et summas, eaque ratione non tantum mira pro tangentibus maximisque et minimis compendia prodeunt, sed et problemata, lineaeque Algebram transcendentes (qualia Cartesius a sua Geometria excludere coactus fuerat, quod receptum calculum non paterentur) ita analysi subjiciuntur, ut lineae vulgo mechanicae appellatae (revera Geometricae transcendentes) aequationibus exprimi queant ad modum ordinarium, et sine imaginationis labore inveniantur in illis, quae alioqui vix multo circuitu patent, imo saepe aliter omnino non patent inquisitioni. Haec methodus cum nonnullis viris egregiis etiam extra Germaniam, in Anglia primum deinde et in Italia, et alibi quoque placuisset, forte accidit ut doctissimus Basileensium Professor Jacob. Bernoullius, multis jam egregiis alterius generis speculationibus mathematicis clarus, in eandem studiosius incumberet, et ab Inventore publice peteret, annon ut per ipsum Autorem jam ad nonnulla Problemata Geometrico-physica feliciter applicata fuerat (velut ad lineam isochronam, in qua grave descendens uniformiter accedit horizonti, ad leges motus planetarum harmonicas, ad resistentias solidorum et liquidorum aestimandas), ita posset adhiberi ad Problema Catenarium Galilaei. Id vero uti expetebatur, ita mox factum est. Nam Leibnitius rem ejus aggressus, statim successum habuit, et ut aliis quoque suarum Methodorum exercendarum occasionem daret, publice pariter et literis extra intraque Germaniam Eruditos invitavit annuo spatio praestituto. Sed nemo sibi successisse inquisitionem significavit praeter Celeberrimum Hugenium, et ipsius Clari Bernoullii Fratrem, accutissimi, ut vel hinc apparet, ingenii juvenem, eo tamen discrimine quod Leibnitiana Methodo (qua et Bernoullius uterque usus est, et collato studio ad alia porro cognata problemata egregie progressus) problema fuerit reductum ad verum suum genus, scilicet simplicissimum quod haberi poterat, nempe ad quadraturam Hyperbolae. Hugeniana autem solutio etsi verissima, supponit tamen quadraturam magis compositam, cujus naturam et reductionem non dabat, ut proinde ex ea de problematis natura et gradu non constet. De caetero egregius ubique apparuit consensus, etsi nulla intercessisset communicatio, non mediocri veritatis indicio apud eos valituro, qui talia per se commode examinare non possunt. Leibnitii autem constructio maxime Geometrica est, nec alia melioris generis dari potest, nam certa quadam proportione semel in universum assumpta, de caetero inveniuntur innumera seu quot lubet puncta lineae quaesitae vera

per Geometriam ordinariam sine suppositione quadraturarum, quod in Algebram transcendentibus summum est. Hanc igitur placet paucis subjicere.

Ad rectam infinitam NO(N) (fig. 121) ordinatim angulis rectis applicentur rectae continue proportionales $N\xi$, OA, $(N)(\xi)$ aequalibus intervallis NO, (N)O, atque ita quidem ut ratio $N\xi$ ad OA sit quae rectarum D et K, quae certa est semperque eadem manens pro lineis catenariis quibuscunque, eaque semel habita cuncta deinde per Geometriam communem procedunt. Quotcunque deinde tertiis vel mediis ad has proportionalibus similiter applicatis (dissectis nempe intervallis, eove semper observato ut continue proportionales aequidistent, ita ut ex. gr. sit $_1N_1\xi$ media proportionalis inter OA et $N\xi$ ut punctum $_1N$ medium est recta ON), habebitur linea logarithmica $\xi A(\xi)$ transiens per omnia puncta ξ et per A, ubi OA existente unitate, et quibuscunque applicatis $N\xi$ consideratis ut numeris, erunt abscissae seu intervalla ON ut logarithmi. Jam in recta OAB quantum satis producta sumatur OB media arithmetica inter duos numeros $N\xi$, $(N)(\xi)$ communi Logarithmo praeditos seu mediam Geometricam habentes unitatem, et compleantur rectangula BN et B(N), erunt Puncta C et (C) in linea catenae quaesita CAC, cujus vertex (inversus) erit A, parameter AO, unitas scilicet pro arbitrio assumpta, et OB vel NC (media arithmetica inter Numeros $N\xi$, $(N)(\xi)$ Geometricam mediam habentes unitatem) erit puncti catenae C altitudo supra horizontalem ductam per O; at BC vel ON logarithmus numerorum erit catenae ibi latitudo seu a medio recessus puncti C. Tangentes autem et dimensio curvae et quadratura areae et centrum gravitatis tam lineae quam areae, adeoque superficies, et contentas solidorum rotatione genitorum circa rectam quamcunque pro axe sumptam, habentur ex paucis adscriptis ad figuram. Caeterum catenula chordae praestat, quia pondere non ita facile extenditur, flectiturque facilius.

Nunc usum subjicere placet, quomodo per lineam catenariam in plano ope catenulae suspensae physice descriptam possint inveniri Logarithmi, et quotcunque mediae proportionales adeoque multiplicatio, divisio, regula aurea, et quaecunque radicum extractio. Nempe dato numero $O\omega$, sit ipsi et unitati OA tertia proportionalis $O\psi$, et inter $O\omega$, $O\psi$ sit media arithmetica OB, ex B ad catenariam lineam ducatur ordinata BC, habebitur Logarithmus BC vel ON. Rursus dato Logarithmo ON, ex N angulo ad ON recto usque ad catenariam CA(C) ducamus NC, aut altitudinem sumamus OB, eique aequalem OR, ita ut R sit in horizontali ducta per verticem A; quo facto differentia et summa rectarum OR et AR erunt numeri quaesiti duo $N\xi$ et $(N)(\xi)$, logarithmum habentes ON datum.

G. G. LEIBNITII solutio problematis a Galilaeo primum propositi de natura et usu Lineae, in quam Catena vel Funis (extensionem non mutans) se proprio pondere curvat.

Catenariae lineae FCA(C)L latitudo C(C) est Logarithmus ON duplus. Altitudo NC vel OB est media arithmetica inter duos ejusdem Logarithmi numeros $N\xi$ et $(N)(\xi)$, quorum scilicet media Geometrica est unitas OA, ita ut si $O\,{}_3N = OA$, sit OA ad ${}_3N_3\xi$ in ratione certa hic exposita D ad K. Hinc ope catenae vel funiculi sine omni calculo licet invenire Logarithmos ex numeris, et numeros ex logarithmis. Praeterea pro tangentibus, dimensione lineae, spatii, et centris gravitatis utriusque inveniendis, sunt: $OR = OB$; $OR - AR = N\xi$; $OR + AR = (N)(\xi)$; Triangula OAR et CBT sunt similia, $AR = AC$; $\psi\omega = CA(C) =$ bis AC; Rectang. RAO = spat. AONCA. Sint G, P, Q centra gravitatis CA(C), AC, AONCA, et erit $O\vartheta + OB =$ bis $OG =$ quater $O\beta$, et $AE = GP = \beta Q$.

VIII.

DE LINEA EX LINEIS NUMERO INFINITIS ORDINATIM DUCTIS INTER SE CONCURRENTIBUS FORMATA EASQUE OMNES TANGENTE, AC DE NOVO IN EA RE ANALYSIS INFINITORUM USU.*)

Ordinatim applicatas vocare solent Geometrae rectas quotcunque inter se parallelas, quae a curva ad rectam quandam (directricem) usque ducuntur, quae cum ad directricem (tamquam axem) sunt normales, solent vocari *ordinatae* κατ᾽ ἐξοχὴν. Desarguesius rem prolatavit, et sub ordinatim applicatis etiam comprehendit rectas *convergentes* ad unum punctum commune, aut ab eo *divergentes*.

*) Act. Erudit. Lips. an. 1692.

Et sane parallelae sub convergentibus aut divergentibus comprehendi possunt, fingendo punctum concursus infinite ab hinc distare. Verum quia multis aliis modis fieri potest, ut infinitae duci intelligantur lineae secundum legem quandam communem, quae tamen non sint parallelae, vel convergentes ad punctum omnibus commune, aut a puncto omnibus communi divergentes, ideo nos tales lineas generaliter vocabimus *ordinatim ductas* vel ordinatim (positione) datas. Exempli causa, si speculum aliquod, vel potius sectio ejus a plano per axem, cujuscunque figurae positione datae, radios solares sive immediate sive post aliam quandam reflexionem aut refractionem advenientes reflectat, isti radii reflexi erunt infinitae lineae rectae ordinatim ductae, et dato quovis puncto speculi (caeteris manentibus) dabitur radius reflexus ei respondens. Verum ego sub ordinatim ductis non tantum rectas, sed et curvas lineas qualescunque accipio, modo *lex* habeatur, secundum quam dato lineae cujusdam datae (tamquam ordinatricis) puncto, respondens ei puncto linea duci possit, quae una erit ex ordinatim ducendis seu ordinatim positione datis. Ordine enim percurrendo puncta ordinatricis (verbi gratia lineae, cujus rotatione fit speculum paulo ante dictum, seu sectionis ejus per axem), ordine prodibunt lineae illae ordinatim datae. Porro etsi eae non concurrant omnes ad unum punctum commune, tamen regulariter duae quaevis tales lineae *proximae* (id est infinitissime differentes, seu infinite parvam habentes distantiam) concurrunt inter se, punctumque concursus est assignabile, et his concursibus ordinatim sumtis, nova prodit *linea concursuum*, quae est omnium concursuum inter proximas locus communis, habetque hoc egregium, quod omnes ordinatim ductas, quarum concursu formatur, tangit, quam proprietatem cum meditantibus satis appareat, demonstrare hic non est opus. Talis est *linea evolutione generans*, ea enim omnes rectas ad curvam evolutione generatam perpendiculares tangit, ex *Hugeniano* invento. Tales sunt lineae plures *coëvolutione generantes*, quas Dn. D. T. excogitavit, et *quasi Foci* ab eodem introducti, cum concursus radiorum non fiunt in puncto, sed in ejus locum *Focus* est *linearis*, concursu saltem duarum proximarum quarumcunque formatus. Sed cum haec non nisi ad rectas pertineant, sciendum est aliquid analogum et in curvis locum habere. Ita linea reflectens, quae radios secundum quamcunque praescriptam legem a lucido vel speculo aut lente (una pluribusve) datarum figurarum venientes reddit iterum convergentes (divergentes, aut parallelas), cujus constructionem in his Actis dedimus *), formatur ex concursu infinitarum ellipsium (hyperbolarum, aut parabolarum). Et hinc quoque methodus haberi poterat, problema illud prima fronte tam difficile solvendi: nam infinitae illae ellipses sunt ordinatim positione datae, adeoque et linea concursuum data est seu haberi potest. Et haec methodus ad multa alia praestanda aditum praebet, quae alias vix videbantur esse in potestate. Quae enim causa est, cur viam hanc novam Geometris aperire voluerim. Res autem pendet a *nostra Analysi indivisibilium*, et calculus hujus methodi tantum applicatio est nostri calculi differentialis. Nempe constituta semel aequatione locali (seu ad curvam lineam, unam ex ordinatim datis) sed generali (legem omnibus communem exhibente), hujus aequationis jam quaeratur aequatio differentialis, modo mox dicendo, et ope harum aequationum habetur quaesitum. Et quidem cum linea alicujus curvae ad punctum quodcunque in ea datum quaeritur tangens, tunc etiam tantum opus est *aequationem* ejus curvae *differentiare*, seu quaerere aequationem, quae sit differentialis ad aequationem curvae localem, sed tunc *parametri* seu rectae magnitudine *constantes*, lineae constructionem vel aequationis pro ipsa calculum ingredientes, quae per a, b etc. designari solent, censentur unicae seu *indifferentiabiles*, quemadmodum et ipsa recta tangens vel aliae nonnullae *functiones* ab ea pendentes, verb. gr. perpendiculares ad tangentem ab axe ad curvam ductae. Verum tam *ordinata*, quam *abscissa*, quas per x et y designari mos est (quas et *coordinatas* appellare soleo, cum una sit ordinata ad unum, altera ad alterum latus anguli a duabus condirectricibus comprehensi) est *gemina* seu *differentiabilis*. Hic vero in nostro calculo praesenti cum non quaeritur tangens quaecunque unius curvae in quocunque ejus puncto, sed tangens unica infinitarum curvarum ordinatim ductarum, unicuique in suo puncto respondenti occurrens, adeoque cum quaeritur uni ex his curvis assumptae respondens punctum contactus, tunc contrarium evenit, et tam x quam y (vel alia functio ad punctum illud determinandum aequivalens) est *unica*; sed aliqua minimum parameter a vel b debet esse *gemina* seu differentiabilis, ea nimirum, qua variata etiam variantur curvae ordinatim datae. Et quidem, licet unius curvae plures possint esse rectae constantes seu parametri (exempli causa ellipsis omnis et

*) De Lineis opticis et alia. Act. Erudit. Lips. an. 1689.

hyperbolae pleraeque habent duas, cum parabola et circulus habeant tantum unicam), tamen hic semper oportet ex datis eo rem tandem posse deduci, ut unica tantum supersit *constans* (in eadem curva), *variabilis* (pro diversis), alioqui modus ordinatim eas ducendi non satis est determinatus. Interim nihil impedit cum plures dantur aequationes determinantes, considerari plures parametros ut differentiabiles, cum etiam plures aequationes differentiales pro ipsis determinandis haberi possint. Et plerumque datur *constantissima* (una vel plures) seu parameter communis omnibus ordinatim ducendis, adeoque litera eam designans in calculo differentiali etiam manet indifferentiabilis. Hinc patet, eandem aequationem posse habere diversas aequationes differentiales, seu variis modis esse differentiabilem, prout postulat scopus inquisitionis. Imo fieri posse expertus sum, ut plures modi differentiandi eandem aequationem jungantur inter se. Haec omnia explicanda essent distinctius atque exemplis illustranda, si institutiones quasdam novae nostrae *Analyseos infinitorum* tradere vellemus; sed ea res nec hujus est loci nec temporis nostri. Et qui priora nostra intellexerint, ac porro meditari volent, ad haec quoque non difficulter pertingent, et eo quidem jucundius, quod in partem inventionis venire sibi videbuntur. Vocabulis utor subinde novis, sed quae ipse contextus explicat, neque ego in verbis facile novare soleo, nisi cum evidens est fructus, non tantum ad brachylogiam (alioqui enim vix licuisset haec sine multiplici calculo tradere), sed et ad quandam, ut ita dicam, admonitionem atque excitationem mentis, atque universalia animo concipienda.

IX.

AENIGMA ARCHITECTONICO-GEOMETRICUM FLORENTIA TRANSMISSUM AD G. G. L. ATQUE AB HOC CUM SOLUTIONE REMISSUM AD MAGNUM PRINCIPEM HETRURIAE. A. MDCXCII.

SERENISSIMO HETRURIAE MAGNO PRINCIPI.

Quam dudum optavi occasionem testandae devotionis, eam Tuo beneficio nunc tandem, DOMINE, sum consecutus. Nam ex quo coram in Te venerari datum fuit excelsum animum, effusam humanitatem, divinam ingenii aciem, et (ne cetera meas laudes supergressa verbis deteram) hereditariam ac jam coelo inscriptam a Galilaeo inclytae Gentis Tuae, humanum genus per scientiarum incrementa demerendi gloriam qua magnum Patrem Avumque plus quam aemularis; ab eo tempore semper ardebat animus publicare admirationem meam. Sed visum est, quae nunquam satis laudantur, tutius silentio coli; neque is mos est mihi, ut scriptis facile obstrepam, donec jussu (ut apparet) Tuo ad me delata Quaestio Geometrica, jus eloquendi censa animi, ipsa loquendi necessitate fecit.

Aenigma est perelegans, quod mitti curasti, et fructuosum ad augmenta scientiae; nam solutio ejus occasionem mihi dedit, innumerabilibus modis superficiei sphaericae partes non in plana tantum, sed et in quadrata redigendi, et quod idem est, absoluta ratione mensurandi, quod nescio, an cuiquam obtigerit ante natam quaestionem, Tuis nunc auspiciis in medium propositam. Lunulam quandam suam quadravit Hippocrates Chius, jam Aristoteli celebratam; sed illa plana est, nec curvitatem nisi in peripheria habet: Lunulae vero Sphaericae (quas et Carbasa appellare placet) nuspiam recto applicari possunt, et tamen nunc in figuram rectilineam convertuntur. Nec difficilis fuit Hippocratis indagatio: nostra est multo abstrusior, praesertim novas artes, quibus utimur, ignoranti. Et credibile est, Hippocratem illum in suum inventum incidisse, antequam quaereret, quod magis Syntheseos est: Nos propositam aliunde quaestionem promte dissolvimus, quod Analytici officium esse constat. Arctis etiam limitibus Hippocratis epicherema

continetur; nam unico tantum casui eique simplicissimo par fuit; nec videtur assecutus, quod facile quidem, sed nostro tamen aevo primum repertum est, datis duobus Sectoribus communem chordam habentibus posse quadrari Lunulam, modo anguli Sectorum sint in ratione duplicata reciproca radiorum. Nobis ita obsecundavit materia, ut a data superficie sphaerica, fornices datae magnitudinis (infra certam tamen magnitudinem consistentes) abscindere possimus, quod est, propositum problema construere infinitis modis.

Si quid autem praestitimus, primas gratias Tibi, SERENISSIME PRINCEPS, deberi censeo. Nam Autor quaestionis a Tua propensione ad scientias videtur animos sumsisse: Ego vero (fatebor enim) nisi Tua impulisset autoritas, non facile ad hanc disquisitionem accessissem, distractissimus per tot alia laborum, qui a me passim exiguntur, et in Geometricis non tam problemata specialia, nisi singulari utilitate commendentur, quam generales methodos aestimare solitus. Secundas vero gratias ipsi Autori quaestionis deberi agnosco; tertio loco ipse contentus: nam cum solverit nodum, ut ipse profitetur in programmate, quod non utique pusilli Geometrae esse censeo, quicquid istius modestia profiteatur, non tantum primitias sibi jure vindicat, sed etiam occultata licet solutione, fecit tamen ut alii intelligerent, quid fieri queat in quo magnum est inveniendi subsidium, tametsi me quoque dudum aditum ad ista quendam Analyseos observasse recorder. Sed exequendi neque otium, neque adeo voluntas admodum fuit, in tanta copia eorum, quae dudum in potestate habeo premoque, sive affecta in schedis, sive animo tantum designata, neque unquam proditura, nisi (in tanta brevitate temporis et rerum varietate) accedant auxiliares manus, aut peculiaris alicubi causa illuc potissimum vertat mentem.

In his (ut Geometrica tantum nunc memorem) illud non infimum est (quod constitui dudum, nec parum jam editis praeceptis speciminibusque promovi), Analysin novo quodam calculi genere extendere ad altiora illa et Algebram Transcendentia, in quibus hactenus haesit Geometria, etiam post publicatas Cartesii artes. Atque istis quidem speciminibus etiam haec solutio poterit annumerari. Mihi in votis est, nec conspirantibus aliis desperatum, perfecta (si potissima spectemus) Analysi eo reductam videre Geometriam, ut absolutum hac difficultate humanum genus, in ipsa natura concretisque corporibus majore fructu ac voluptate imposterum Mathesin exerceat suam, agnoscat Divinam. Quod si acies hominum, vera methodo velut armata, eo sese convertet serio, non dubito aliquando magna et mira proditura ad superandos morbos, ad augendas vitae commoditates, ad cognoscenda DEI miracula, in natura edita, eaque in re vel hujus seculi, ac vestrae Domus praeclarissimo experimento animamur. Videturque nunc sese paullatim aperire major quaedam inveniendi Ars, ne suspicione quidem libata anterioribus, in tantum mentibus futura auxilio, in quantum vestris illis Perspicillis ac Tubis vis oculorum adjuvatur.

Equidem vereor, ne tantas res magis praeparemus posteris, quam ipsi gustemus. Sed hoc culpa hominium praesentium fieri arbitror, tam perfunctorie tractantium necessaria, tam curiose agitantium vana, imo damnosa. Sane cum illa specto, quae jam tum, hoc praesertim aevo, in potestate sunt mortalium ad augendam felicitatem suam multaque mala depellenda, aegre seculo possum ignoscere, et voluntariam coecitatem velut gravissimam irati coeli poenam deploro. Nam si expergisceremur, possemus ipsi fructus laborum percipere, et paucorum annorum compendio aliquot ventura saecula praevenire. Huic communi malo mederi, maxime Principum est, sed magnorum, sed Tui similium, quales utinam multos haberet Orbis! A Te certe quantum pollicear communi hominum utilitati ac profectui, malo alii hoc loco ex silentio meo intelligant, quam invitae aures Tuae ferant. Et cavendum jam est, ne Epistola ad Te mea fiat ipsa tractatione Tibi destinata prolixior, quamquam talia spatio verborum aestimari non debent, nec quicquam facilius est, quam in magnum volumen diffundere, quae paucis indicare contenti sumus. Vale, SERENISSIME PRINCEPS, cum magno Patre, et inclyto Fratre, summae ad omnia, et ut verbo dicam, vestrae indolis Principe, et quod aliquoties etiam absenti, antea per Baronem Bodenhusium nostrum, his ipsis studiis excellentem, nuperrime etiam per illum totius Europae eruditae commercio celebratum Magliabecchium vestrum, insignes Viros et mihi amicos, nuntiari curasti, gratiam mihi Tuam serva. Dabam Hanoverae d. 28 Maji A. 1692.

AENIGMA GEOMETRICUM DE MIRO OPIFICIO
Testudinis Quadrabilis Hemisphaericae
A D. PIO LISCI PUSILLO *) GEOMETRA propositum die 4. April. A. 1692.

Cujus divinatio a secretis artibus illustrium Analystarum vigentis aevi exspectatur, quod in Geometriae purae Historia tantummodo versatus, ad tam recondita videatur invalidus.

Inter venerabilia eruditae olim Graeciae monumenta extat adhuc, perpetuo equidem duraturum, Templum augustissimum ichnographia circulari, ALMAE GEOMETRIÆ dicatum, quod Testudine intus perfecte hemisphaerica operitur; sed in hac fenestrarum quatuor aequales areae (circum ac supra basim hemisphaerae ipsius dispositarum) tali configuratione, amplitudine, tantaque industria ac ingenii acumine sunt extructae, ut his detractis superstes curva Testudinis superficies, pretioso opere musivo ornata, Tetragonismi vere geometrici sit capax.

Quaeritur modo, quae sit, qua methodo quave arte pars ista hemisphaericae superficiei curvae quadrabilis, tensae ad instar carbasi, vel turgidi veli nautici, ab Architecto illo Geometra fuerit obtenta? et cui demum plano geometrice quadrabili sit aequalis?

Praesentis aenigmatis enodatio (quod spectat ad hujus admirabilis Fornicis tum Constructionem expeditissimam, tum Quadraturam) *Serenissimo* FERDINANDO *Magno Principi Etruriae*, scientiarum et nobiliorum artium *Cultori ac Patrono Generosissimo*, ab eodem Aenigmatista oblata jam est; qui quidem simul non dubitat, quin hoc ipsum aenigma a singulis literario in orbe degentibus hodie praeclarissimis Analystis sit statim divinandum, proprias quadrationes impertiendo singularis Testudinis hujus tetragonismicae ab hemisphaerica dissectae, et ipsorum per acutas indagines multiplicesque industrias ad hoc unum idemque geometricum collimantes impatienter expectat, ut hinc, qui temere contumelias in Geometriam jacere audent, silere discant, vel potius maxima cum voce exclament: *O unica verorum sciscitabilium Scientia a Divina* in hominum *mente* infusa, ut haec imperviis, mutabilibus, fallacibusque contemtis, aeterna ista, quae semper et unicuique sunt eadem, tantum appetat, nilque aliud unquam magis innocuum scire perquirat.

*) Diesen Namen hatte *Viviani,* der die Aufgabe vorlegte, angenommen.

Aenigma a G. G. L. solutum est 27. Maji styli novi 1692, ea scilicet die, qua ad eum pervenit, et proximo cursore, id est tertia abinde die, cum hac solutione et Epistola ad Magnum Principem Hetruriae remissum. Solutio autem haec est.

Superficiem Sphaerae Archimedes demonstravit aequalem esse circulo, cujus diameter sit dupla diametri Sphaerae. Idem viam ostendit, qua portio quaecunque Sphaerae, arcus circuli rotatione genita adeoque vel uno circulo abscissa vel duobus comprehensa, ad circulos et circuli portiones reduci potest. Triangulum Sphaericum tribus circulis magnis contentum dudum dimensi sunt Geometrae. Nam quadrupla Trianguli area est ad superficiem Sphaerae, ut summa angulorum, duobus rectis minuta, est ad duos rectos. Hinc jam, cum dentur et triangula duobus circulis magnis et uno minore ambos normali comprehensa, facile habentur etiam illa, in quibus anguli sunt qualescunque; imo in triangulo jam magnitudine dato, alium circulum ex aliquo ejus angulo educendo, dantur et triangula comprehensa uno magno et duobus minoribus, ac denique tribus circulis quibuscunque. Sed majus aliquid hic agitur, ut scilicet mensurentur portiones superficiei sphaericae aliis quoque lineis contentae, et quod potissimum est, ut assignentur, quae sint absolutae quadrabiles. Videram dudum patere ad haec aditum, sed non omnia vacat agere; itaque non attigi, donec nuper Reverendissimus et Illustrissimus Abbas *de Monte acuto*, Magni Ducis Hetruriae Ablegatus ad aulam Caesaream, jussu Serenissimi Domini sui hoc mihi elegantissimum aenigma Geometricum typis editum attentandum misit. *Quaeritur forma Templi Hemisphaerici, sed quatuor aequalibus ac similibus similiterque positis fenestris ita interrupti, ut his detractis reliquam hemisphaericae superficiei sit absolute quadrabile.* Hunc nodum aggressus ea ipsa, qua literas accepi, die solvi, et quidem infinitis modis, neque enim determinatum problema est. Non tamen ideo facile putari debet, aut solutu indignum; sed rem paucis exponere operae pretium erit, additis etiam nonnullis, quae longissime ultra quaesitum extenduntur.

(1) Si sphaerica superficies in Elementa resolvatur ductis meridianis et parallelis, areolae Elementares inter duos meridianos duosque parallelos comprehensae erunt in ratione composita elementorum aequatoris inter meridianos et elementorum axis inter parallelos, aequalesque productis ex his elementis in se invicem respective ductis, ita fig. 130 areola LN ad areolam NR in ratione

composita HG ad GQ et ST ad TV. Quod secundum meam *Analysin infinitorum differentialem* ita apparet, si PK vel KH sit radius r, et PL arcus sit a, et ejus sinus versus PS sit x, et sinus rectus LS sit y, et QH sit v, fiet LM, da, et ST, dx, et GH, dx, et NM, $ydv : r$ et $da = rdx : y$. Jam areola LN est NM in LM, ergo est dvdx. Haec prolixius non explico, quod mea principia tam *Geometriae incomparabilium*, quam *Analyseos infinitorum* in Actis Eruditorum jam prodiere.

(2) Iisdem positis, trilineum elementare duobus meridianis et elemento paralleli comprehensum aequatur rectangulo sub sinu verso graduum meridiani et elemento aequatoris inter meridianos intercepto. Nempe in eadem figura 130 PMNP aequ. PT in GH, seu superficiei cylindricae elementari GHAD. Nam quia LMN aequ. dvdx per praecedentem, ergo trilineum elementare sphaericum PMNP, quod est summa omnium hujusmodi areolarum inter P et M (manente semper eadem dv) seu $\int \overline{dx\,dv}$ erit xdv.

(3) Trilineum in superficie sphaerica duobus arcubus meridianorum (seu circulorum magnorum) et linea alia quacunque subtendente comprehensum aequatur portioni superficiei cylindricae, cujus basis sit arcus aequatoris inter meridianos interceptus, ipsa autem superficies formetur, dum puncto, quo quisque meridianus secat aequatorem, normaliter ad planum aequatoris insistit recta, aequalis sinui verso graduum meridiani, inter polum et lineam subtendentem interceptorum. Nempe in eadem fig. 130 dum respective aequantur HF, GD, QB ipsis PS, PT, PV, et ita in reliquis punctis, tunc portio superficiei cylindricae HQBF (seu superficies ungulae) aequatur trilineo in superficie sphaerica descripto PMRP, nam quia (per praecedentem) FHGD aequatur ipsi PMNP, et DGQB ipsi PXRP, et ita in caeteris quotcunque, consequens est tota totis aequari, PMRP ipsi HQBF.

(4) Superficies cylindrica, quae fit, dum sinus recti punctis respondentibus arcus circuli normaliter ad planum circuli insistunt, aequatur rectangulo sub radio et portione axis inter sinus rectos extremos intercepta, et proinde quadrari absolute potest. Ita in fig. 131 si ubique BC sit aequ. AB, superficies cylindrica B(B)(C)C aequabitur rectangulo sub radio et A(A). Haec propositio etsi ex calculo nostro paulo ante posito statim derivari possit, quia tamen dudum innotuit Geometris, non est cur immoremur. Videantur qui de linea Sinuum et Cycloide egere.

(5) Quadratura Carbasi seu Lunulae sphaericae modis descriptae, Res nova. Sit in figura 132 hemisphaericae superficiei quadrans PDQSAEP, unde abscindatur carbasus seu Lunula sphaerica PEALλP per lineam ALLP ita in sphaerica superficie ductam, ut ducto meridiano PLS per L, occurrente aequatori in S, sit FS vel FΣ sinus rectus ipsius QS vel ipsius QΣ arcus aequatoris, aequalis ipsi PB, sinui verso ipsius PNL arcus meridiani. Haec Carbasus integra PEALλP aequatur ipsi plano Kψ, quod est quadratum radii sphaerae. Sed et portio ejus quaecunque habetur. Nam $P_1N_1L_3LP$ aequatur rectangulo ${}_1F{}_3M$ comprehenso sub radio et ${}_1F{}_3F$, differentia sinuum versorum Q_1F, Q_3F, quos habent extremi arcus aequatoris Q_1S et Q_3S. Haec ita demonstrantur: Rectae Sω aequales ipsis FS vel PB insistant arcui aequatoris QSA normaliter ad planum aequatoris KAQ; ita formabunt scutum ACωQSA, quod est medietas superficiei cylindricae artic. praecedenti descriptae. Jam quoniam Sω aequ. PB, ideo (per artic. 3) carbasi portio $P_1N_1L_3LP$ aequatur scuti portioni ${}_1S_1\omega_3\omega_3S_1S$, sed haec aequatur rectangulo ${}_1F{}_3M$ per act. 4. Similiter tota carbasus PEALλP aequatur toti scuto ACωQSA per (3), et hoc aequatur plano Kψ, quod est quadratum radii per (4), ut proponebatur.

(6) Carbasum sphaericam efficere, quae sit in data ratione ad quadratum radii sphaerae, ratione, inquam, minoris ad majus. Hoc fiet lineam PLLA ducendo sic, ut PB sinus versus ipsius arcus PNL (portionis meridiani PLS) non sit aequalis ipsi FS sinui recto ipsius arcus QS (portionis aequatoris QSA) ut in praecedenti, sed in data ratione minor; unde manifestum est, in eadem ratione et carbasum quadrato radii minorem fore.

(7) Testudinem hemisphaericam aequaliter quadrifenestratam efficere, ita ut hemisphaerii superficies demtis fenestris sit quadrabilis, idque infinitis modis, adeo ut hemisphaerica haec superficies perforata sit in data ratione ad quadratum diametri, ratione, inquam, minoris ad majus, nempe si in Testudinis seu templi hemisphaerici quadrante quovis fiat, quod factum est in quadrante PEASQDP fig. 132. Nam haec hemisphaerica testudo perforata constabit quatuor carbasis, ex quibus una sit PλLAEP, ex fenestris autem quatuor (seu foraminibus) erit una PλLASQDP. Et per artic. 5 fornix seu testudo sic perforata tota aequabitur quadatro diametri (nempe quadruplo quadrati a radio seu carbasi) aut (per 6) erit in data ratione minor, quod erat faciendum. Est autem QA portio basis

seu quadrans horizontis; P, Zenith; PA, PQ quadrantes azimuthales.

(8) Alias testudines hemisphaericas perforatas quadrabiles efficere. Exempli causa invertatur figura, ut A fiat Zenith et PQ arcus Horizontis, tunc alius fiet quadrans testudinis ex carbaso et fenestra corniculata (ut prius) constans, sed inversis. Aliter invertatur figura, ut fiat Q Zenith, et AP arcus horizontis seu basis, habebitur quadrans testudinis, quae tota constabit ex quatuor muris seu fornicibus, unaque apertura a summo ad imum quadrifide se diffundente inter muros; sed tamen iisdem positis horizonte et Zenith, testudinem quoque quadrifenestratam quadrabilem sic efficiemus: Ponamus meridianum $P_2N_2L_2S$ bisecare aequatoris quadrantem QSA, quadrans igitur hemisphaericus PQSAP medietatem $P_2N_2L_2SAEP$ habebit constantem ex carbaso PEA_2L_2NP et apertura A_2S_2LA. Quod si jam idem fiat in altera medietate quadrantis, quae est $P_2N_2L_2SQDP$, ducendo QH_2L lineam aequalem et similem ac similiter positam ipsi A_3L_2L, constabit quadrans hemisphaericus carbaso quadrabili $PDQH_2L_3LAEP$ et apertura QH_2L_3LASQ sive fornice quadrabili et fenestra; et idem faciendo in caeteris quadrantibus, componetur testudo quadrifenestrata, sive P sive Q sive A sit Zenith, quae aequabitur facto ex radio sphaerae, ducto in diagonalem quadrati circulo magno circumscripti.

(9) Haec omnia licebit aliter efficere infinitis adhuc modis. Hactenus feceramus, ut PB esset aequalis ipsi FS, aut in data ad eam ratione: sed innumeris modis haec variari possunt salva quadrabilitate, quot fere modis dantur figurae planae quadrabiles, imo secundum datam quamvis quadraturam. Exempli causa, si punctum L sumatur ita, ut PB (sinus versus ipsius arcus PNL, qui est portio meridiani PLS) sit aequalis differentiae inter tangentem et sinum rectum ipsius arcus QS, carbasi portio $P\lambda_2L_2NP$ aequabitur spatio plano Hyperbolico, quod facile determinari potest ex notissimis. Nam haec differentia in elementum arcus est ut differentia radii a secante ducta in elementum sinus versi, quam ex Hyperbolae quadratura pendere constat. Sed et, si quaeratur *constructio carbasi quadraturae datae*, res praestari potest, exempli causa ut portio $P\lambda_2L_2NP$ aequetur dimidio quadrato QF. Quaeritur PB; fiet summ. PB in ${}_1S_2S$ aequ. dimidio quadr. QF; ergo PB in ${}_1S_2S$ aequ. QF in dQF, adeoque PB ad QF (ut ${}_1S_2S$ ad dQF seu ut ${}_1S_2S$ ad ${}_1F_2F$, hoc est) ut QK ad SF. Itaque si fiat PB ad QF ut QK

ad SF, dicta portio aequabitur dimidio quadrato Q_2F, et tota carbasus dimidio quadrato radii. Quin et si sit PB aequ. KF, aequabitur iterum carbasus quadrato radii. Sed et portio ejus quaevis inter meridianos facillime quadratur.

Scholium. Non inelegans nec inutile futurum erat, testudinum formas delineationibus exprimere, sed temporis brevitas effecit, ut Geometricis oculis scribere contenti nunc essemus. Addi et hoc non inutile erit, posse etiam simili Methodo quaeri KB (pro PB) sic ut portiones potius versus aequatorem, quam versus polum quadrentur; posse etiam in unum addi areolas, non ut hactenus inter duos meridianos, sed inter duos parallelos comprehensas, et zonam elementarem sphaericam fore vdx, et inde quadrabilem carbasum orituram, prout arcus QS in rectam extensus et in B ipsi PK normaliter applicatus figuram quadrabilem praebet. Sed haec atque similia ex positis comminisci facile est; unde fieri potest, ut constructiones etiam elegantiores aliquando nostris nascantur.

X.

NOUVELLES REMARQUES TOUCHANT L'ANALYSE DES TRANSCENDANTES, DIFFÉRENTES DE CELLES DE LA GÉOMÈTRIE DE M. DESCARTES.*)

Il n'est pas mal-aisé à ceux qui sont versés dans l'Algébre ordinaire, de calculer par des exposans en lettres, tout comme en nombres, lorsque ces lettres ou ces nombres signifient les grandeurs connues. Mais lorsqu'elles signifient les grandeurs mêmes qu'on demande, ou qui ne sont pas déterminées, personne n'a encore montré la façon d'y calculer. Dans le second mois de la première année des Actes de Leipsic**), je proposai cet exemple aisé, il y a déjà dix ans. Soit l'équation $x^x + x = 30$, on demande la valeur du nombre x. Il est visible que 3 y satisfait, car $3^3 + 3$, c'est-à-dire $27 + 3$ fait 30. Mais comme il arrive souvent que la grandeur demandée n'est pas trouvable en nombres rationels, comment faire? Je réponds qu'alors elle n'est pas même trouvable en

---

*) Journal des Sçavans de l'année 1692.

**) Siehe die Abhandlung: De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus.

grandeurs ou nombres irrationels, qui se puissent obtenir par la Géométrie ordinaire, ou par les méthodes de la Géomètrie de *Mr. Descartes.* Car une telle équation n'est d'aucun degré connu; et le problème ne sçauroit être plan, ni solide, ni quarré-quarré, ni sursolide etc. Et par conséquent pas une des lignes que *Mr. Decartes* veut que nous croyions seules géométriques, ne le peut construire. Ainsi il faut recourir aux lignes d'une nouvelle espèce, que j'appelle transcendantes, parce qu'il n'y a point de degré qu'elles ne passent. J'ajouterai qu'encore les tetragonismes (excepté certain cas) dépendent de ces courbes et de ces équations transcendantes. Et *Mr. Decartes* a été obligé d'exclure toutes ces choses de sa Géomètrie, pour maintenir ce qu'il avoit avancé, que tous les problêmes géométriques se peuvent résoudre par sa methode, ce qui n'est point. Je mettrai ici un exemple de la solution d'un tel problême par les logarithmes. Comme il est aisé, il servira à me faire mieux entendre.

Soit $c^x = a, b^{\frac{x-1}{\cdot}}$, on demande x. Je reponds que ce nombre sera égal à ce qui provient, lorsque le logarithme d'*a* moins le log. de *b* est divisé par le log. de *c* moins le dit log. de *b*. En voicy le calcul. En vertu de l'équation donnée et par la nature des logarithmes il y a : x , log. c = log. a + $\overline{x - 1}$ log. b. Donc x, log. c — x, log. b = log. a — log. b, et par conséquent x est log. a — log. b divisé par log. c — log. b. On a rencontré de tels exemples, en raisonnant sur l'intérêt.

XI.

GENERALIA DE NATURA LINEARUM, ANGULOQUE CONTACTUS ET OSCULI, PROVOLUTIONIBUS, ALIISQUE COGNATIS, ET EORUM USIBUS NONNULUS.*)

Cum nihil mihi sit gratius, quam qualiacunque tentamina mea Viris egregiis digna videri quae perficiantur, perplacuere quae clarissimus Basileensium Professor Bernoullius de linearum osculis nupero Martio in Actis Erud. publicavit.**) Cumque animadverte-

---

*) Act. Erudit. Lips. an. 1692.

**) Es ist dies die Abhandlung von Jac. Bernoulli: Additamentum ad solutionem Curvae Causticae Fratris Joannis Bernoulli, una cum Meditatione de Natura Evolutarum et variis osculationum generibus.

rem cogitationes quidem nostras in summa ipsi probari, nonnulla tamen aliter constituenda judicari, quod adeo non aegre fero, ut quoties doceor, in lucro ponam; meum esse putavi, rem denuo examinare, paratissimo ad retractandum animo, si monitis contrariis Doctissimi Viri locum dari posse deprehendissem.

Statueram ego, *contactum* continere duas intersectiones coincidentes; *osculum* continere plures contactus coincidentes, et osculum quidem primi gradus esse, quando coincidunt contactus duo seu intersectiones quatuor; osculum secundi gradus, quando coincidunt intersectiones sex aut contactus tres etc., et circulum osculantem, sive maximum aut minimum tangentium intra vel extra in proposito puncto circulorum (qui scilicet omnium tangentium proxime ad curvam accedit) esse curvedinis mensuram et definire quantitatem anguli contactus, ita ut angulus contactus duarum linearum se tangentium sit idem qui circulorum ibi eas osculantium. Et in lineis, quas circulus in pluribus punctis secare potest, altiora etiam oscula posse oriri, cum omnes intersectiones in unum coalescunt, atque ita aliquando in casu maximae vel minimae curvedinis, seu transitus a curvedine crescente ad decrescentem, vel contra, coincidere oscula duo seu contactus quatuor, intersectiones octo. Observavi etiam postea, centrum circuli curvam propositam osculantis semper cadere in lineam, quae evolutione fili propositam generare potest, et unicam (suae seriei) esse perpendicularem illam, quae ex centro osculantis circuli ad lineam duci possit, sive unicam esse *unicam,* hoc est unicam esse maximam vel minimam ex eodem puncto ad curvam educibilem, cum ex aliis punctis intra curvam plures, et duae saltem perpendiculares, id est in sua serie maximae vel minimae, seu *duae suae seriei unicae* ad curvam duci possint. Et cum constet, aliam atque aliam lineam evolutione describi, prout filum producitur longius, animadverterem olim (ut hoc obiter dicam) eas quas *Dn. Bernoullius* nuper vocavit condescriptas esse *parallelas* inter se, ita ut una sit ab alia ubique aequidistans (seu aequalis ubique minimi intervalli, quod est recta minima ab una ad aliam ducenda) vel ut recta perpendicularis ad unam sit alteri quoque perpendicularis, quae dudum mihi fuit definitio *parallelismi* in genere sumti. Hanc nostram curvedinis mensuram usumque Evolutarum etiam primo Evolutionum inventori celeberrimo *Hugenio* placuisse, ex solutione catenariae lineae animadverti. Porro cum tres intersectiones circuli et curvae coincidant, notavi

flexum oriri contrarium, id est contactum sumtum cum intersectione, quemadmodum et coincidentes intersectiones quinque dant contactum cum flexu contrario coalescentem seu intersectionem cum osculo primi gradus, et intersectiones septem coincidentes dant flexum contrarium cum simplici osculo seu osculum secundi gradus cum intersectione coalescens. Unde intelligitur, quotcunque intersectiones coincidentes in contactus, oscula aut flexus contrarios resolvi posse. Et quidem in contactu vero atque osculo recta vel circulus lineam ab utraque parte tangit extrorsum, vel ab utraque parte introrsum; sed in flexu contrario unam partem tangit extrorsum, alteram introrsum, et ita compositum non tangit, sed secat.

Causam quoque, cur linea evolutione generans locus sit centrorum omnium circulorum lineam propositam osculantium, ita explicare mihi videbar: Sumantur duo puncta curvae A et B, et ducantur rectae ad curvam perpendiculares in A et in B, earum intersectio communis C dabit centrum circuli, qui radio CA descriptus tanget curvam in A, radio vero CB descriptus tanget eam in B, sed si coincidant A et B sive inassignabiliter distent, hoc est, ubi duae perpendiculares concurrunt, coincidunt duo contactus, duoque circuli tangentes abeunt in unum, qui curvam osculabitur; sed per hunc ipsum concursum perpendicularium inassignabiliter differentium invenientur et lineae evolutione generantes, ut ex *Hugeniano* de Pendulis opere patet. Porro circulus, cujus centrum est in recta arcui ad easdem partes cavo perpendiculariter occurrente, per punctum occursus descriptus, arcum non secat, sed tangit. Itaque sicubi secat, necesse est ibi punctum adesse flexus contrarii, seu non esse lineam ad easdem partes cavam. Recte autem animadvertit *Dn. Bernoullius,* intersectione simplici ad contactum simplicem, vel ad osculum seu contactum multiplicem accedente, contactum mutari in sectionem; sed hinc manifestum est, cum circulus curvam osculatur, regulariter (id est excepto flexus contrarii puncto) coincidere quatuor intersectiones seu duos contactus, adeoque hanc ipsam esse naturam osculi primi gradus, quandoquidem id osculum definimus ordinaria osculatione circulorum, quae in quocunque curvae puncto regulariter locum habere potest, seu circulo curvedinem mensurante, qui scilicet proxime ad curvam accedit.

Et in universum dici potest intersectionum circuli cum alia linea numerum regulariter esse parem. Itaque non video, quomodo primi gradus osculum tribus intersectionibus explicari queat, ita scilicet ut tale osculum trium radicum sit regulare et tota curva diffusum, at osculum quatuor radicum seu quatuor coalescentium intersectionum pro secundo et singulari habeatur, nec nisi in punctis curvae determinatis contingat. Contra enim se res habet, et quatuor intersectiones seu duo contactus osculo cuique regulariter insunt; et in solo casu extremo, qui est flexus contrarii, nascens, ut ita dicam, vel moriens osculatio tribus intersectionibus contenta est. Unde nolui ex casu trium intersectionum peculiarem osculi gradum facere, cum praesertim ex contactu (cujus perfectior species osculum est) in intersectionem degeneraret. Eademque ratione et in altioribus osculatio sua natura paris est numeri radicum, nec nisi inflexus contrarii puncto in numerum imparem abit. Et sane cum circulus post contactum in puncto proposito curvam adhuc in duobus praeterea punctis secat, necesse est has intersectiones promoto circuli centro continue ad dictum contactum appropinquantes, tandem ambas simul contactui coalescere, nam cum quamlibet in eum pervenire necesse sit, ideo si alterutra sola ad contactum perveniente, circulus fiat proximus curvae seu oscularis, sequitur ambabus intersectionibus separatim pervenientibus ad coalitionem cum contactu proposito, duos dari circulos diversos lineae proximos seu osculantes per idem ejus punctum propositum transeuntes, quod est impossibile, nisi scilicet linea ibi secet semet ipsam, quo casu duarum vice fungitur, adeoque circuli illi duo revera lineas duas osculantur, licet unius partes, de quo hic non agitur. Facile etiam hinc intelligitur, si circulus post contactum internum secare curvam rursus (utrinque) possit, tunc in casu osculi (ubi duae sectiones contactui coalescunt) circulum osculantem esse extra curvam; et contra, ex contactu externo mox in casu coalescendi cum duabus reliquis sectionibus, fieri osculum internum, et ita transitum circuli, a contactu sectionem adjunctam habente ad osculum, esse transitum in oppositam curvae partem.

Sed et hoc notandum est, *minimam curvedinem* et *maximam obtusitatem* esse in puncto flexus contrarii, et recte dixit *Dn. Bernoullius*, circulum osculantem eo casu degenerare in rectam; radius enim est infinitus seu centrum cadit in lineae evolutae concursum cum sua asymptoto. Quoniam antequam duae proximae ad curvam perpendiculares, sibi occurrentes hactenus ad plagam pro-

positam, fiant sibi occurrentes ad plagam oppositam, seu ex convergentibus divergentes, debent fieri parallelae, quo casu earum concursus infinite abesse debet. Fieri tamen et aliunde potest, ut lineae generatae curvedo sit minima, seu maxima obtusitas, non quidem absolute, sed in toto aliquo arcu ad easdem partes cavo, seu in certa progressione. Cum scilicet talis est natura curvae per sui evolutionem generantis, ut evolutio continuari ultra certum punctum, et filum generans ulterius extendi nequeat, uti contingit cum curva evolvenda ex duabus convexitates sibi obvertentibus ac sese tangentibus composita est. Eodem modo prodibit maxima curvedo, seu minima obtusitas, ut lineae curvedo ex crescente rursus incipiat fieri decrescens; veluti si curva generanda non intra duos arcus generantes convexitate obversa se tangentes, sed extra earum angulum cadat. Neutro tamen modo generata linea per continuam fili evolutionem producitur.

Haec autem ut notarem, eo facilius adductus sum, quod linearum naturam in universum illustrant, mihique proferunt non tantum ad finiendam illam celebrem de angulo contactus controversiam, sed et a vaga logomachia ad usus solidos ac profuturos transferendam, et video nuper *Dn. Eisenschmid* dissertationem suam contra *Dn. Lagnium* defendentem ac de diametro umbrae in eclipsi Lunae loquentem ex hypothesi Terrae ovalis adhibuisse diametrum circuli, qui ovalem osculatur, seu cum ea angulum osculi (angulorum contactus minimum) facit atque ita quam proxime ad illam accedit, eo consilio, ut ex diversis proportionibus diametri umbrae ad diametrum lunae definiatur vera figura globi terrae. Quod quantum praestare possit, observationibus committo.

Cum haec scripsissem, venere in manus meas Acta mensis Maji, in quibus nova quaedam *Bernoulliana* *) legi, et lineae illius, cum qua rectae convergentes ad datum punctum, eundem constantem angulum (sed obliquum) faciunt, proprietatem elegantissimam ibi detectam, non sine voluptate observavi, aliaque video notata, quae generalem curvarum naturam illustrant. Plurimum igitur linearum doctrinam hodie promotam habemus tum explicata *flexus*

---

*) Leibniz bezieht sich hier auf die Abhandlung Jac. Bernoulli's: Lineae Cycloeidales, evolutae, ant-evolutae, causticae, anti-causticae, peri-causticae, earum usus et simplex relatio ad se invicem, Spira mirabilis, aliaque.

natura, tum adhibitis ad earum generationem *provolutionibus* pariter atque *evolutionibus.* Interiorem naturam *flexus* seu curvitatis aperuisse non nihil visus sum detecta *mensura anguli contactus,* ope scilicet circuli curvam *osculantis* seu maxime ad eam accedentis eundemque cum ea in puncto osculi flexum habentis, de quo tum antea, tum etiam hoc loco dictum est.

Quod ad *provolutionem* attinet, *Galilaeus,* ut arbitror, primus de lineis per eam generatis cogitavit, et *simplicissimam* ex iis *Cycloeidem,* quam clavus rotae in plano incedentis describet in aëre, considerare coepit, de qua multa a viris doctis sunt demonstrata. *Römerus* Danus, astrorum imprimis scientia clarus, cum in observatorio Regio Parisino versaretur, elegantes ut audivi proprietates detexit Cycloeidis altioris, cum rota scilicet sive circulus incedit super circulo, de quo tamen nihil ad me pervenit. *Newtonus* nuper de Cycloeidibus iisdem egregia et universalia dedit.

Evolutionem curvarum generatricem primus illustravit *Hugenius.* Eam cogitationem promovit *Tschirnhusius,* adhibitis (ut ego appellare soleo) *coëvolutionibus,* animadversoque quomodo tales lineae coëvolutae ut *foci* spectari possint, et radiorum quoque concursu generentur, considerata inprimis caustica, quae formatur radiis parallelis a speculo reflexis. Ego inde longius progressus sum, usumque reperi ad solvenda problemata (quorum in gratia potissimum suscipitur speculatio) *lineas*que *opticas* inveniendas, quarum ope radii redderentur ad datum punctum convergentes vel divergentes, aut etiam inter se paralleli. Quod alia etiam ratione praestitere *Newtonus* in Principiis, *Hugenius* in libro de Lumine. Observavi quoque eadem opera dari figuras *Acamptas,* quae etsi opacae et politae sint, radios tamen non reflectunt, et *Aclastas,* quae licet sint transparentes seu ex materia radios refringente, vi formae tamen suae et positionis ad Solem radios sine refractione transmittunt. His nunc observationes singulares *Bernoullius* adjecit. Caeterum ab *Hugenio* in tractatu de Lumine, et *Tschirnhusio* in Actis notatum est, causticam illam a speculo concavo sphaerico radios solares reflectente formatam simul esse cycloeidalem, provolutione circuli super circulo generatam. Postremo a me nuper proposita est *nova linearum formatio per concursum curvarum ordinatim datarum,* cum antea tantum radiorum seu rectarum concursus adhiberentur, cujus formationis ad problemata quaedam solvenda egregium usum comperi.

Eximia quaedam inesse videntur illis, quae de figura veli a vento tensi *Cl. Bernoullius* nuper disseruit, tametsi de tota re (in qua non desunt scrupuli) ob molem aliorum negotiorum non expensa, pronuntiare non ausim. Ex reperta a me mensuratione *loxodromiarum* per logarithmos equidem non parum practici fructus duci potest, difficilem tamen arbitror cursus aestimationem, quae longitudinibus definiendis sufficiat. Cum de deviatione navis Geometrica acribia agitur, non velorum tantum, sed et navis spectanda esset figura. Denique quod innuit, se Fratremque in calculo meo plurimum profecisse, id agnosco, gratulorque non illis magis, quam mihi. Valde autem nosse velim, an ultra metas illas sint provecti, ad quas ego perveni; id si ab ullis, certe ab ipsorum ingenio aliquando expecto, et gaudebo plurimum, si intellexero, praesertim cum mihi vix amplius in talibus ea qua prius intentione animi versari liceat. Caeterum a me quoque non difficulter solvitur illud Problema: Invenire lineam, cujus arcu aequabiliter crescente elementa elementorum, quae habent abscissae, sint proportionalia cubis incrementorum vel elementorum, quae habent ordinatae, quod in catenaria seu funiculari succedere verissimum est. Sed quoniam id jam a *Bernoulliis* est notatum, adjiciam, si pro cubis elementorum ordinatarum adhibeantur quadrata, quaesitam lineam fore logarithmicam; si vero ipsa simplicia ordinatarum elementa sint proportionalia elementis elementorum seu differentiis secundis abscissarum, inveni lineam quaesitam esse circulum ipsum.

XII.

SUPPLEMENTUM GEOMETRIAE PRACTICAE SESE AD PROBLEMATA TRANSCENDENTIA EXTENDENS, OPE NOVAE METHODI GENERALISSIMAE PER SERIES INFINITAS. *)

Cum antea Series infinitae fuerint quaesitae cum primo inventore *Nicolao Mercatore* Holsato per divisiones, et cum summo Geometra *Isaaco Newtono* per extractiones, visum mihi fuit, posse ad eas perveniri commodius et universalius per suppositionem

*) Act. Erudit. Lips. an. 1693.

ipsius seriei quaesitae tanquam inventae, ita ut terminorum coefficientes ex successu definirentur. Atque ita data lineae proprietate non tantum in calculo communi, sed et in summatorio vel differentiali aut differentio-differentiali etc. utcunque implicato semper ad seriem veniri potest, cujus ope quaesitum, si totam seriem concipias, exacte, si partem seriei adhibeas, quantumlibet appropinquando exhibetur. Exemplo res patebit, facili quidem et dudum proposito, sed ad intelligentiam apto, quaerendo scilicet vel Logarithmum ex numero, vel numerum ex Logarithmo.

Sit Ratio vel numerus $a+x, : a$, et Logarithmus sit $y = \int, adx :, a+x$ ob quadraturam Hyperbolae; fiet ergo $dy = adx :, a+x$ seu $ady : dx + xdy : dx - a = 0$. Si jam dato numero quaeratur Logarithmus, fiat $y = bx + cx^2 + ex^3 + fx^4$ etc., et fiet $dy : dx = b + 2cx + 3ex^2 + 4fx^3$ etc., itaque

$$0 = \left\{ \begin{array}{lll} ady : dx & = ab + 2acx + 3aex^2 + 4afx^3 & \text{etc.} \\ + xdy : dx & = \quad + \quad bx + 2cx^2 + 3ex^3 & \text{etc.} \\ - \quad a & = - a & \end{array} \right\} = 0$$

in qua aequatione explicata nec aliam indeterminatam quam x continente, ut omnes termini destruantur seu ut *aequatio* fiat *identica*, fiet $ab - a = 0$ seu $b = 1$, et $2ac + b = 0$ seu $c = -1 : 2a$, et $3ae + 2c = 0$ seu $e = 1 : 3a^2$, et $4af + 3e = 0$ seu $f = -1 : 4a^3$, et ita porro. Ergo fiet $y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3}$ etc.

Contra, si dato Logarithmo y quaeratur numerus $a + x, : a$, adeoque si quaeratur x, scribatur $x = ly + my^2 + ny^3 + py^4$ etc., fiet $dx : dy = l + 2my + 3ny^2 + 4py^3$ etc. Est autem utique per priora $a + x - adx : dy = 0$, unde

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} a + x = a + ly + my^2 + ny^3 + py^4 \text{ etc.} \\ - adx : dy = - la - 2amy - 3any^2 - 4apy^3 - 5aqy^4 \text{ etc.} \end{array} \right\} = 0$$

quae aequatio ultima ut destructis terminis fiat identica, erit $l = 1$, $m = (l : 2a =)\ 1 : 2a$, $n = (m : 3a =)\ 1 : 2.3a^2$, $p = (n : 4a =)\ 1 : 2.3.4a^3$, et ita porro, et fiet $x = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2a} + \frac{y^3}{1.2.3a^2} + \frac{y^4}{1.2.3.4a^3}$ etc.

Addamus aliud exemplum, prima fronte difficilius, cum scilicet inveniendus est sinus rectus ex dato arcu et radio, seu quod eodem redit (ob peripheriam practice satis datam) ex dato sinu toto et angulo. Sit arcus circuli y et sinus rectus x, radius vero

sit a; constat ex nostra Methodo differentiali, generalem relationem inter arcum et sinum posse exprimi hac aequatione $a^2 \overline{dy}^2 = a^2 \overline{dx}^2 + x^2 \overline{dy}^2$. Jam fiat $x = by + cy^3 + ey^5 + fy^7$ etc., erit $dx : dy = b + 3cy^2 + 5ey^4 + 7fy^6$ etc. Et hos valores ipsius x et ipsius $dx : dy$ substituendo in aequatione differentiali, explicatamque aequationem reddendo identicam seu terminos destruendo, invenientur valores assumtitiarum b, c, e, f etc. Sed idem multo brevius consequemur descendendo ad differentio-differentiales. Nam aequationem differentialem $a^2\overline{dy}^2 = a^2\overline{dx}^2 + x^2\overline{dy}^2$ rursus differentiando, posita dy constante, fiet $2a^2dx\, ddx + 2xdx\overline{dy}^2 = 0$ seu $a^2ddx + x\overline{dy}^2 = 0$; jam $ddx : dy^2 = 2.3cy + 4.5ey^3 + 6.7fy^5$ etc., ut patet valorem ipsius $dx : dy$ paulo ante habitum differentiando. Unde jam aequatio differentio-differentialis sic explicabitur:

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} x = by + cy^3 + ey^5 + fy^7 \text{ etc.} \\ a^2ddx : \overline{dy}^2 = 2.3a^2cy + 4.5a^2ey^3 + 6.7a^2fy^5 + 8.9a^2gy^7 \text{ etc.} \end{array} \right\} = 0$$

et destruendo terminos aequationis explicatae assumatur $b = 1$; jam $b + 2.3a^2c = 0$, ergo $c = -1 : 2.3a^2$, et $c + 4.5a^2e = 0$ seu $e = (-c : 4.5a^2 =)\ 1 : 2.3.4.5a^4$, et similiter $f = -1 : 2.3.4.5.6.7a^6$, sicque porro; hinc $x = \frac{y}{1} - \frac{y^3}{1.2.3a^2} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5a^4} - \frac{y^7}{1.2.3.4.5.6.7a^6}$ etc. posito a esse sinum totum seu radium, x sinum rectum et y arcum qui in praxi debet esse notabiliter minor radio.

Esto adhuc aliud exemplum, in quo ex data Tangentium proprietate quaeritur linea. Nimirum sit ordinata y, abscissa z, subtangentialis (ut Hugeniano verbo utar) seu portio axis intercepta inter tangentem et ordinatam sit t, quaeritur curva, in qua sit $t = yy - zy, : a$. Est autem generaliter ex legibus calculi differentialis $t : y = dz : dy$, ergo fit hoc loco $dz : dy = y - z, : a$ seu $adz + zdy = ydy$ seu $adz : dy + z - y = 0$. Sit $z = by + cy^2 + ey^3 + fy^4$ etc., fiet $dz : dy = b + 2cy + 3ey^2 + 4fy^3$ etc.; itaque

$$0 = \left\{ \begin{array}{lll} adz : dy & = ab + 2acy + 3aey^2 + 4afy^3 & \text{etc.} \\ + z & = \quad + by + cy^2 + ey^3 & \text{etc.} \\ - y & = \quad - 1.y & \end{array} \right\} = 0$$

et destruendo fiet $ab = 0$ adeoque $b = 0$, et $2ac + b - 1 = 0$ seu $c = 1 : 2a$, et $e = (-c : 3a =) - 1 : 2.3a^2$, et $f = (-e : 4a =)\ 1 : 2.3.4a^3$, et ita porro; unde $z = \frac{y^2}{1.2a} - \frac{y^3}{1.2.3a^2} + \frac{y^4}{1.2.3.4a^3} - \frac{y^5}{1.2.3.4.5a^4}$ etc. Caeterum colligitur ex supra inventis, si