipsiensibus Constructionem hanc me reperisse significarem mense Octobri an. 1693, edenda tamen ea supersedi, quod futurum putabam, ut vel ab Autore ipso, vel Clarissimo Viro Fratre ejus, vel alio quopiam non multum absimilis brevi in lucem mitteretur; ac subverebar etiam, ne actum agerem. Quoniam vero nusquam adhuc comparuit, et est inter eas quae dari possint quodammodo simplicissima, non videtur absque ea diutius reliquendum tam eximium problema. Est autem hujusmodi: In recta AB (fig. 134) sit datum punctum A, et oporteat invenire curvam AFC talem, ut tangens ejus quaevis CD abscindat a recta AB partem AD, quae ad ipsam CD habeat rationem datam lineae C ad L.

*Constructio:* Sicut C ad L, ita quaelibet AD in recta AB assumta ad EF ipsi perpendicularem, et per F punctum ponatur ducta Logarithmica quaecunque cujus asymptotos sit AB, ad quam

---

*) Es ist dies die in der folgenden Nummer enthaltene Abhandlung.
**) Act. Erudit. Lips. an. 1694.

illa accedat versus A. Deinde ab A versus E accepta distantia qualibet AD, sit ut C ad L, sive ut AE ad EB, ita AB ad aliam DH, qua tamquam radio centroque D describatur Circuli circumferentia HC; ac praeterea applicatur ad Logarithmicam recta IG asymptoto perpendicularis ipsique DH aequalis. Jam sicut L ad duplum C, ita fiat IE ad EK, sumendam in asymptoto in partem alterutram, nihil enim refert, et applicetur rursus ad Logarithmicam recta KL. Utque duae simul KL, EF ad earum differentiam, ita sit DH ad DB, quae sumenda versus A punctum, si AD major sit quam AE; at in contrariam, si minor. Denique erigatur ad asymptoton perpendicularis BC; ea secabit circumferentiam HC in punto C, quod erit in curva quaesita AFC. Tangit autem hanc recta EF in F.

Porro animadversione dignum est, non simplicem esse curvaturam lineae hujus, cum C major est quam L, sed ex duabus eam tunc componi, ex uno quodam puncto exeuntibus, ut CFA, CM, quarum haec in infinitum progreditur. In puncto autem extremo C recta ex A educta occurrit curvae utrique ad angulos rectos, at proportionales sunt DA, DC, DB.

### Excerpta ex epistola Christ. Hugenii Z. ad G. G. Leibnitium*).

Principium quo usus est Clarissimus Matheseos Professor *Bernoullius* verum puto et bene adhibitum, quod radii, qui curvedinem metiuntur, sint in ratione contraria virium rem elasticam flectentium. Puto tamen, non tantum superficiem externam extendi, sed et internam contrahi. Magnum admodum postulatum est, figurarum curvilinearum quadraturas tanquam datas assumere. Ego me nihil admodum egisse putarem, si problema aliquod huc tantum reduxissem, excepta tamen Circuli et Hyperbolae Quadratura. Praestat Linearum Curvarum Rectificationes tanquam semper in potestate existentes assumere, quod etiam Tibi probari video.

De reliquo Clarissimus *Bernoullius* videtur mihi tantum (fig. 135) determinasse figuram, ubi tangentes extremitatum sunt parallelae, cum arcus Elastici A termini per chordam EF junguntur. Sed si arcus sit ut in B vel C vel D, aut extremitates non chorda sed recta rigida HI jungantur, figurae determinandae supersunt.

*) Siehe die Correspondenz zwischen Leibniz und Hugens Leibnizens math. Schriften, Bd. 2. S. 190 ff.



Subtile etiam fatebor inventum consensus inter figuram elasticam et lintei vel veli a liquoris pondere pressi, si modo demonstratum videam. Alioqui cogor sustinere assensum, quia et ipsum Autorem circa figuram veli sententiam mutasse video, et demonstrare possum, velum ex numero finito rectarum aequalium compositum (ut in fig. 136) aliam a vento, quam a pondere figuram accepturum, cum tamen Bernoulliana sententia sit, eandem esse velariam cum catenaria: oporteret ergo discrimen evanescere in casu infiniti. Praestat haud dubie Isochronam tuam Paracentricam construi, ut a Te fieri scribis, rectificatione lineae ordinariae, vel saltem talis cujus puncta possint construi, quam per lineae Elasticae extensionem, quae ipsamet nondum est constructa.

Quod ait Clarissimus *Bernoullius*, unicam tantum esse paracentricam ut $A\chi\omega\eta$ (fig. 137) respectu ejusdem puncti vel centri A post descensum ex TA, ejus contrarium manifeste video, Tibique assentior dari infinitas, ut $A\beta Z$, $A\delta\gamma$ etc. easque sumo usque ad rectam $A\eta$ inclusive. Quin imo supersunt adhuc aliae Curvae determinandae, si scilicet aequaliter accedendum sit ad punctum C (fig. 138), linea autem incipiat vel ab A, directe supra C, vel ad latus a D. Quo casu lineae ut ABC, AEC infinitos facient gyros circa C.

### G. G. Leibnitii Additio.

Puto in fig. 135 ex Bernoulliana determinatione arcus A (fig. 134) etiam duci posse determinationem arcuum B, C, D, G, assumendo lineae partem aut eam producendo, sed hoc tamen distincte admoneri operae pretium fuit. Rationi consentaneum est principium determinandae figurae Elasticae, quod vires flectentes sint curvedinibus proportionales, potestque ad Hypotheseos aptae modum assumi, tametsi non prorsus sit exploratum, quousque natura eo utatur, cum fingi possint constitutiones corporum, ubi res aliter procedat. Praeclara sunt monita de diversis Isochronarum paracentricarum speciebus et constitutionibus; omnes tamen mea constructione comprehenduntur. Et licet ipsam lineam rectam AD visus sim excludere, quia in ea nullus revera fit descensus vel ascensus; quia tamen concipi potest in ea descensus vel ascensus ut infinite parvus seu evanescens, haberi potest pro limite seu ultima harum linearum. Problemata curvarum transcendentium ad quadraturas reducere, magna quidem ad solutionem praeparatio est;

fateor tamen (seposita mea generali constructione tractoria) praestare rem reduci ad linearum jam constructarum reductiones, quod et ego quoties opus feci faciamque.

---

## XIII.

### SUPPLEMENTUM GEOMETRIAE DIMENSORIAE, SEU GENERALISSIMA OMNIUM TETRAGONISMORUM EFFECTIO PER MOTUM: SIMILITERQUE MULTIPLEX CONSTRUCTIO LINEAE EX DATA TANGENTIUM CONDITIONE.*)

Dimensiones linearum, superficierum et solidorum plerorumque, ut et inventiones centrorum gravitatis reducuntur ad tetragonismos figurarum planarum, et hinc nascitur *Geometria dimensoria*, toto, ut sic dicam, genere diversa a *determinatrice*, quam rectarum tantum magnitudines ingrediuntur atque hinc quaesita puncta ex punctis datis determinantur. Et Geometria quidem determinatrix reduci potest regulariter ad aequationes Algebraicas, in quibus scilicet incognita ad certum assurgit gradum. Sed dimensoria sua natura ab Algebra non pendet, etsi aliquando eveniat (in casu scilicet quadraturarum ordinariarum) ut ad Algebraicas quantitates revocetur; uti Geometria determinatrix ab Arithmetica non pendet, etsi aliquando eveniat (in casu scilicet commensurabilitatis) ut ad numeros seu rationales quantitates revocetur. Unde *triplices* habemus *quantitates*: *rationales*, *Algebraicas* et *transcendentes*. Est autem *fons irrationalium* Algebraicarum *ambiguitas* problematis seu *multiplicitas*; neque enim possibile foret, plures valores eidem problemati satisfacientes eodem calculo exprimere, nisi per quantitates radicales; eae vero non nisi in casibus specialibus ad rationalitates revocari possunt. Sed *fons transcendentium* quantitatum est *infinitudo*, ita ut *Geometriae transcendentium* (cujus pars dimensoria est) respondens *Analysis* sit ipsissima *scientia infiniti*. Porro quemadmodum ad construendas quantitates Algebraicas certi adhibentur motus, in quibus aut non intersunt curvae materiales, sed tantum regulae rectilineae, aut, si curvae rigidae interveniunt, non tamen nisi ratione occursuum seu intersectionum usurpari debent:

*) Act. Erudit. Lips. an. 1693.



ita ad construendas quantitates transcendentes hactenus adhibita est applicatio seu admensuratio curvarum ad rectas, uti fit in descriptione cycloeidis, aut evolutione fili vel folii lineae vel superficiei circumligati. Quin et si quis spiralem Archimedis aut Quadratricem Veterum Geometrice (hoc est motu continuo exacto) describere velit, hoc facile praestabit quadam rectae ad curvam admensuratione, ut motus rectus circulari attemperetur. Minime igitur haec excludo ex Geometria, etsi id fecerit *Cartesius*, cum lineae sic descriptae et exactae sint et utilissimas habeant proprietates, et transcendentibus quantitatibus sint accommodatae. Sunt tamen et aliae construendi rationes, quae aliquid Physici videntur habere admistum: ut si quis problemata Geometriae determinatricis construeret per radios lucis (quod saepe cum fructu fieri posset) aut quemadmodum nos aream Hyperbolae quadravimus, vel logarithmos construximus motu composito ex aequabili et per frictionem uniformem retardato, vel ope chordae sive catenae pondere praeditae lineam catenariam vel funicularem (la chainette) constituentis. Et quidem si exacta sit construendi ratio, recipitur in Geometriae theoriam; si facilis sit utilisque, potest recipi in praxin. Nam et motus secundum certas hypotheses factus Geometricae est tractationis, exemplo centri gravitatis. Est autem novum quoddam motus genus, quem nos opinor primi ad constructiones Geometricas adhibuimus, occasione mox dicenda, cum prae caeteris videatur referri posse ad puram Geometriam, affinisque sit descriptioni linearum per fila ex umbilicis sive focis, quandoquidem in eo nihil aliud requiritur, quam ut punctum, lineam in plano describens, ad unam extremitatem fili in eodem plano (vel aequivalente) positi alligatum, moveatur altera extremitate fili mota, sed non nisi per tractionem, non vero per impulsum in transversum, qui nec a filo ob flexibilitatem debet expectari, trahatur autem in ipsius fili tensi seu trahentis directione, quod per se evenit, si nullum in itinere occurrat impedimentum. Quoniam tamen filum materiale, cum nunquam habeat summam flexibilitatem, quam Geometria supponit, facile stylum seu punctum describens (quippe in plano libere positum) nonnihil in transversum agere posset, ita ut motus styli non esset nuda tractatio; ideo impedimento materiali commode occurritur remedio materiali, ut scilicet causa sit, quae punctum describens nonnihil faciat vel apprimi, vel adhaerere loco plani cui inest, qualis causa esse potest pondus puncto describenti incumbens, seu conjunctum, quo ipsum hoc punctum apprimetur plano horizontali, in quo moveri lineamque describere debet. Ita si resistentia incumbentis, qua fit, ut non facillime loco moveatur, praevaleat omnino exiguae illi residuae in filo rigiditati, potius cedet filum atque intendetur; atque ita aget tractione, non impulsu, quod unum hoc loco requiritur respectu puncti describentis. Hinc autem fit, ut talis motus mire sit accommodatus ad Geometriam transcendentem, quia immediate refertur ad lineae tangentes, vel directiones, adeoque ad quantitates elementares, numero quidem infinitas, magnitudine autem inassignabiles seu infinite parvas.

Hujus autem Constructionis excogitandae talis mihi olim occasio Lutetiae praebita est. *Claudius Perraltus*, Medicus Parisinus insignis, tum et Mechanicis atque Architectonicis studiis egregius et Vitruvii editione notus, idemque in Regia Scientiarum Societate Gallica, dum viveret, non postremus, mihi et aliis ante me multis proposuit hoc problema, cujus nondum sibi occurrisse solutionem ingenue fatebatur: invenire lineam BB (fig. 139), quam pondus fili vel catenulae AB extremitati B annexum, puncto B vel aequivalente describat in plano horizontali, dum alteram fili AB extremitatem A ducendo per rectam immotam AA, eo ipso pondus B trahimus per directum planum horizontale, in quod vel aequivalens etiam recta AA et durante motu filum AB cadunt. Utebatur autem (intelligentiae causa) horologio portatili suae thecae argenteae incluso B, quod catenulae AB ad thecam alligatae principio A, secundum regulam AA ducto, per tabulam trahebat. Ita imum thecae punctum (quod in fundi medio est) in tabula describebat lineam BB. Hanc lineam ego attentius considerans (cum tunc maxime in tangentium contemplatione versarer) statim animadverti, quod res est, filum perpetuo lineam tangere, seu rectam, ut ${}_3A_3B$, esse tangentem lineae BB in puncto ${}_3B$. Quod et sic demonstratur: Centro ${}_3B$ et filo ${}_3A_3B$ tanquam radio describatur arcus circuli utcunque parvus ${}_3AF$, inde filum ${}_3BF$, apprehensum in F, directe seu per sua propria vestigia trahatur usque ad ${}_4A$, ita ut ex ${}_3BF$ transferatur in ${}_4B_4A$; itaque si ponatur similiter fuisse processum ad puncta ${}_1B$, ${}_2B$, ut ad punctum ${}_3B$, utique punctum B descripsisset polygonum ${}_1B_2B_3B$ etc. cujus latera semper incident in filum, unde imminuto indefinite arcu, qualis erat ${}_3AF$, ac tandem evanescente, quod fit in motu tractionis continuae, qualis est nostrae descriptionis, ubi continua, sed semper *inassignabilis* fit circumactio fili, manifestum est, polygonum abire in curvam, cujus tangens est filum. Itaque



videbam rem redire ad hoc problema conversae tangentium: invenire lineam BB ejus naturae, ut AB portio tangentis inter axem AA et curvam BB intercepta sit constanti datae aequalis. Nec difficile mihi fuit deprehendere, hujus lineae descriptionem ad quadraturam Hyperbolae revocari posse. Nimirum Centro C vel A (ubi filum ${}_1A_1B$ simul est ordinata et tangens curvae), radio vero AB describatur circulus ${}_1BFG$, axi AE occurrens in G, et huic axi parallela sit ${}_1BK$, cui ex C educta CF occurrat in K, erit ${}_1BK$ tangens arcus circularis ${}_1BF$. Jam per F ducatur FLB, parallela axi AE, occurrens ipsi ${}_1A_1B$ in L, et curvae BB in B, in qua producta sumatur LH aequalis ipsi ${}_1BK$, idemque ubique faciendo, prodibit linea tangentium ${}_1BHH$, et rectangulum ${}_1B_1AE$ reperietur aequari figurae tangentium, seu areae trilineae ${}_1BLH_1B$; verbi gratia ${}_1B_1A$ in ${}_1A_3E$ producet aequale trilineo ${}_1B_3L_3H_1B$. Cum igitur figurae tangentium area exhiberi possit per quadraturam Hyperbolae vel Logarithmos, ut notum est, patet ejus ope etiam haberi ${}_1A_3E$ seu ${}_3L_3B$, adeoque punctum curvae ut ${}_3B$. Vicissim hinc data descriptione lineae BB quadratura Hyperbolae vel Logarithmi construentur. Quibus ulterius explicandis non immoror, cum praesertim arbitrer idem optime praestitisse *Christianum Hugenium*, Virum celeberrimum, qui mihi non ita pridem per literas significaverat incidisse sibi singularem Hyperbolae quadrandae rationem, quam etiam in Historia Operum Eruditorum publicatam nuperrime, et hanc ipsam esse colligo ex iis, quae nuper a praestantissimis fratribus *Bernoulliis* data exhibentur in Actis Eruditorum, ubi Hugenianorum istorum occasione, motum similem apparet pulchre transferri ad describendam lineam, ubi portio tangentis intercepta inter curvam et axem est ad portionem axis inter punctum fixum et occursum tangentis, seu AB ad CA (in fig. 139) ut recta constans ad aliam rectam constantem. Quae me quoque veterum in hoc genere meorum tandem edendorum admonuere.

Pronum scilicet statim fuerat intelligere, percepta semel relatione motus ad tangentes, innumeras alias lineas, non ita facile ad Quadraturam revocabiles, hac eadem arte construi posse. Nam etsi AA non recta esset, sed curva, non ideo minus filum ipsam BB tangeret. Quin amplius, etsi filum AB inter trahendum cresceret aut decresceret, non ideo minus tangens maneret. Itaque si data utcunque esset relatio inter CA et AB (verbi gratia ut AB existentibus sinubus, essent CA tangentes ejusdem anguli) variis machinationibus moderari motum fili liceret, ut data lege inter contrahendum promoveretur. Infinitae etiam lineae eidem problemati satisfacientes hac construendi ratione duci possunt, quaelibet per punctum, si lubet, datum. Quodsi punctum describens a pluribus filis simul trahatur, composita directio poterit adhiberi. Sed etsi unum tantum sit filum, poterit ejus longitudo variari, ipsi ponderi B annexa existente rota vel figura per modum describendae cycloeidis in plano voluta. Recta etiam rigida ad filum semper normalis, vel datum aut certa lege variabilem angulum habens, cum B ferri potest, in quo etiam intelligi potest moveri punctum describens aliud. Possunt etiam duo pondera plano innitentia simul trahi, sive eandem semper distantiam servantia, sive etiam durante motu eam variantia. Possunt etiam duo plana intelligi, unum in quo movebitur punctum C eique firmiter innitetur, alterum in quo stylus ex B egrediens levissimo attactu (nihil adeo motum ipsius B turbaturo) describat lineam novam, et hoc planum suum habeat motum proprium, eritque lineae novae tangens ipsa recta designans directionem motus compositi ex motu styli in plano immoto et motu plani alterius. Unde rursus tangentium lineae novae sic descriptae determinabuntur proprietates. Itaque cum hoc motuum genus latissime diffundatur et innumeras applicationes recipiat, multa olim chartae folia meditando in eam rem implevi, ac de cautionibus etiam practicis cogitavi, praesertim quia usum tam insignem ad tangentium conversam et inprimis ad Tetragonismos videbam. Cum ergo *constructionem* repererim, generaliter sese extendentem ad omnes quadraturas, qua nescio an alia amplior inde a nata Geometria excogitata sit, eam publicare tandem constitui. Tametsi enim ista hactenus in justi operis integraeque velut scientiae materiam servaverim, tam multa tamen alia alteriusve generis subnascuntur, ut veteribus quacunque occasione defungi tandem praestet, ne intercidant, et satis diu ista, ultra Horatiani limitis duplum pressa, Lucinam expectarunt.

Ostendam autem, *problema generale Quadraturarum reduci ad inventionem lineae datam habentis legem declivitatum*, sive in qua latera trianguli characteristici assignabilis datam inter se habeant relationem, deinde ostendam, *hanc lineam per motum a nobis excogitatum describi posse.* Nimirum (fig. 140) in omni curva C(C) intelligo *triangulum characteristicum duplex*: assignabile TBC, et inassignabile GLC, similia inter se. Et quidem inassignabile comprehenditur ipsis GL, LC, elementis coordinatarum CB, CF tanquam



cruribus, et GC, elemento arcus, tanquam basi seu hypotenusa. Sed assignabile TBC comprehenditur inter axem, ordinatam et tangentem, exprimitque adeo angulum, quem directio curvae (seu ejus tangens) ad axem vel basin facit, hoc est curvae declivitatem in proposito puncto C. Sit jam zona quadranda F(H), comprehensa inter curvam H(H), duas rectas parallelas FH et (F)(H) et axem F(F); in hoc axe sumto puncto fixo A, per A ducatur ad AF normalis AB tanquam axis conjugatus, et in quavis HF (producta prout opus) sumatur punctum C: seu fiat linea nova C(C), cujus haec sit natura, ut ex puncto C ducta ad axem conjugatum AB (si opus productum) tam ordinata conjugata CB (aequali AF) quam tangente CT, sit portio hujus axis inter eas comprehensa TB ad BC, ut HF ad constantem $a$, seu $a$ in BT aequetur rectangulo AFH (circumscripto circa trilineum AFHA). His positis, ajo rectangulum sub $a$ et sub E(C) (discrimine inter FC et (F)(C) ordinatas curvae) aequari zonae F(H); adeoque si linea H(H) producta incidat in A, trilineum AFHA figurae quadrandae aequari rectangulo sub $a$ constante et FC ordinata figurae quadratricis. Rem noster calculus statim ostendit. Sit enim AF, $y$; et FH, $z$; et BT, $t$; et FC, $x$; erit $t = zy : a$ ex hypothesi; rursus $t = ydx : dy$ ex natura tangentium nostro calculo expressa; ergo $adx = zdy$, adeoque $ax = \int zdy = AFHA$. Linea igitur C(C) est quadratix respectu lineae H(H), cum ipsius C(C) ordinata FC, ducta in $a$ constantem, faciat rectangulum aequale areae, seu summae ordinatarum ipsius H(H) ad abscissas debitas AF applicatarum. Hinc cum BT sit ad AF, ut FH ad $a$ (ex hypothesi) deturque relatio ipsius FH ad AF (naturam exhibens figurae quadrandae), dabitur ergo et relatio BT ad FH seu ad BC, adeoque et relatio BT ad TC, id est relatio inter latera trianguli TBC. Itaque ad omnes quadraturas adeoque et ad dimensiones efficiendas tantum opus data relatione laterum trianguli characteristici assignabilis TBC, seu data lege declivitatum curvae, posse describere curvam C(C), quam ostensum est esse quadratricem.

Haec descriptio ita fiet: In figur. 141 sit angulus rectus TAH immotus et in plano horizontali positus, in cujus crure AT procedat cylinder cavus verticalis TG, infra dictum planum horizontale prominens, in quo sit sursum deorsumque mobilis cylinder solidus FE, in summitate F alligatum habens filum FTC, ita ut pars FT sit intra cylindrum cavum, pars TC in dicto plano horizontali.

Porro ad fili TC extremitatem C sit punctum pondere sibi incumbente eidem plano innitens, atque in eo describens lineam C(C), initium autem motus erit in cylindro cavo TG, qui dum ducitur per AT recedens ab A, attrahet C. Punctum vero describens seu stylus C ante se protrudat HR, regulam in eodem plano horizontali normaliter ad AH (alterum crus anguli recti immobilis TAH) incedentem versus A, quae protrusio non impedit, quo minus protrudens punctum C sola tractione fili moveatur adeoque ejus directionem in motu servet. Sit vero et tabula quaedam RLM, eodem sui puncto R normaliter incedens ad regulam HR, caeterum propulsa continue a cylindro cavo, ita ut ATHR sit rectangulum. Denique in hac tabula sit descripta (per laminam extantem, si placet) linea rigida EE, quam cylinder solidus FE incisura, quam in extremitate E habere intelligitur, semper mordeat, ita prout R accedet ad T, cylinder FE descendet. Cum igitur quantitas ET + TC sit data (nempe composita ex cylindro solido EF et toto filo FTC) sitque data relatio inter TC et TR vel BC (ex lege declivitatum curvae data), habebitur et relatio inter ET et TR, ordinatam et abscissam curvae EE, cujus proinde natura et descriptio haberi potest in tabula LRM per geometriam ordinariam; habetur ergo etiam descriptio lineae C(C) per machinationem praesentem. Est autem TC semper tangens curvae C(C) ex natura nostri motus, itaque descripta est linea C(C), ubi lex declivitatum seu relatio laterum trianguli characteristici assignabilis TRC vel TBC est data. Quae linea cum sit quadratrix figurae datae quadrandae, ut paulo ante ostensum est, habebitur quadratura vel dimensio quaesita.

Similia variis modis ad conversae tangentium methodi problemata accommodari possunt, velut si punctum T fuisset motum in curva TT (loco rectae AT), etiam HC coordinata (seu abscissa AB) calculum fuisset ingressa. Et sane omne problema conversae tangentium reduci potest ad relationem inter tres rectas, nempe duas coordinatas CB, CH et tangentem CT, aut alias functiones harum loco. Sed saepe res multo simpliciore motu confici potest. Velut si data fuisset relatio inter AT et TC (quod est circulis lineam ad angulos rectos secantibus, ordinatim positione datis, invenire lineam C(C)), suffecisset minor apparatus. Cessantibus enim iis quae incedunt in H et R, satis erit EE lineam rigidam directricem describere in plano verticali immobili transeunte per AT. Ita promoto in recta immota AT puncto T seu cylindro cavo TG, descendenteque cylindro solido TE, prout jubet linea data directrix EE, quam cylinder mordet, utique ob summam ET + TF constantem (ut ante) et relationem inter AT et TC datam facile invenietur relatio debita inter AT et TC, seu natura lineae EE, cujus ope descripta C(C) erit quaesita.



---

## XIV.

### NOVA CALCULI DIFFERENTIALIS APPLICATIO ET USUS AD MULTIPLICEM LINEARUM CONSTRUCTIONEM EX DATA TANGENTIUM CONDITIONE. *)

Memini jam a me insinuatum in his Actis, ut rectarum ordinatim sumtarum concursu hactenus noto, ita et concursu curvarum lineas formari. Sed placet rem non parvi ad Geometriam augendam momenti exponere distinctius, nam ne in rectis quidem concurrentibus tota ejus vis fuit perspecta. In genere igitur hoc problema ad communis Geometriae leges revocare hic docebo: *Lineis* (rectis vel curvis) *propositam tangentibus, positione ordinatim datis, invenire propositam,* vel quod eodem redit: *invenire lineam, quae infinitas lineas ordinatim positione datas tangit.* Cujus usus cum latissime pateat, calculum in eam rem peculiarem jamdudum excogitavi, vel potius huc peculiari ratione applicui nostrum Differentialem compendio non contemnendo. Scilicet quemadmodum *Cartesius* loca Veterum calculo exprimens aequationes adhibuit, quae cuivis curvae puncto conveniunt, ita nos aequationes hic adhibemus infinities ampliores, quae cuilibet puncto cujuslibet curvae *in seriei ordinatim sumtarum curvarum* comprehensae accommodantur. Itaque x et y abscissa quidem et ordinata seu *coordinatae* esse intelliguntur cujusvis ex dictis curvis, sed speciatim tamen accipiuntur de curva ex ipsarum concursu *formata* seu ipsas tangente, utili quodam *aequivocationis characteristicae* genere. Coefficientes a, b, c, in aequatione cum ipsis x et y usurpatae, significant quantitates in eadem curva *constantes*, alias quidem *insitas* (nempe *parametros*), alias vero *extraneas*, quae situm curvae (adeoque ver-

---

*) Act. Erudit. Lips. an. 1694.

ticis axisque) definiunt. Sed comparando curvas seriei inter se seu transitum de curva in curvam considerando, aliae coefficientes sunt *constantissimae* seu *permanentes* (quae manent non tantum in una, sed in omnibus seriei curvis), aliae sunt *variabiles*. Et quidem ut *seriei curvarum* lex data sit, necesse est unicam tantum in coefficientibus superesse variabilitatem, adeoque si in *primaria* pro omnibus curvis *aequatione* naturam earum communem explicante plures extent variabiles, necesse est dari alias *aequationes accessorias*, coefficientium variabilium dependentiam inter se exprimentes, quarum ope omnes variabiles ex aequatione primaria tolli possint praeter unam. Caeterum pro concursu duarum linearum proximarum, sua intersectione punctum curvae quaesitae (quam et tangere intelliguntur) determinantium, manifestum est, concurrentes quidem adeoque lineam ex concursu *formatam* tangentes esse geminas, intersectionis autem seu concursus punctum esse unicum, adeoque et ordinatam ei respondentem unicam esse, cum alioqui in investigatione solita linearum propositam tangentium, rectarum vel curvarum (velut circulorum, parabolarum etc.) ex datae curvae ordinatis quaerendarum, ordinatae *geminae*, tangentes *unicae* concipiantur. Itaque quoad praesentem calculum, quo ipsae ex tangentibus rectis vel curvis positione datis investigantur ordinatae (contra quam in communi), manent coordinatae x et y in hoc transitu (a proximo ad proximum) invariatae, adeoque sunt indifferentiabiles; at coefficientes (quae in communi calculo indifferentiabiles censentur, quia constantes) quatenus hic variabiles sunt, differentiantur. Notabile est autem, *si omnes insitae coefficientes sint permanentes*, curvaeque adeo ordinatim concurrentes sint congruae inter se, perinde fore ac si intelligantur *esse vestigia ejusdem lineae motae*, curvaque earum concursu formata lineam motam perpetuo durante motu tanget. Unde in hoc casu oritur connexio quaedam cum generatione *trochoeidum;* nam et basis, super qua volvitur generatrix trochoeidis, generatricem durante motu tangit.

Calculus autem ita instituetur: Assumatur aliquis angulus rectus fixus, cujus crura utcunque producta constituere intelligantur duos axes relationis curvarum, seu axem cum axe conjugato, in quos demissae normales ex puncto curvae quocunque erunt ordinata x, et ordinata conjugata seu abscissa y, uno verbo: *coordinatae x et y*, quarum relationem ex datis quaerendo habebitur



*aequatio* (1), quam paulo ante appellavimus *primariam*, cum sit cuilibet cujuslibet curvarum ordinatim sumtarum puncto communis. Quodsi aequationi (1) insunt plures coefficientes variabiles, ut $b$, $c$, dabitur earum dependentia per *secundariam* aequationem (2), unam vel plures, atque ita ex aequ. (1) tollendo coefficientes variabiles praeter unam $b$, prodibit aequ. (3). Hanc aequationem differentiando, ut prodeat aequ. (4), cum in ea sola affutura sit differentialis ipsius $b$, evanescet differentialitas, adeoque habemus aequ. (4) ordinariam, cujus ope ex aequ. (3) tollendo variabilem residuam $b$, habebitur aequatio (5), in qua praeter x et y tantum supererunt coefficientes invariabiles (ut $a$), quae erit aequatio ad curvam quaesitam concursu seriei linearum formatam, adeoque *ad seriei linearum tangentem communem*. Sed et aliter institui potest calculus, prout facilitas invitabit, non tollendo statim variabiles, sed servando. Nempe datis aequ. (1) primaria et aequ. (2) secundaria (una vel pluribus pro explicanda dependentia coefficientium variabilium inservituris), differentientur aequ. 1, ut prodeat (3), et aequ. 2, ut podeat (4) (una vel plures, si pro aequ. (2) affuerint plures). Ita habebimus plures quantitates differentiales, sed tamen habebimus et aequationes sufficientes ad eas tollendas; et quidem modo tolli possint differentiales quantitates usque ad unam, etiam residua ista evanescet per se, et sic prodibit aequ. (5) ordinaria, seu carens quantitate differentiali, quam conjugendo cum aequ. (1) et (2) tolli poterunt variabiles omnes, et prodibit aequ. (6) naturam exprimens curvae quaesitae, linearum concursu formatae, quae erit eadem cum aequ. (5) calculi prioris.

Hac jam methodo solvi possunt innumera problemata sublimioris Geometriae hactenus non habita in potestate, pertinentiaque ad tangentium conversam, ex quibus nonnulla in specimen indicabo magnae utique generalitatis. Veluti: Data relatione (fig. 142) inter AT et A$\vartheta$, resegmenta axium per curvae tangentem CT facta, invenire curvam CC; nam rectae curvam tangentes ordinatim positione dantur, adeoque et curva quaesita, quippe quae earum concursu formatur. Vel si, dato puncto axis T, detur lineae datae EE punctum E, sic ut juncta TE, si opus producta, quaesitam curvam CC tangat, patet ex dictis curvam CC praescripta hic methodo haberi. Similiter data relatione inter AP et A$\pi$, resegmenta axium facta per curvae perpendicularem PC, licet invenire curvam CC: nam ob rectas P$\pi$ ordinatim positione datas, etiam datur linea FF formata per earum concursum, hujus vero evolutione describetur curva CC quaesita. Unde hic quidem infinitae curvae satisfacientes dari possunt, omnes scilicet parallelae inter se, quae ejusdem lineae evolutione *condescribuntur;* et data relatione inter AP et $A\pi$, dari potest *curva quaesita* non tantum satisfaciens, sed et *transiens per punctum datum.* Interim hoc casu curva CC non semper est ordinaria, quoniam scilicet non ipsamet, sed ipsius per evolutionem generatrix rectarum positione datarum concursu formatur. Certe cum ipsa curva formatur concursu, habetur *determinata,* nec in arbitrio est punctum, per quod transeat, quae distinctio utilis est in hac doctrina.

Sed exemplum calculi dabimus in problemate itidem generali, ad aliquam tamen specialem lineam applicato: *data relatione perpendicularis PC ad proprium ab axe resegmentum AP, invenire lineam CC.* Patet enim datis positione punctis C, nempe centris circulorum, et radiis PC datis magnitudine (ob datam relationem ad AP) *dari ordinatim circulos lineam CC tangentes,* adeoque lineam ipsam circulorum concursu formatam haberi posse, id quod jam verbulo indicaveramus olim in Actis 1686 mense Junio sub Schediasmatis finem. Itaque centro P, radio PC magnitudine dato, describatur circulus CF. Ut ergo methodum paulo ante positam huc applicemus, ex puncto circuli quocunque F agantur normales ad crura anguli recti PAH, seu coordinatae FG, y, et FH, x (quae in casu concursus duorum circulorum incidunt in CB, CL) sit AP, b, et PC, c; fiet ex natura circuli, $xx + yy + bb \overset{(1)}{=} 2bx + cc$, aequatio primaria omnibus nostris circulis et cuique cujusque puncto communis. Quoniam autem datur relatio inter AP et PC, dabitur curva EE, cujus ordinata PE aequatur ipsi PC; haec curva ponatur (exempli gratia) esse parabola, cujus parameter a, et fiet $ab \overset{(2)}{=} cc$, quae aequatio secundaria exhibet relationem seu dependentiam inter c et b. Hujus ope tollendo c, ex aequ. (1) fiet $xx + yy + bb \overset{(3)}{=} 2bx + ab$; patet autem in aequ. (1) praeter coordinatas x et y adesse coefficientes c, b, a, ex quibus c et b sunt in uno circulo constantes, et c quidem est circulo insita, cum ejus radium designet; b est extranea, quippe situm centri designans; ambae variatis circulis sunt variabiles, sed a est constantissima sive permanens, cum non unius tantum circuli omnibus punctis, sed et pro omnibus circulis



nostris in aequatione maneat eadem. Reducta jam aequatio (3) ad unam coefficientem variabilem b, differentietur secundum b (solam in ea differentiabilem) et fiet $2bdb = 2xdb + adb$, seu (evanescente db) fit $b \overset{(4)}{=} x + a : 2$ (qui calculus in casu unius differentiabilis in effectu coincidit cum methodo vetere de maximis et minimis a *Fermatio* proposita, ab *Huddenio* promota, sed quae tantum est corollarium nostrae). Jam ope aequ. (4) tollendo residuam coefficientem variabilem b, ex aequ. (3) fiet $ax + aa : 4 \overset{(5)}{=} yy$, quae est aequatio ad curvam CC quaesitam. Idque indicio est eam esse parabolam, ipsi datae AE congruentem, sed paulo tantum aliter sitam; continuata enim CC vertice suo V incidet in axem AP, sed supra datae AE verticem A, ita ut distantia verticum AV sit communis lateris recti pars quarta. Si alteram calculandi rationem malis per plures differentiales, resumtae aequationes (1) et (2) differentientur, et ex (1) fiet $bdb \overset{(3)}{=} + db + cdc$, sed ex (2) fiet $adb \overset{(4)}{=} 2cdc$, quarum (3 et 4) ope tollendo dc evanescet simul et db, et fiet $b \overset{(5)}{=} x + a : 2$, ut paulo ante. Unde jam per (1), (2), (5) tollendo c et b coefficientes variabiles, prodibit $ax + aa : 4 \overset{(6)}{=} yy$ pro aequatione lineae quaesitae, ut ante.

Atque ita docuimus data relatione perpendicularis PC ad proprium ex axe resegmentum AP exhibere lineam CC, quia ordinatim dantur circuli lineam tangentes. Sed data relatione rectae tangentis TC ad proprium ex axe segmentum AT (seu circulis normalibus ad lineam ordinatim datis) invenire lineam CC, alterius est methodi, et *constructione tractoria* talis linea haberi potest, a nobis in his Actis Sept. anni superioris mense*) explicata. Hujus autem praesentis methodi nostrae maximus praeterea est usus ad complura alia problemata Geometriae superioris, aut etiam ad mechanica vel physica applicatae. Cum enim id agitur, ut figura formetur, in quovis puncto dato suae lineae terminantis praestans aliquid desideratum, persaepe consequimur quaesitam formando ipsam concursu linearum, quarum quaevis in aliquo puncto satisfacit, ipsomet scilicet puncto concursus. Hac ratione jam olim in Schediasmate de Lineis Opticis inveni modum lineas exhibendi, quae radios

---

*) Siehe die vorhergehende Abhandlung.

ordinatim positione datos, seu a datae figurae speculo venientes, reddant convergentes, aut divergentes, aut parallelos. Formatur enim talis linea ellipsium concursu, si radii debeant fieri convergentes; eademque methodus valet, si reddendae sint parallelae aut divergentes.

P. S.

Solutionem suam Problematis Bernoulliani mense nupero Majo una cum objectione Anonymi Actis Eruditorum insertam, Dn. Marchio Hospitalius Autor defendere non distulit, ostenditque, ut intellexi, Anonymum, si calculum suum ad finem perduxisset, ipsummet solutionis datae successum fuisse deprehensurum. Caeterum Anonymus ille aliam solutionem non dedit, neque id secundum Analysin vulgarem facile praestari potest. Nostra autem nova, adeoque et Dn. Marchionis, ac Dominorum Bernoulliorum Methodus, non hoc tantum, sed et, quemadmodum jam mense Julio in Actis anni superioris est admonitum, innumera similia solvit, sive absolute pro re nata, sive per quadraturas. Et generale Problema sic concipi potest: *Data ratione inter duas Functiones invenire lineam.* Data ratio intelligitur, quae est inter duas datas, veluti $m$ et $n$. *Functionem* voco portionem rectae, quae ductis ope sola puncti fixi et puncti curvae cum curvedine sua dati rectis abscinditur. Tales sunt: Abscissa AB vel $A\beta$ (fig. 144), ordinata BC vel $\beta C$, tangens CT vel $C\vartheta$, perpendicularis CP vel $C\pi$, subtangentialis BT vel $\beta\vartheta$, subperpendicularis BP vel $\beta\pi$, per tangentem resecta AT vel $A\vartheta$, per perpendicularem resecta AP vel $A\pi$, corresecta PT vel $\pi\vartheta$, radius osculi seu curvedinis CP, et aliae innumerare.

## XV.

## CONSIDERATIONS SUR LA DIFFÉRENCE QU'IL Y A ENTRE L'ANALYSE ORDINAIRE ET LE NOUVEAU CALCUL DES TRANSCENDANTES*).

La solution d'un problème de conséquence proposé par M. Jean Bernoulli, que M. le Marquis de l'Hospital a donné dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, et tout ce qu'on a

*) Journal des Sçavans de l'an. 1694.



eu la bonté d'y dire en faveur de mon calcul, qui sert à ces choses, m'engage à en dire un mot, pour animer les Géomètres à le perfectionner. Il faut avouer, que l'Analyse ordinaire est encore assez imparfaite: le public n'a pas encore le moyen de trouver les racines du cinquième degré et au dela, et il n'a pas encore de méthode générale pour le calcul qui se fait à la façon de Diophante pour résoudre les questions en nombres. Ainsi il ne faut point s'étonner, si notre nouveau calcul des différences et des sommes, qui enveloppe la considération de l'infini et s'éloigne par conséquent de ce que l'imagination peut atteindre, n'est pas venu d'abord à sa perfection. Mais comme il est beaucoup plus utile que le calcul des équations du cinquième degré et au dela, ou que le calcul de Diophante, quoique j'aye trouvé le moyen de les faire encore servir au notre, il est important qu'on s'y applique. Messieurs Bernoulli ont été les premiers, qui ont témoigné publiquement avec un très grand succès, combien ils l'avoient trouvé propre pour résoudre des problêmes Physico-Mathématiques, dont la porte paroissoit fermée auparavant. M. le Marquis de l'Hospital y a pris goût aussi, en ayant donné de beaux échantillons; et enfin M. Huygens lui-même en a reconnu et approuvé la conséquence. Il faut rendre cette justice à M. Newton (à qui la Géométrie, l'Optique, et l'Astronomie ont de grandes obligations) qu'encore en ceci il a eu quelque chose de semblable de son chef, suivant ce qu'on en a sçu depuis. Il est vrai qu'il se sert d'autres caractères: mais comme la caractéristique même est, pour ainsi dire, une grande part de l'act d'inventer, je crois que les notres donnent plus d'ouverture. Pour ce qui est de ceux qui ne se servent que de l'Analyse ordinaire, et pensent peut-être qu'elle leur suffit, il sera bon de leur proposer des problêmes semblables au dernier de M. Bernoulli.

En voici un plus général, qui le comprend avec une infinité d'autres. Soit donné la raison, comme $m$ à $n$, entre deux fonctions quelconques de la ligne ACC, trouver la ligne. J'appelle *fonctions* toutes les portions des lignes droites, qu'on fait en menant des droites indéfinies, qui répondent au point fixe et aux points de la courbe, comme sont (fig. 144) AB ou $A\beta$ abscisse, BC ou $\beta C$ ordonnée, AC corde, CT ou $C\vartheta$ tangente, CP ou $C\pi$ perpendiculaire, BT ou $\beta\vartheta$ sous-tangente, BP ou $\beta\pi$ sous-perpendiculaire, AT ou $A\vartheta$ *resecta* ou retranchée par la tangente, AP ou $A\pi$ retranchée par la perpendiculaire, $T\vartheta$ et $P\pi$ sous-retranchées, *sub-resectae a* *tangente vel perpendiculari,* TΓ ou $\vartheta\pi$ *corresectae,* et une infinité d'autres d'une construction plus composée, qu'on se peut figurer.

Le problême se peut toujours résoudre, et il y a moyen de construire la ligne, au moins par les quadratures, ou par les rectifications. Car cette méthode, ou ce *calculus différentialis,* sert non seulement aux différences, mais encore aux sommes, qui sont le réciproque des différences, à peu près comme le calcul ordinaire ne sert pas seulement aux puissances, mais encore aux racines, qui sont le réciproque des puissances. Et l'analogie va plus loin qu'on ne pense. Dans l'analyse ordinaire on peut toujours délivrer le calcul *a vinculo* et des racines par le moyen des puissances: mais le public n'a pas encore la méthode de le délivrer des puissances impliquées par le moyen des racines pures. De même dans notre Analyse des transcendantes, on peut toujours délivrer le calcul *a vinculo* et des sommes par le moyen des différences: mais le public n'a pas encore la méthode de le délivrer des différences impliquées par le moyen des sommes pures ou quadratures: et comme il n'est pas toujours possible de tirer les racines effectivement pour parvenir aux grandeurs rationnelles de l'Arithmétique commune, il n'est pas toujours possible non plus de donner effectivement les sommes ou quadratures, pour parvenir aux grandeurs ordinaires ou algébriques de l'analyse commune. Cependant par le moyen des séries infinies on peut toujours exprimer des grandeurs rompues comme en entiers, et des incommensurables en rationelles, et des transcendantes en ordinaires. Et j'ai donné par là une voye générale, selon laquelle tous les problêmes, non seulement des différences ou sommes, mais encore des différentio-différentielles ou sommes des sommes et au delà, se peuvent construire suffisamment pour la practique: comme j'ai donné aussi une construction générale des quadratures par un mouvement continu et réglé.

Enfin notre méthode étant proprement cette partie de la Mathématique générale, qui traite de l'infini, c'est ce qui fait qu'on en a fort besoin, en appliquant les Mathématiques à la Physique, parce que le caractère de l'Auteur infini entre ordinairement dans les opérations de la nature.

---



## XVI.

### CONSTRUCTIO PROPRIA PROBLEMATIS DE CURVA ISOCHRONA PARACENTRICA, UBI ET GENERALIORA QUAEDAM DE NATURA ET CALCULO DIFFERENCIALI OSCULORUM, ET DE CONSTRUCTIONE LINEARUM TRANSCENDENTIUM, UNA MAXIME GEOMETRICA, ALTERA MECHANICA QUIDEM, SED GENERALISSIMA. ACCESSIT MODUS REDDENDI INVENTIONES TRANSCENDENTIUM LINEARUM UNIVERSALES, UT QUEMVIS CASUM COMPREHENDANT, ET TRANSEANT PER PUNCTUM DATUM*).

A celeberrimo Viro *Jac. Bernoullio*, Matheseos apud Basileenses Professore, in Actis mensis Junii nuperi velut invitatus, praesertim circa problema a me olim, cum nondum nostra calculandi methodus frequentari coepisset, propositum, responsionem defugere nolui, tametsi et valetudo vacillans et aliae multiplices causae excusare me fortasse possent. Et quidem profundius ista meditari non licet aut demonstrationes introspicere, minime tamen dubito, pro explorato acumine Viri, vera attulisse. Quo constituto libenter agnosco, non facile in specialium problematum solutione apud Geometras pulchriora repertum iri. Quaedam tamen annotabo, quae mihi primo aspectu sese obtulere, nec novo studio indigebant. Theoremata pro inveniendis radiis circulorum osculantium elegantia et utilia sunt, utorque similibus vel expresse vel potius virtualiter, ipsa calculi nostri natura jubente, quoties generatricem evolutoriam vel oscula quaero lineae non nisi differentialiter seu per tangentium proprietatem datae; tunc enim ut ex duabus incognitis generatricem determinantibus unius (altera sublata) valor per ipsas x, y, dx, dy lineae differentialiter datae generaliter habeatur, utique veniendum est ad differentio-differentiales, quae tamen cessant in applicatione, quia dy:dx per ordinarias explicatur. Sed et pro centris non minus ac radiis circulorum osculantium theoremata generaliora formari possunt, quae certorum elementorum aequalitate non indigent. Tale hoc est (cujus corollaria sunt, quae Vir Cl. attulit) radius osculi est ad unitatem, ut elementum unius coordinatae est ad elementum rationis elementorum alterius coordinatae et curvae. *Rationem* autem hic sumo pro re homogenea unitati vel numero, quae oritur ex divisione antecedentis per consequens. Item: distantia

*) Act. Erud. Lips. an. 1694.

centri osculantis circuli ab ordinata curvae est ad unitatem, ut tertia proportionalis elementorum abscissae et curvae est ad elementum rationis elementorum abscissae et ordinatae, Et quod notatu dignum est, possunt haec indagari sine mediatione figurae, nempe ex calculo solo a nobis proposito, quaerendo scilicet aequationem localem ad rectam curvae normalem, eamque differentiando secundum quantitates in ea geminatas, methodo a me praescripta in his Actis April. 1692 et nuper*) illustrata. Nempe sit (fig. 145) abscissa AB, x, ordinata BC, y, vel contra; et elementum curvae sit dc. Et CP ad curvam perpendicularis axi occurrat in P, sumaturque in ea punctum quodcunque G, unde ad axem normalis GF ducatur. Jam sit AF, f, et GF, g, fietque (cum signa ita postulabunt) $g+y$ ad $f-x$ ut dx ad dy seu fiet $g + y = \overline{f - x}, dx:dy$, quae est aequatio localis ad rectam indefinite productam, curvae normalem. Verum quia jam duarum hujusmodi rectarum quaeritur intersectio, differentianda est haec aequatio, hoc tantum observato, ut g et f, ob commune punctum concursus, considerentur velut coincidentes in utraque recta, adeoque indifferentiabiles. Et fiet $dy = \overline{f-x}\ \overline{d, dx:dy} - dxdx:dy$; seu $dc\,dc:dy$ (tertia prop. ipsis dy, dc) est ad $d, \overline{dx:dy}$ (elementum rationis inter dx et dy) ut $f-x$ ad unitatem, quod est posterius theorema ex iis, quae paulo ante adduxi. Quod si rationem inter dx et dy vocemus r, fit dx ad $rdr:, 1+rr$ (elementum quoddam pro dicta ratione logarithmicum) ut distantia a coordinata, nempe $f-x$, est ad unitatem. Iisdem positis, radius osculi vocetur *q*, fiet $q\,dy:dc = f-x$; et differentiando fiet $q\ \overline{d, dy:dc} = -dx$ seu fiet q ad 1, ut $-dx$ ad $\overline{d}, \overline{dy:dc}$, vel q ad 1, ut dy ad $d, dx:dc$, quod est theorema prius. Et omnino variari ista possunt infinitis modis, constituique pro usu problematum; potissima tamen elegantioraque consignari prodest ad scientiae incrementum. Et latent sane in istis, quae egregios usus habere possunt.

De *Elastro* in universum quidem dici, opinor, potest: tensionem esse proportionalem vi tendenti. Sed cum in solidi contenti mutatione tensio consistat, non solet tota in longitudinem refundi, ut si fingamus pilas inflatas in lineam depositas esse vicinamque vicinae nodo quodam alligari, ac totum funem ex illis compositum intendi, manifestum est, funis extensionem in longitudinem non fore

*) Siehe die Abhandlung: Nova Calculi Differentialis applicatio et usus etc.



proportionalem tensioni aëris inclusi in pilis seu vi tendenti. Quae causa etiam est, quod de lamina elastica non aeque ac de catena certi aliquid constitui potest. Itaque recte Cl. Vir generalia dedit pro quacunque tensionis lege.

Cum varios modos construendi transcendentes lineas examinassem olim, omnium absolutissimum esse repereram, qui fieret inventione punctorum quotcunque per meras quantitates ordinarias seu Algebraicas, supposita tantum unica quantitate constante transcendente pro punctis omnibus, cum alias perpetuo transcendentibus novis sit opus pro puncto quovis. Et hoc modo usus eram ad catenariae constructionem. Is igitur valde probatur Celeberrimo Viro pag. 271: dolendum tamen censet, quod non sit universalis; etsi enim succedat in his, quae pendent a logarithmis vel quadratura hyperbolae, non tamen adhiberi posse, ubi quadratura circuli vel altior alia requiritur. Cum vero mihi secus videatur, omninoque arbitrer pro circuli dimensione, imo et pro altioribus, simile aliquid fieri posse, ad promotionem scientiae interest, ut res nonnihil declaretur. Nempe quod pro quadratura hyperbolae praestat sectio rationis seu inventio mediarum proportionalium, id pro circulari praestat sectio anguli. Itaque loco logarithmicae adhiberi potest *linea sinuum* (nostro more explicata) vel linea tangentium, aliaque similis. Nempe sumatur (fig. 146) quadrans circuli ABCGA, cujus basis BC est sinus totus, altitudini autem BA utcunque productae in E, tamquam axi, ordinatim applicentur sinus recti hoc modo: Arcus quadrantis bisecetur in G, et segmenta AG, CG rursus bisecentur in H et K, et segmenta AH, HG, GK, KC denuo bisecentur, eodemque modo pergi intelligatur. Porro similiter altitudo EB bisecetur in (G); et E(G), B(G) in (H) et (K) atque ita porro: tum ipsae rectae a punctis sectionum ad axem ductae, ut GL, HM, KN seu sinus angulorum GBC, HBC, KBC (quos cum basi comprehendunt radii a punctis sectionum arcus ad centrum ducti) ordinatim applicentur respondentibus punctis sectionum altitudinis, seu transferantur in (G)(L), (H)(M), (K)(N), et sinus totus BC in B(C), et linea E(M)(L)(N)(C) erit linea sinuum, atque ita si ordinatae velut (M)(H) sint ut sinus angulorum (velut ABH), abscissae E(H) erunt ut anguli seu ut arcus (velut AH). Et siquidem tota altitudo EB sit aequalis arcui quadrantis, abscissae erunt arcubus dicto modo respondentibus aequales. Igitur linea haec sinuum per puncta describi potest non minus ac logarithmica. Ipsa autem semel descripta, dataque una sola quantitate constante, quae est ratio diametri ad circumferentiam, seu data ratione arcus quadrantis AGC ad radium BC, adeoque data ratione arcus AGC ad altitudinem BE (cujus ratio ad BC pro arbitrio sumta est), patet ope lineae sinuum descriptae arcum circuli quemvis dari, adeoque et segmenti cujusque circularis vel sectoris quadraturam. Quemadmodum autem in logarithmica datur unica illa quantitas requisita, si detur figurae descriptae tangens, ita in linea sinuum idem est. Nam si ordinatae sint sinus, et abscissae sint proportionales arcubus, erunt elementa abscissarum proportionalia arcuum elementis. Jam elementum arcus est ad elementum sinus, ut radius ad sinum complementi. Ergo in figura sinuum dicta erit elementum abscissae ad elementum ordinatae, id est, erit subtangentialis quaecunque T(G) ad ordinatam GL seu sinum in ratione composita radii AB ad arcum quadrantis AGC, et altitudinis BE ad BL sinum complementi; et ipse arcus quadrantis erit ad radium, ut BE altitudo lineae sinuum est ad T(G) subtangentialem 45 graduum sinui respondentem. Porro quemadmodum lineae transcendentes, id est aequatione algebraica seu certi gradus inexplicabiles, nempe de gradu in gradum transeuntes, describi possunt sectione rationis vel anguli: ita manifestum est, innumerabiles alias hujusmodi per puncta constructiones posse excogitari linearum transcendentium, quas ad alias quadraturas, itemque ad tangentium universam methodum seu differentialium primi gradus constructionem profuturas, ex dictis intelligi potest. Atque ita ad novum velut pelagus meditationum aditus patet, quod rite ingredienti praeclara dabit, cum in his vera consistat connexio Analyseos algebraicae atque transcendentis. Qua occasione noto obiter, quod Vir Clarissimus in mei gratiam Algebraicas se imposterum vocaturum ait, quas ante Geometricas vocaverat, non ita a me accipi, quasi mihi nescio quam in his affectationem imputet, sed quod rationes meas non improbet, quibus inductus statuo, quicquid exactum est, Geometricum esse, Mechanicum vero quod fit appropinquando; nec minus peccasse *Cartesium* haec Geometria excludendo, quae ipsius Analysi non subjiciebantur, quam Veteres *Cartesio* peccasse erant visi, qui lineas supra rectam et circulum ad mechanicas retulerant.

Nota, quam Vir Clarissimus adhibet p. 271, unde intelligatur, an quadratura figurae ordinariae ope logarithmicae exhiberi possit, quod scilicet res tum demum succedat, cum ordinata figurae quadrandae est subtangentialis Algebraicae, non videtur universalis, nec



nisi pro illis est, quae simpliciore ratione per logarithmos construuntur. Nam eo casu, quo haec nota locum habet, logarithmus ordinatae ad alteram illam curvam Algebraicam dicta subtangentiali praeditam erit aequalis rationi, quam ordinata quadratricis seu summatricis habet ad constantem, scilicet in quadratrice sit ordinata $y$, in quadranda $t$, in altera algebraica $v$, abscissa utrobique sit $x$, et in algebraica ad $v$ sit subtangentialis $q$, sitque $ady = tdx$, et t detur per x, et ob notam praescriptam sit $q = aa : t$, erit ex natura subtangentialis $dx : q = dv : v = t dx : aa = dy : a$. Ergo log. $v = \overline{y : a}$. Sit jam in exemplo ad instantiam apto $t = x + aa : x$, fiet $y = \overline{xx : 2a} + a$ log. x. Ergo si nota dicta esset universalis, deberet dari quantitas algebraica v, cujus logarithmus esset $\overline{xx : 2aa} +$ log. x, seu logarithmus rationis inter quantitates algebraicas $v$ et $x$ deberet esse quantitas algebraica $xx : 2aa$ indefinite in quibuscunque $v$ vel $x$, quod fieri nequit. Invenire autem, utrum quadratura fieri possit per logarithmicam, vel etiam per dimensiones conicas, alterius est analyseos, quam a methodo tangentium inversa distinguo. Et quod ad hanc attinet, agnosco me proposuisse inter alias viam per aequationem generalem $a + bx + cy$ etc. ad curvam indefinitam, cujus usum non contemnendum puto, praxi ipsa et speciminibus edoctus. Sed contractionibus quibusdam, aliaque industria opus est.

Ad seriem, quam Professor Clarissimus exhibet p. 274, pro exprimenda quantitate $y = \int, \overline{xx}\, dx : \sqrt{1 - x^4}$, pervenire etiam potest simplici expressione potentiae binomii. Nam $\boxed{e}\, \overline{1 + b} = 1 + \frac{e}{1} b + \frac{e . e - 1}{1 . 2} bb + \frac{e . e - 1 . e - 2}{1 . 2 . 3 .} b^3$ etc., quod si sit $= 1 : \sqrt{1 - x^4}$, erit $e = -1 : 2$ et $b = -x^4$, unde explicando seriem $1 + \frac{e}{1} b$ etc. et proveniens multiplicando per $xxdx$ habebitur valor ipsius dy, unde fiet $y = \frac{1}{3 . 1} x^3 + \frac{1}{7 . 2 . 1} x^7 + \frac{1 . 3}{11 . 4 . 1 . 2} x^{11} + \frac{1 . 3 . 5}{15 . 8 . 1 . 2 . 3 .} x^{15}$ etc. Ego sane compendii causa utor hoc artificio post Newtonum etiam ad series meas, cum unica irrationalis calculum ingreditur, quia sic sublatio ejus evitatur, quamquam et post exaltationes (prolixius licet) ad idem perveniri possit, methodo generali a me praescripta.

Venio jam ad problematis mei solutionem, seu *lineae* (quam voco) *Isochronae paracentricae* a me *propositae constructionem*,