soit egal au solide du quarré de BD et de la hauteur de $\frac{9}{4}$ AB, satisfera au Probleme.

Mais outre cette ligne BC il y en aura une infinité d'autres du même genre et aisées à trouver, qui feront le même effet, c'est à dire, que le corps pesant apres la chute par AB descendant par ces lignes, approchera encore egalement de l'horizon en temps egaux, mais plus lentement, que par BC.

Que si BD est double de BA, le temps de la descente par la portion de courbe BC sera egal au temps de la chute par AB.

H. D. Z.

Addition de M. L. à la solution de son probleme donnée par M. H. D. Z. article VI du mois d'octobre 1687.*)

Je n'avois garde de proposer ce probleme à des Geometres du premier rang, tels que Monsieur H. D. Z., ils doivent plustost juger des prix, à peu prés comme les quarante Academiciens. Cependant puisque M. H. a trouvé ce probleme digne de le resoudre luy même, je tacheray d'adjouter quelque chose.

On demande une ligne BD(D) tracée sur quelque plan, dans laquelle un corps pesant puisse descendre uniformement, et approcher egalement de l'horison en temps egaux, c'est à dire que les temps des descentes par BD, B(D) (fig. 118) soient comme les hauteurs perpendiculaires BC, (BC) et si les hauteurs C(C) et (C)[C] estoient égales, les temps des descentes par D(D) et par (D)[D] seroient aussi egales entre elles.

Je dis que *la Paraboloeide Quadrato-Cubique BD(D)[D] satisfera à la question et sera la Ligne Isochrone demandée dont le sommet sera B, et les quarrés des ordonnées CD comme les cubes des abscisses (de la touchante du sommet) BC.* Par exemple les abscisses BC, B(C) estant 1 et 4, les ordonnées CD, (C)(D) pourront estre $\frac{2}{3}$ et $\frac{16}{3}$, car les cubes de 1 et 4 sont 1 et 64,

*) Scrips. 4 Januar. 1688 Pilsnae in Bohemia. Haec missa autori Novellarum Reipublicae literariae. Bemerkung von Leibniz.

et $\frac{2}{3}$ estant à $\frac{16}{3}$ comme 1 à 8, leurs quarrés seront aussi comme 1 à 64. Cette ligne qu'on pourra maintenant appeller *Isochrone* (apres la decouverte de cette proprieté) est assez connue d'ailleurs aux Geometres, et *a esté la premiere de toutes les lignes courbes de la Geometrie ordinaire, à qui on ait donné une droite exactement egale.* Or il est manifeste que le corps pesant ne sçauroit descendre uniformement dans la ligne BD depuis le repos, car s'il commencoit par le repos, cette même uniformité le feroit continuer ce repos, c'est à dire il n'y auroit point de mouvement. Mais avec quelque vistesse ou tardité qu'il tende de descendre, il y aura moyen de luy assigner une infinité de ces Paraboloeides Quadrato-Cubiques, l'une au sommet B, les autres dans quelque autre point, comme D, depuis lequel ce corps continuera de descendre et d'approcher de l'horison avec cette même vistesse ou tardité. Si la descente uniforme doit commencer depuis le sommet B, le parametre de nostre *Paraboloeide isochrone* sera $\frac{9}{4}$ de la hauteur ou cheute perpendiculaire AB, qui a pu donner au corps pesant la vistesse qu'il a au sommet B.

Pour donner une regle de ce mouvement, supposons que le corps pesant ait acquis la vistesse qu'il a au point B en descendant par la perpendiculaire AB, et pour representer le temps de cette descente, menons à discretion BE normale à AB; puis traçons la parabole AEG dont l'axe soit ABC. De plus soit menée une droite FEH, qui touche la parabole en E et coupera l'axe en F; on sçait que FB est double d'AB. Continuons CG jusqu'en H, et menons EL parallele à BC, coupant CH en L, je dis que LH representera le temps de la descente par BD. On peut se passer de la parabole, si prenant FA egale à AB, on mene FEH, mais la parabole sert à rendre raison de cette operation, car ses ordonnées representent les temps de la cheute droite AC.

Voicy donc la regle: *Le temps LH de la descente uniforme sur une portion BD de la ligne isochrone est au temps BE de la descente perpendiculaire AB, qui a pû donner la vistesse acquise au commencement B de la ligne isochrone qu'elle touche, comme la hauteur BC de la descente isochrone au double de la hauteur AB de la descente perpendiculaire.* Car à cause des triangles semblables ELH et FBE, il est visible que LH est à BE, comme EL ou BC est à FB double d'AB.

Corollaire. Si la hauteur BC de la descente uniforme est double de la hauteur AB de la descente perpendiculaire, les temps LH et BE seront égaux, ce qui convient avec la remarque de Mons. H. Mais si le temps de la dite descente perpendiculaire estoit double de celuy de la descente uniforme, leurs hauteurs seroient egales. Et on peut resoudre de même tous les cas particuliers donnés.

Mais si on ne demande pas que la descente uniforme commence au sommet, alors la vistesse du commencement, ou bien la hauteur de la cheute de cette vistesse aussi bien que la paraboloeide isochrone estant données, il s'agit de trouver le point D où le corps pesant arrivant avec cette vistesse et continuant son mouvement dans la ligne D(D) descendra uniformement.

En voicy la regle generale: „*Lorsque le corps pesant tombe* „*de quelque hauteur ou horisontale qui passe par A, sur quelque* „*point D que ce soit de la ligne isochrone BD qui est touchée au* „*sommet B par AB perpendiculaire à l'horisontale et egale à* $\frac{4}{9}$ *du* „*parametre de la ligne isochrone; il commencera de descendre uni*„*formement dans la dite ligne depuis ce point D.*“ Ce qui suffit à determiner ces questions et à construire aussi les lignes mentionnées dans la figure de Monsieur H., appliquant les points convenables des autres lignes isochrones comme $\beta B\delta$ du sommet B de la principale BD, en sorte qu' A et α points pris au dessus des sommets B et β et determinants la hauteur de la cheute tombent dans une même horisontale $A\alpha$. C'est pourquoy le poids tombant d' A sur B pourra depuis B descendre dans toutes les isochrones qui se coupent en B, dont les points α tombent dans l'horisontale $A\alpha$. Mais BD à l'egard de la hauteur AB, est *la principale des Isochrones*, qui sert icy depuis le sommet et dans laquelle le poids arrivant de la hauteur AB descendra uniformement avec le plus de vistesse qu'il pourra, et la perpendiculaire AB elevée sur le point de rencontre du poids et de la ligne isochrone touche la principale BD au lieu qu'elle coupe les autres comme $\beta\delta$.

Il est aisé de donner la demonstration de toutes ces choses, lorsqu'elles sont deja trouvées, c'est pourquoy je ne veux pas m'arrester.

Analysis des Problems der isochronischen Curve.

Quaeritur Linea descensoria isochrona YYEF (fig. 119), in qua grave inclinate descendens isochrone seu uniformiter plano horizontali appropinquet, ita nempe ut aequalibus temporibus, quibus percurrantur arcus BE, EF, aequales sint descensus BR, RS in perpendiculari sumti.

Sit linea quaesita YY, cujus recta Directrix, in qua ascensus perpendiculares metiemur, sit AXX; abscissa AX vocetur x, et ordinata XY vocetur y, et ${}_1X_2X$ seu ${}_1Y_1D$ erit $d\bar{x}$ et ${}_1D_2Y$ vocetur $d\bar{y}$.

AX seu x est altitudo percursa seu descensus, dx est descensus incrementum, tempus ab A usque ad X, quod insumeretur descensu libero, foret ut celeritas eousque acquisita seu ut $\sqrt[2]{x}$, ergo incrementum hujus temporis (seu tempus quo libere percurritur incrementum spatii) erit ut $d\sqrt[2]{x}$ seu $dx^{1:2}$ seu $\frac{1}{2}x^{-1:2}dx$ seu $d\bar{x} : 2\sqrt[2]{x}$. Jam tempus quo nunc revera percurritur altitudo ${}_1X_2X$ in lineae inclinatae descensoriae elemento ${}_1Y_2Y$, quod tempus vocemus dt, est ad tempus quo eadem altitudo percurreretur in descensu libero seu ad $dx : 2\sqrt[2]{x}$, ut ${}_1Y_2Y$ ad ${}_1X_2X$ seu ut $\sqrt[2]{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}$ ad $d\bar{x}$, seu fiet $dt : \overline{d\bar{x} : 2\sqrt[2]{x}} :: \sqrt{d\bar{x}^2 : d\bar{y}^2} : dx$; cum enim celeritates sint aequales (non obstante inclinatione vel libertate), erunt tempora ut spatia; itaque erit $d\bar{t}\, d\bar{x} = d\bar{x}\sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2} : 2\sqrt{x}$. Quod verum est in omni linea descensoria, cujuscunque sit naturae, verum in nostra, cum $d\bar{t}$ elementa temporis descensorii debeant esse ut $d\bar{x}$ seu proportionalia descensibus fiet: $d\bar{x} = a\sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2} : 2\sqrt{ax}$, assumta *a* pro unitate, seu fiet: $4d\bar{x}^2 ax = aad\bar{x}^2 + aad\bar{y}^2$ seu $d\bar{y} = d\bar{x}\sqrt{4ax - aa} : a$ et $y = \int \overline{dx\sqrt{4ax - aa} : a}$. Quae summa ut inveniatur, ponemus $z = 4x - a$, fietque $d\bar{x} = d\bar{z} : 4$, ergo $y = \int \overline{dz\sqrt{az} : 4a} = \sqrt{a}\int \overline{dz\sqrt{z} : 4a}$. Jam $\int \overline{dzz^{1:2}} = z^{3:2} : \overline{3:2} = 2z\sqrt{z} : 3$, ergo $y = z\sqrt{az} : 6a$ seu $36ayy = z^3$ seu faciendo $b = 36a$ fiet $byy = z^3$. Ergo habemus Lineam descensoriam, quae est Paraboloeides quadrato-cubica, in qua quadrata ordinatarum yy sint ut cubi abscissarum z^3; latus autem rectam b seu BR erit 36a et $a = b : 36$. Ipsam autem AB sic inveniemus: in casu puncti B est $z = 0$, ergo $0 = 4x - a$ seu $x = a : 4$ seu $x = b : 144$; est autem in hoc casu $AB = x$, ergo fiet $AB = BR : 144$. Itaque si linea paraboloeidis quadrato-cubicae BYY sic erecta sit, ut directrix, cujus portiones abscissae habeant cubos quadratis ordinatarum proportionales, sit perpendicularis ad horizontem, et in verticem ejus B cadat grave ex altitudine AB, quae sit 144^{ta} pars lateris recti, et deinde in B pergat descendere in linea BYY, erunt descensus ejus isochroni, seu grave decurrens in linea BYEF aequali tempore perveniet ex B in E, et ex E in F, posito altitudines BR et RS esse aequales.

Atque haec est Analysis problematis; placet vero Synthesin quoque dare methodo, quae ad communem propius accedat, analysin enim, qua hic usus sum, non nisi illi assequentur, qui principia a me tradita circa Analysin infinitorum intelligunt.

Problema.

Lineam Descensoriam isochronam invenire.

Sit linea BYYEF (fig. 120) paraboliformis quadrato-cubica, cujus vertex B, axis BXXRS, unde ductis ad curvam ordinatis normalibus XY sint cubi abscissarum BX ut quadrata ordinatarum XY, dico eam esse quaesitam. Nempe si linea ita sita sit, ut vertex B summum obtineat, axisque BX sit perpendiculariter erectus et in eo producto supra B sumatur A sic, ut AB sit pars centesima quadragesima quarta lateris recti lineae, tunc grave cadens ex altitudine A (libere vel inclinate) in B, atque ex B porro descendens in linea BYY, descendet in hac linea isochrone sive aequabiliter, ita ut descensus secundum perpendiculum sumti sint temporibus insumtis proportionales, et aequalibus temporibus aequaliter appropinquetur ad basin seu planum horizontale, nempe tempus quo grave ex B in linea BYY decurret ad E, erit ad tempus quo ex E decurret ad F, ut BR ad RS, ac proinde si BR et RS sint aequales, etiam temporis intervalla, quibus ex B descenditur in E et ex E in F, erunt aequalia; atque ita lineae descensoriae peculiaris inclinatio efficiet, ut grave moveatur sine ulla acceleratione descensionis in perpendiculo aestimatae, et vicissim si grave in F positum sursum impellatur in linea FEB ea celeritate, quam acquirere potuisset labendo ex A ad S, ascendet motu aequabili a basi FS usque ad verticem lineae B, licet enim continue decrescat ejus celeritas absoluta, ascensus tamen in perpendiculo aestimati erunt temporibus insumtis proportionales.

Demonstratio.

Sumantur duo Elementa altitudinis seu incrementa momentanea descensus $_3$XR et $_4$XS, quae ponantur inter se aequalia, eisque sint respondentia (licet inaequalia inter se) elementa lineae descensoriae $_3$YE et $_4$YF, dico etiam elementa temporis elementis spatii respondentia seu tempora, quibus elementa spatii transmittuntur, fore aequalia inter se, seu tempus quo percurritur $_3$YE fore aequale tempori, quo percurritur $_4$YF, atque ita erunt incrementa temporum incrementis descensuum perpendicularium ubique proportionalia.

Per A et B ducantur duae rectae horizonti parallelae AGM et BLP, et GL (producta) tangat curvam in E et MP in F. Ex natura motuum tempus, quo percurritur $_3$YE, est ad tempus, quo $_4$YF, in ratione composita, ex directa quidem rectae $_3$YE ad $_4$YF seu GL ad MP, reciproca vero celeritatis in RE ad celeritatem in SF, seu reciproca subduplicatae altitudinum AR et AS. Jam vero (ex natura tangentium hujus curvae) reperietur GL ad MP esse in directa ratione subduplicata AS ad AR; est ergo ratio temporis, quo percurritur $_3$YE, ad tempus, quo $_4$YF percurritur, composita ex ratione directa et reciproca eorundem terminorum, quae est ratio aequalitatis; aequalia ergo sunt haec tempora seu descensus aequalibus temporibus aequaliter crescunt. Quod asserebatur.

IV.

DE LINEA, IN QUAM FLEXILE SE PONDERE PROPRIO CURVAT, EJUSQUE USU INSIGNI AD INVENIENDAS QUOTCUNQUE MEDIAS PROPORTIONALES ET LOGARITHMOS. *)

Problema *Lineae Catenariae* vel *Funicularis* duplicem usum habet, unum ut augeatur ars inveniendi seu Analysis, quae hactenus ad talia non satis pertingebat, alterum ut praxis construendi promoveatur. Reperi enim hanc lineam ut facillimam factu, ita utilissimam effectu esse, nec ulli Transcendentium secundam. Nam suspensione fili vel potius *catenulae* (quae extensionem non mutat) nullo negotio parari et describi potest *physico* quodam *constructio-*

*) Act. Erudit. Lips. an. 1691.

nis genere. Et ope ejus ubi semel descripta est, exhiberi possunt quotcunque mediae proportionales, et Logarithmi, et Quadratura Hyperbolae. Primus *Galilaeus* de ea cogitavit, sed naturam ejus assecutus non est: neque enim Parabola est, ut ipse erat suspicatus. *Joachimius Jungius*, eximius nostri saeculi Philosophus et Mathematicus, qui multa ante *Cartesium* praeclara cogitata habuerat circa scientiarum emendationem, calculis initis et experimentis factis parabolam exclusit, veram lineam non substituit. Ex eo tempore a multis tentata quaestio est, a nemine soluta, donec nuper mihi ab eruditissimo Mathematico praebita ejus tractandae occasio est. Nam *Cl. Bernoullius*, cum meam quandam Analysin infinitorum, calculo differentiali, me suadente, introducto expressam, feliciter applicuisset ad quaedam problemata, a me publice petivit Actorum anni superioris mense Majo p. 218 seq., ut tentarem, an nostrum calculi genus etiam ad hujusmodi problemata, quale est lineae catenariae inventio, porrigeretur. Re in gratiam ejus tentata, non tantum successum habui, primusque, ni fallor, illustre hoc problema solvi, sed et lineam egregios usus habere deprehendi, quae res fecit, ut exemplo Blasii Paschalii aliorumque ad eandem inquisitionem invitaverim Mathematicos certo tempore praestituto, experiundarum Methodorum causa, ut appareret, quid illi daturi essent, qui fortasse alias adhiberent ab ea, qua *Bernoullius* mecum utitur. Tempore nondum elapso, duo tantum significarunt rem se consecutos, *Christianus Hugenius*, cujus magna in rem literariam merita nemo ignorat, et ipse cum fratre ingenioso juvene et pererudito *Bernoullius,* qui his, quae dedit, effecit, ut praeclara quaeque porro ab iis speremus. Eum igitur reapse expertum puto quod significaveram, huc quoque porrigi nostram calculandi rationem, et quae antea difficillima habebantur jam aditum admittere. Sed placet exponere, quae a me sunt inventa; quid alii praestiterint, collatio ostendet.

Linea sic construitur Geometrice, sine auxilio fili aut catenae, et sine suppositione quadraturarum, eo constructionis genere, quo pro Transcendentibus nullum perfectius et magis Analysi consentaneum mea sententia haberi potest. Sint duae quaecunque lineae rectae, determinatam quandam et invariabilem inter se habentes rationem, eam scilicet quam D et K (fig. 121) hic expositae, qua ratione semel cognita caetera omnia per Geometriam ordinariam procedunt. Sit recta indefinita ON horizonti parallela, eique per-

pendicularis OA, aequalis ipsi O_3N, et super ${}_3N$ verticalis ${}_3N_3\xi$, quae sit ad OA, ut D ad K. Inter OA et ${}_3N_3\xi$ quaeratur media proportionalis ${}_1N_1\xi$; et inter ${}_1N_1\xi$ et ${}_3N_3\xi$, itemque inter ${}_1N_1\xi$ et OA quaeratur rursus media proportionalis, et ita porro quaerendo medias et inventis tertias proportionales, describatur continueturque linea $\xi\xi A(\xi)(\xi)$, quae erit talis naturae, ut ipsis intervallis, verbi gr. ${}_3N_1N$, ${}_1NO$, $O_1(N)$, ${}_1(N)_3(N)$ etc. sumtis aequalibus, sint ordinatae ${}_3N_3\xi$, ${}_1N_1\xi$, OA, ${}_1(N)_1(\xi)$, ${}_3(N)_3(\xi)$ in continua progressione Geometrica, qualem lineam *Logarithmicam* appellare soleo. Jam sumtis ON, O(N) aequalibus, super N vel (N) erigatur NC vel (N)(C) aequales dimidiae summae ipsarum $N\xi$, $(N)(\xi)$, et C vel (C) erit *punctum lineae catenariae* FCA(C)L, cujus ita puncta quotcunque assignari Geometrice possunt.

Contra si linea catenaria physice construatur ope fili vel catenae pendentis, ejus ope exhiberi possunt quotcunque mediae proportionales, et Logarithmi inveniri datorum numerorum vel numeri datorum Logarithmorum. Sic si quaeratur Logarithmus numeri $O\omega$, posito ipsius OA (tanquam Unitatis, quam et *parametrum* vocabo) Logarithmum esse nihilo aequalem; seu, quod eodem redit, si quaeratur Logarithmus rationis inter OA et $O\omega$, sumatur ipsius $O\omega$ et OA tertia proportionalis $O\psi$, et ipsarum $O\omega$ et $O\psi$ summae dimidiae OB, tamquam abscissae, respondens Lineae Catenariae ordinata BC vel ON erit *Logarithmus quaesitus numeri dati.* Contra, dato Logarithmo ON, inde ductae ad Curvam Catenariam verticalis NC duplam oportet secare in duas partes tales, ut media proportionalis inter segmenta sit aequalis datae (unitati) OA (quod facillimum est) et duo segmenta erunt *respondentes dato Logarithmo Numeri quaesiti*, unus major, alter minor unitate. Aliter: Inventa, ut dictum est, NC seu OR (sumto ita puncto R in horizontali AR, ut habeamus OR aequalem OB vel NC) erunt summa ac differentia rectarum OR et AR duo respondentes Logarithmo dato Numeri, unus major, alter minor unitate. Nam differentia ipsarum OR et AR est $N\xi$, et summa earum est $(N)(\xi)$; ut vicissim OR est semisumma, et AR semidifferentia ipsarum $(N)(\xi)$ et $N\xi$.

Sequuntur *solutiones Problematum primariorum*, quae circa lineas proponi solent. *Tangentem ducere ad punctum lineae datum C.* In AR horizontali per verticem A sumatur R, ut fiat OR aequalis OB datae, et ipsi OR ducta antiparallela CT (occurrens axi AO in T) erit tangens quaesita. *Antiparallelas* compendii causa hic voco ipsas OR et TC, si ad parallelas AR et BC faciant non quidem eosdem angulos, sed tamen complemento sibi existentes ad rectum, ARO et BCT. Et Triangula rectangula OAR et CBT sunt similia.

Rectam invenire arcui catenae aequalem. Centro O radio OB describendo Circulum, qui horizontalem per A secet in R, erit AR aequalis arcui dato AC. Patet etiam ex dictis fore $\psi\omega$ aequalem catenae CA(C). Si catena CA(C) aequalis esset duplae parametro, seu si AC vel AR aequalis OA, foret catenae in C inclinatio ad horizontem seu angulus BCT 45 graduum, adeoque angulus CT(C) rectus.

Quadrare spatium linea catenaria et recta vel rectis comprehensum. Scilicet invento puncto R, ut ante, erit rectangulum OAR aequale Quadrilineo AONCA. Unde alias quasvis portiones quadrare in proclivi est. Patet etiam, arcus esse areis quadrilineis proportionales.

Invenire centrum gravitatis catenae, aut partis ejus cujuscunque. Arcui AC vel AR, ordinatae BC, parametro OA inventa quarta proportionalis $O\Theta$ addatur abscissae OB, et summae dimidia OG dabit G centrum gravitatis catenae CA(C). Porro Tangens CT secet horizontalem per A in E, compleatur rectangulum GAEP, erit P centrum gravitatis arcus AC. Cujuscunque arcus alterius ut C_1C distantia centri gravitatis ab axe est AM, posito πM esse perpendicularem in horizontem verticis, demissam ex π consursu tangentium Cπ, ${}_1$Cπ, quanquam et centrum ejus ex centris arcuum AC, A_1C facile habeatur. Hinc et habetur BG, maximus descensus possibilis centri funiculi seu catenae aut lineae flexilis non intendibilis cujuscunque, duabus extremitatibus C et (C) suspensae, longitudinem habentis datam $\psi\omega$; quamcunque enim figuram aliam assumat, minus descendet centrum gravitatis quam si in nostram CA(C) curvetur.

Invenire centrum gravitatis figurae, linea catenaria et recta vel rectis comprehensae. Sumatur Oβ dimidia ipsius OG, et compleatur rectangulum βAEQ, erit Q centrum gravitatis quadrilinei AONCA. Unde et cujuscunque alterius spatii linea catenaria et recta vel rectis terminati centrum facile habetur. Hinc porro sequitur illud memorabile, non tantum quadrilinea ut AONCA arcubus AC proportionalia esse, ut jam notavimus, sed et amborum centrorum gravitatis distantias ab horizontali per O, nempe OG et

Oβ, esse proportionales, cum illa sit semper hujus dupla; et distantias ab axe OB, nempe PG, Qβ adeo esse proportionales, ut sint plane aequales.

Invenire contenta et superficies solidorum, rotatione figurarum linea catenaria et recta vel rectis comprehensarum, circa rectam immotam quamcunque genitorum. Habetur ex duobus problematibus praecedentibus, ut notum est. Sic si catena CA(C) rotetur circa axem AB, generata superficies aequabitur circulo, cujus radius possit duplum rectangulum EAR. Nec minus aliae superficies vel etiam solida dicto modo genita mensurari possunt.

Multa Theoremata ac Problemata praetereo, quae vel in his continentur, quae diximus, vel non magno negotio inde derivantur, cum brevitati consulere visum sit. Sic sumtis duobus catenae punctis, ut C et ${}_1$C, quorum tangentes sibi occurrant in π, ex punctis ${}_1$C, π, C in ipsam AEE horizontalem verticis demittantur perpendiculares, ${}_1C_1$I, πM, CI: fiet, ${}_1$I in AC minus ${}_1$CC in ${}_1$IM aequale ${}_1$BB in OA.

Possunt et series infinitae utiliter adhiberi. Sic si parameter OA sit unitas, et Arcus AC vel recta AR dicatur a, et ordinata BC vocetur y, fiet $y = \frac{1}{1}a - \frac{1}{6}a^3 + \frac{3}{40}a^5 - \frac{5}{112}a^7$ etc., quae series facili regula continuari potest. Datis quoque lineam determinantibus, haberi possunt reliqua ex dictis. Sic dato vertice A, et alio puncto C, et AR longitudine catenae interceptae AC, haberi potest lineae parameter AO vel punctum O: quoniam enim datur et B, jungatur BR, et ex R educatur recta Rμ, ita ut angulus BRμ sit aequalis angulo RBA, et ipsa Rμ (producta) occurret Axi BA (producto) in puncto O quaesito.

Atque his quidem potissima contineri arbitror, unde caetera circa hanc lineam, ubi opus, facile duci poterunt. Demonstrationes adjicere supersedeo, prolixitatis vitandae gratia, praesertim cum novae nostrae Analyseos calculos in his Actis explicatos intelligenti sponte nascantur.

Beilagen.

Solutio Problematis Funicularis, exhibita a Johanne Bernoulli, Basil. Med. Cand.*)

Annus fere est, cum inter sermocinandum cum Cl. Fratre mentio forte incidisset de Natura Curvae, quam funis inter duo puncta fixa libere suspensus format. Mirabamur rem omnium oculis et manibus quotidie expositam nullius hucusque attentionem in se concitasse. Problema videbatur eximium et utile, at tum ob praevisam difficultatem tangere noluimus; statuimus itaque illud publice Eruditis proponere, visurinum qui vadum tentare auderent: nesciebamus enim, quod jam inde a Galilaei temporibus inter Geometras agitatum fuisset. Interea dignum censuit nodum hunc, cui solvendo se accingeret summus Geometra Leibnitius, significavitque non multo post **) se clave sua aditus problematis feliciter reserasse, concesso tamen et aliis tempore, intra quod si nemo solveret, ipse solutionem suam publicaturus esset. Id animum addidit, ut problema denuo aggrederer, quod eo quidem cum successu factum, ut brevi et ante termini a Viro Cl. positi exitum ejus solutionem omnimodam et plenariam, qualem antea ne sperare quidem ausus fuissem, invenerim. Reperi autem Curvam nostram Funiculariam non esse Geometricam, sed ex earum censu, quae Mechanicae dicuntur, utpote cujus natura determinata aequatione Algebraica exprimi nequit, nec nisi per relationem curvae ad rectam, vel spatii curvilinei ad rectilineum habetur, sic ut ad illam describendam alterius curvae rectificatio vel curvilinei quadratura supponatur, ut ex sequentibus Constructionibus liquet.

Constr. I. Ductis normalibus CB, DE (fig. 122) sese secantibus in A, centroque C ubivis sumpto in axe CB, et vertice A descripta Hyperbola aequilatera AH, construatur curva LKF, quae talis sit, ut ubique CA sit media proportionalis inter BH et BK; fiat rectangulum CG aequale spatio EABKF, erit productis IG, HB punctum concursus M in Curva Funicularia MAN.

Constr. II. Descripta ut prius ad axem BH (fig. 123) Hyperbola aequilatera BG, construatur ad eundem axem Parabola BH, cujus latus rectum aequetur quadruplo lateris recti vel transversi Hyperbolae, ordinatimque applicata HA producatur ad E, ita ut recta GE sit aequalis lineae Parabolicae BH; dico punctum E esse in Curva Funicularia EBF.

*) Act. Erud. Lips. an. 1691.

**) Vid. Act. Erudit. Lips. an. 1690, pag. 360.

Ex his patet, Curvae hujus EBF naturam per aequationem Geometricam haberi non posse, nisi simul rectificatio lineae Parabolicae detur. Hujus autem et praecedentis Constructionis demonstrationem lubens omitto, ne Celeberrimo Viro primae inventionis palmam vel praeripiam, vel inventa sua super hac materia plane supprimendi ansam praebeam: sufficiet hic, si notabiliores hujus Curvae proprietates addidero:

1. Ducta tangente FD (fig. 122), erit AF . AD : : BC . BF curvam.
2. AE vel AF aequatur curvae Parabolicae BH, dempta recta AG.
3. Curva BE vel BF aequalis est rectae AG, i. e. portiones curvae funiculariae ad axem applicatae conficiunt Hyperbolam aequilateram: insignis est hujus Curvae proprietas.
4. Spatium Funicularium BAE vel BAF est aequale rectangulo sub BA et AF, diminuto rectangulo sub CB et FG.
5. Curva MNO, ex cujus evolutione describitur Funicularia BE, est tertia proportionalis ad CB et AG.
6. Recta vero evolvens EO est tertia proportionalis ad CB et CA.
7. Recta BM usque ad principium curvae MNO sumta aequatur ipsi CB.
8. MP est dupla ipsius BA.
9. Rectangulum sub CB et PO duplum est spatii hyperbolici ABG.
10. Recta CP bisecta est in puncto A.
11. Curva EB est ad curvam MNO, ut recta CB ad rectam AG.
12. Si ad AG applicentur duo Rectangula AI, AK, quorum unum AI ei quod sub semilatere transverso CB et recta FG comprehenditur rectangulo, alterum AK quod ipsi spatio Hyperbolico BGA aequatur, et differentiae latitudinum KI sumatur in axe a vertice B aequalis BL, erit punctum L centrum gravitatis curvae Funiculariae EBF.
13. Si super EF infinitae intelligantur descriptae curvae ipsi

Funiculariae EBF aequales, illaeque in rectas extendantur, et in singulis singulae extensae punctis applicentur rectae ipsis respective distantiis a linea EF aequales, erit omnium spatiorum quae sic efficiuntur illud quod a Funicularia gignitur maximum.

Coepit Hon. Frater speculationem hanc extendere etiam ad funes inaequaliter crassos, quorum crassities ad longitudinem relationem obtinet aequatione algebraica exprimibilem, notatque unum casum, quo problema per Curvam simplicem Mechanicam solvi possit, nempe si supponatur Figura Curvilinea ABDEG (fig. 124), cujus applicata GE sit reciproce in dimidiata ratione abscissae AG, eaque sit in omnibus suis applicatis flexilis, hoc est, si concipiatur funis AG gravatus in singulis suis punctis respectivis rectis GE, vel (quod tantundem est) differentiis applicatarum GH in Parabola AHI, aut denique portiunculis curvae cycloidalis AHI (cujus vertex A) isque sic gravatus suspendi intelligatur, ita ut punctum A sit omnium infimum (quod fit, ubi connexum habuerit a parte A alium funem ejusdem longitudinis et in aequalibus a puncto A distantiis aequaliter gravatum): tum jubet ad axem AG (fig. 125) construere Hyperbolam aequilateram ABC cujus vertex A, applicatamque BD producere ad E, ita ut rectangulum sub semilatere recto vel transverso et linea DE sit aequale spatio ADB, ostenditque punctum E esse ad curvam quaesitam AEF, quam funis dicta ratione gravatus format, ipsam vero curvam AE esse tertiam proportionalem ad rectum vel transversum latus Hyperbolae et applicatam ejus DB; tangentem EH haberi sumpta IH quarta proportionali ad semilatus rectum, abscissam AD et applicatam DB etc. Reperi autem, quod memorabile est, curvam hanc AEF illam ipsam esse, ex cujus evolutione altera BE, quam uniformis crassitiei funis format, describitur, adeoque eandem cum curva MNO.

Notare convenit, quod si quis experimentis haec examinare instituat, catenulam prae fune seligere debeat, quem ob nimiam cum levitatem tum rigiditatem ad id ineptum deprehendimus. Caeterum qui materiam hanc perficere et ampliare volet, poterit investigare naturam curvae, quam refert funis in hypothesi a Terrae centro distantiae finitae, vel si supponatur insuper a proprio pondere extensibilis, aut quocunque alio modo gravatus: vel etiam vice versa qualiter illum gravare conveniat, ut referat lineam Parabolicam, Hyperbolicam, Circularem aliamve quamcunque datam curvam; res enim omnino in potestate est.

Christiani Hugenii, Dynastae in Zeelhem, solutio ejusdem Problematis.

Si Catena CVA (fig. 126) suspensa sit ex filis FC, EA utrinque annexis ac gravitate carentibus, ita ut capita C et A sint pari altitudine, deturque angulus inclinationis filorum productorum CGA et catenae totius positus, cujus vertex sit V, axis VB,

1. licebit hinc invenire tangentem in dato quovis catenae puncto. Velut si punctum datum sit L, unde ducta applicata LH dividat aequaliter axem BV. Jam si angulus CGA sit 60^0, erit inclinanda a puncto A ad axem recta AIV aequalis $\frac{3}{2}$ AB, cui ducta parallela LR tanget curvam in puncto L. Item si latera GB, BA, AG sint partium 3, 4, 5, erit AIV ponenda partium $4\frac{1}{2}$.

2. Invenitur porro et recta linea catenae aequalis, vel datae cuilibet ejus portioni. Semper enim dato angulo CGA, data erit ratio axis BV ad curvam VA. Velut si latera GB, BA, AG sint ut 3, 4, 5, erit curva VA tripla axis VB.

3. Item definitur radius curvitatis in vertice V, hoc est semidiameter circuli maximi, qui per verticem hunc descriptus totus intra curvam cadat. Nam si augulus CGA sit 60^0, erit radius curvitatis ipsi axi BV aequalis. Si vero angulus CGA sit rectus, erit radius curvitatis aequalis curvae VA.

4. Poterit et circulus aequalis inveniri superficiei conoidis ex revolutione catenae circa axem suum. Ita si angulus CGA sit 60^0, erit superficies conoidis ex catena CVA genita aequalis circulo, cujus radius possit duplum rectangulum BVG.

5. Inveniuntur etiam puncta quotlibet curvae KN, cujus evolutione, una cum recta KV, radio curvitatis in vertice, curva VA describitur, atque evolutae ipsius KN longitudo. Veluti si angulus CGA fuerit 60^0, erit KN tripla axis BV. Si vero latera GB, BA, AG sint ut 3, 4, 5, erit illa $\frac{9}{4}$ axis BV.

6. Praeterea spatii NKVAN quadratura datur. Posito enim angulo CGA 60^0, erit spatium illud aequale rectangulo ex axe BV et ea quae potest triplum quadratum ejusdem BV. Si vero latera GB, BA, AG sint ut 3, 4, 5, erit idem spatium aequale septuplo quadrato BV cum parte octava.

7. Porro puncta quotlibet catenae inveniri possunt, posita

quadratura curvae alterius harum: $xxyy = a^4 - aayy$ vel $xxyy = 4a^4 - x^4$, vel etiam data distantia centri gravitatis ab axe, in portionibus planis, quas abscindunt rectae axi parallelae in curva harum priore. Quadratura autem hujus curvae pendet a summis secantium arcuum per minima aequaliter crescentium, quae summae ex Tabulis sinuum egregio quodam adhibito compendio inveniuntur quamlibet proxime. Hinc ex. gr. inventum, quod si angulus CGA sit rectus, et ponatur axis BV partium 10000, erit BA 21279, non una minus. Curva autem VA per superius indicata cognoscitur hic esse partium 24142, non una minus.

In his omnibus non nisi ad casus singulares solutiones problematum dedi, vitandae prolixitatis studio, et quoniam non dubito quin regulas universales Viri docti affatim sint exhibituri. Quod si tamen aliquae ex nostris requirentur, eas lubenter mittam. Ac jam pridem omnes apud Clarissimum Virum *G. G. Leibnitium* involucro quodam obtectas deposui.

Additamentum ad Problema Funicularium von *Jacob Bernoulli.* *)

Postquam Problematis de Curva Funicularia solutionem nuperrime exhibuisset Frater, speculationem istam continuo promovi ulterius et ad alios quoque casus applicui, quo pacto praeter ea, quorum tum mentio facta est, nonnulla sese obtulerunt, quae recensere operae pretium existimo.

1. Si crassities vel gravamina funis aut catenae inaequalia sint et sic attemperata, ut dum est in statu quietis, gravamen portionis HI (fig. 127) sit in ratione portionis rectae utcunque ductae LM iisdem perpendiculis HL, IM interceptae, curva AIHB, quam funis vel catena sic suspensa proprio pondere format, erit Parabolica. Sin gravamen portionis HI sit in ratione spatii LOTM iisdem perpendiculis HL, IM intercepti, erit Funicularia AB curva Parabolae vel Cubicalis, vel Biquadraticae, vel Surdesolidalis etc., prout Figura CLO est vel Triangulum, vel Complementum semiparabolae

*) Bildet den Schluss von der Abhandlung: Specimen alterum Calculi differentialis in dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum et Areis Triangulorum Sphaericorum etc. Sieh. Act. Erudit. Lips. an. **1691**.

communis, aut semiparabolae Cubicalis etc. Quod si vero gravamen portionis HI sit in ratione spatii QRST iisdem rectis horizontalibus HQ, IR abscissi, erit Funicularia IB curva aliqua ex genere Hyperbolicarum (recta AG existente una ex asymptotis), puta vel Apolloniana, vel Cubicalis, vel Biquadratica etc, prout videlicet Figura AQT est vel Triangulum, vel Complementum semiparabolae communis aut cubicalis etc.

2. Si funis sit uniformis crassitiei, at a pondere suo extensibilis, peculiari opus est artificio. Vocetur portio funis non extensi, cujus ponderi aequipollet vis tendens unum funis punctum *a*, et excessus longitudinis, quo portio haec a dicta vi extensa non extensam superat, *b*, sumaturque in perpendiculo FA = a, et in definita FC = x: tum fiat curva DE ejus naturae, ut sit applicata

$$CD = \frac{ab}{\sqrt{2aa + 2bx - 2a\sqrt{aa + bb + 2bx}}} \text{ sive } a\sqrt{\frac{aa + bx + a\sqrt{aa + bb + 2bx}}{2xx - 2aa}},$$

perinde enim est ac spatio curvilineo ACDE constituatur aequale rectangulum FG, producanturque rectae KG, DC ad mutuum occursum in B; sic erit punctum B ad requisitam funiculariam AB. Suppono autem, extensiones viribus tendentibus proportionales esse, tametsi dubium mihi sit, an cum ratione et experientia hypothesis illa satis congruat. Retinere autem istam nobis liceat, dum veriorem ignoramus.

3. Occasione Problematis funicularii mox in aliud non minus illustre delapsi sumus, concernens flexiones seu curvaturas trabium, arcuum tensorum aut elaterum quorumvis a propria gravitate vel appenso pondere aut alia quacunque vi comprimente factas; quorsum etiam Celeberrimum *Leibnitium* in privatis, quibus sub idem me tempus honoravit, literis digitum opportune intendere video. Videtur autem hoc Problema, cum ob hypotheseos incertitudinem, tum casuum multiplicem varietatem, plus aliquanto difficultatis involvere priori, quanquam hic non prolixo calculo, sed industria tantum opus est. Ego per solutionem casus simplicissimi (saltem in praememorata hypothesi extensionis) adyta Problematis feliciter reseravi; verum ut ad imitationem Viri Excellentissimi et aliis spatium concedam suam tentandi Analysin, premam pro nunc solutionem, eamque tantisper Logogripho occultabo, clavem cum demonstratione in nundinis autumnalibus communicaturus. Si lamina elastica gravitatis expers AB (fig. 128), uniformis ubique crassitiei et latitudinis, inferiore extremitate A alicubi firmetur et superiori

B pondus appendatur, quantum sufficit ad laminam eousque incurvandam, ut linea directionis ponderis BC curvatae laminae in B sit perpendicularis, erit curvatura laminae sequentis naturae:

Qrzumu bapt dxqopddbbp poyl fy bbqnfqbfp lty ge mutds udthh tuhs tmixy yxdksdbxp gqsrkfgudl bg ipqandtt tcpgkbp aqdbkzs. *)

4. Istis vero omnibus multa sublimior est speculatio de *Figura veli vento inflati,* quanquam cum Problemate Funiculario eatenus affinitatem habet, quatenus venti continuo ad velum adlabentis impulsus ceu funis alicujus gravamina spectari possunt. Qui naturam pressionis fluidorum intellexerit, haud difficulter quidem capiet, quod portio veli BC (fig. 129), quae subtensam habet directioni venti DE perpendicularem, curvari debeat in arcum circuli. At qualem curvaturam induat reliqua portio AB, ut difficilis est perquisitio, sic in re nautica eximii prorsus usus futura est, ut praestantissimorum Geometrarum occupationem juxta cum subtilissimis mereri videatur. Caeterum in his Problematibus omnibus, quae quis nequicquam alia tentet methodo, *calculi Leibnitiani* eximium et singularem plane usum esse comperi, ut ipsum propterea inter primaria seculi nostri inventa censendum esse aestimem. Quanquam enim, ut nuper innui, ansam huic dedisse credam calculum *Barrovii,* qualem appello, qui ab hujus viri tempore passim fere apud Geometras praestantiores invaluit, quemque etiamnum Nobilissimo *Tschirnhausio* solemnem esse video: hoc tamen non eo intelligendum est, quasi utilissimi inventi dignitatem ullatenus elevare aut Celeberrimi Viri laudi meritae quicquam detrahere et aliis ascribere cupiam; et si quae conferenti mihi utrumque intercedere inter illos visa est affinitas, ea major non est, quam quae faciat, ut uno intellecto ratio alterius facilius comprehendatur, dum unus superfluas et mox delendas quantitates adhibet, quas alter compendio omittit: de caetero namque compendium isthoc tale est, quod naturam rei prorsus mutat, facitque ut infinita per hunc praestari possint, quae per alterum nequeunt: praeterquam etiam quod ipsum hoc compendium reperisse utique non erat cujusvis, sed sublimis ingenii et quod Autorem quam maxime commendat.

*) Dies bedeutet: Portio axis applicatam inter et tangentem est ad ipsam tangentem sicut quadratum applicatae ad constans quoddam spatium.

V.

DE SOLUTIONIBUS PROBLEMATIS CATENARII VEL FUNICULARIS IN ACTIS JUNII AN. 1691, ALIISQUE A DN. JAC. BERNOULLIO PROPOSITIS. *)

Valde delectatus sum lectis tribus Problematis a Galilaeo propositi, a D. Bernoullio renovati solutionibus inter se consentientibus, quod indicium est veritatis, apud eos valiturum, qui talia accurate non examinant. Etsi autem omnia conferre non vacaverit, in summa tamen rei manifesta est concordia. Legem tangentium, et extensionem curvae catenariae in rectam invenimus omnes, et cum curvedinis mensuram olim in Actis Junii A. 1686 p. 489 (introducto novo contactus genere, quem osculum appellare placuit) explicuerim per radium circuli curvam osculantis, seu ex omnibus circulis tangentibus maxime ad curvam accedentis, eundemque adeo quem ipsa curva ad rectam facientis angulum contactus, placuit celeberrimo *Hugenio* (animadvertenti centra horum circulorum semper incidere in lineas a se primum inventas, quarum evolutione describuntur datae) speculationem huc applicare, et investigare radium curvitatis vel circulum osculatorem curvae catenariae, sive ejus curvam evolutione generantem, quam et dedit solutio *Bernoulliana.* In *Hugeniana* autem distantia quoque habetur centri gravitatis catenariae ab axe, in *Bernoulliana* et mea, ejusdem distantia tam ab axe quam et a basi aut alia recta, adeoque puncti determinatio, item quadratura figurae catenariae. Quibus ego in mea centrum gravitatis etiam hujus figurae seu areae adjeci. Constructionem lineae *Dn. Hugenius* exhibet ex supposita quadratura curvae, qualis est $xxyy = a^4 - aayy$, *Dn. Joh. Bernoullius* et ego reduximus ad quadraturam hyperbolae, illo perbene adhibente etiam extensionem curvae parabolicae in rectam, me denique rem omnem reducente ad logarithmos, eaque ratione obtinente *perfectissimum in Transcendentibus exprimendi pariter et construendi genus.* Sic enim unica tantum semel supposita vel habita ratione constante, de reliquo infinita puncta vera exhiberi possunt per communem Geometriam sine interventu ulteriore quadraturarum aut extensionum in rectas. Lineae Catenariae mirum et elegantem cum Loga-

*) Act. Erudit. Lips. an. 1692.

rithmis consensum, ex mea constructione animadvertere fortasse non injucundum videbitur. Caeterum a *Dn. Hugenio* (egregii ex Tab. Sinuum compendii nobis spem faciente) observatum est, rem etiam reduci ad summam secantium arcuum, per minima aequaliter crescentium. Idem et a me notatum fuerat, et cum in mentem venisset, ab iisdem pendere et lineae rhombicae seu loxodromicae determinationem in usum nautarum, quam jam multis abhinc annis etiam ex logarithmis definiisse recordabar, excussi veteres schedas, et in proxime praecedente Aprili p. 181 Actorum Erud. hujus anni rem tandem publice exhibui. Contigit autem, ut Clarissimus Basileensium Professor *Dn. Jacob. Bernoullius*, Problematis Catenarii renovator, fraternae solutioni in Junio nupero p. 282 subjiceret etiam loxodromiarum considerationem, ubi multa detexit egregia; dedit etiam constructionem loxodromiae ex supposita quadratura lineae, cujus abscissa et ordinata sint z et x, aequatio vero differentialis ad calculi mei ritum sit $d\bar{x} = trrd\bar{z} : z\sqrt{rr - zz}$. Ubi vero videbit, quomodo res a me reducta sit ad quadraturam hyperbolae aut logarithmos, agnoscet credo nunc colophonem quodammodo impositum esse huic disquisitioni, tantumque superesse, ut ad usum practicum captumque popularem magis adaptetur. Elegans est, quod *Dn. Bernoullius* habet, Januarii nuperi p. 16, de curvae partibus quibusdam dissimilaribus inter se aequalibus. Porro Junii p. 283 lineam finitae magnitudinis, infinitos licet gyros facientem, non puto esse interminatam, cum finitae sit aequalis, et motu aequabili finito tempore percurri possit. Haereo etiam circa id, quod ab eodem dictum est mense Januario proximo p. 21, nullius curvae Geometricae in se redeuntis rectificationem (generalem) esse possibilem. Scio alium Virum Clarissimum simili argumento probare instituisse, nullius areae curvae Geometricae in se redeuntis quadraturam indefinitam esse possibilem; visum tamen est Dn. Hugenio non minus quam mihi, rem non esse confectam. Et, ni fallor, dantur instantiae, quibus tamen hujusmodi argumenta applicari possunt. Haec veritatis amore, non contradicendi studio a me notata spero non displicitura, cum aliis egregie dictis nihil detrahant. Ego certe eo sum animo, ut viros praeclare de literis meritos ac merituros lubentissime nec sine voluptate praedicem, hanc eorum laboribus honestissimam mercedem deberi judicans, quae et in futurum incitamento et ipsis et aliis esse potest. Negare non possum, mirifice mihi placuisse,

quae Celeb. *Bernoullius* cum ingeniosissimo juvene fratre suo fundamentis calculi novi a me jactis inaedificavit, idque eo magis, quod excepto acutissimo Scoto *Joh. Craigio* nondum mihi occurrerat, qui eo fuisset usus, ipsorum autem praeclaris inventis rem, quam summae utilitatis esse judico et ab ipsis agnosci video, spero latius propagatum iri in usum rei literariae. Nec dubium est, quin ea ratione Analysis Mathematica perfectioni propius admoveatur, et Transcendentia hactenus exclusa ei subjiciantur. Egregie a *Dn. Bernoullio* annotatum est, in omni puncto flexus contrarii rationem inter t et y vel dx et dy esse omnium possibilium maximam vel minimam. Et omnino non dubito, ipsos aliqua detecturos, ad quae pervenire mihi ipsi difficile esset futurum: supersunt enim, in quibus nondum ipse optata brevitate rem conficere possum. Et quemadmodum mihi, qui in has meditationes occasione *Pascalianorum* et *Hugenianorum* scriptorum potissimum incidi, ad ea pervenire progrediendo licuit, quae ex illis non facile deducentur et quae antea vix sperabantur: ita credo, mea qualiacunque aliis adhuc abstrusioribus occasionem praebitura. Et sane gratulor Clarissimo Bernoullio affinia problemati catenario danti et daturo, si nempe catena sit inaequalis crassitiei, si funis sit extendibilis, si pro fune gravi adhibeatur lamina elastica, ac denique de figura veli; de quibus vellem mihi cum eo conferre nunc liceret, sed diversissimi generis laboribus distractissimus aegre nuper a me obtinere potui, ut repertam jam ante annum solutionem propositi ab ipso Problematis tandem elaborarem et in ordinem redigerem, quae etiam morae causa fuit. Caeterum quia ipse p. 290 conjicere voluit, qua occasione aut quorum ante me scriptorum auxiliis potissimum ad has meditationes devenerim, placet id quoque candide aperire. Eram ego hospes plane in interiore Geometria, cum Lutetiae Parisiorum Anno 1672 Christiani Hugenii notitiam nactus sum, cui certe viro post Galilaeum et Cartesium et has literas publice et me in ipsis privatim plurimum debere agnosco. Hujus cum legerem librum de *Horologio Oscillatorio*, adjungeremque *Dettonvillaei* (id est *Pascalii) Epistolas*, et *Gregorii a S. Vincentio opus*, subito lucem hausi, et mihi et aliis quoque qui me in his novum norant inexpectatam, quod mox speciminibus datis ostendi. Ita mihi sese aperuit ingens numerus theorematum, quae corollaria tantum erant methodi novae, quorum partem deinde apud *Jac. Gregorium* et *Isaacum Barrovium* aliosque deprehendi. Sed animadverti, fontes non satis adhuc patuisse et restare interius aliquid, quo pars illa Geometriae sublimior tandem aliquando ad Analysin revocari posse, cujus antea incapax habebatur. Ejus elementa aliquot abhinc annis publicavi, consulens potius utilitati publicae, quam gloriae meae, cui fortasse magis velificari potuissem methodo suppressa. Sed mihi jucundius est, ex sparsis a me seminibus natos in aliorum quoque hortis fructus videre. Nam nec mihi ipsi integrum erat haec satis excolere, nec deerant alia, in quibus aditus novos aperirem, quod ego semper palmarium judicavi, ac methodos potius, quam specialia licet vulgo plausibiliora aestimavi. Postremo unum adjiciam, etsi ab hoc loco alienum, optare me, ut *Dn. Bernoullius* expendere dignetur, quae circa aestimationem virium *Dn. Papino* altera vice repono, praesertim in fine, ubi detexisse videor fontem erroris popularis. Optime urget Julio nupero p. 321, nihil virium deperdi, quod non alicubi impendatur; sed differunt vires et quantitas motus: et praeterquam, quod quanto firmior obex, eo minus potentiae in ipso perditur, certissimum est, obstacula in data quavis ratione diminui posse, et obstacula attritus seu frictionis non esse proportionalia celeritati (ut monui in *Schediasmate de resistentia*), esse quidem resistentiam medii, sed nihil prohibet fingi oscillationes in loco aëre exhausto, aut medio quantaevis tenuitatis; postremo abstrahendus est animus a circumstantiis variabilibus ad ipsam per se rei naturam indagandam.

VI.

DE LA CHAINETTE, OU SOLUTION D'UN PROBLÈME FAMEUX, PROPOSÉ PAR GALILEI, POUR SERVIR D'ESSAI D'UNE NOUVELLE ANALYSE DES INFINIS, AVEC SON USAGE POUR LES LOGARITHMES, ET UNE APPLICATION A L'AVANCEMENT DE LA NAVIGATION*).

L'Analyse ordinaire de *Viete* et de *Descartes* consistant dans la reduction des problèmes à des équations et à des lignes d'un certain degré, c'est-à-dire, au plan solide, sursolide etc. *Mr. Descartes*, pour maintenir l'universalité et la suffisance de sa méthode,

*) Journal des Sçavans an. 1692.

trouva à propos d'exclure de la Géométrie tous les problèmes et toutes les lignes qu'on ne pouvoit assujettir à cette méthode, sous prétexte que tout cela n'étoit que mécanique. Mais comme ces problèmes et ces lignes peuvent être construites, ou imaginées par le moyen de certains mouvemens exacts, qu'elles ont des proprietés importantes et que la nature s'en sert souvent, on peut dire qu'il fit en cela une faute semblable à celle qu'il avoit reprochée à quelques anciens, qui s'étoient bornés aux constructions, où l'on n'a besoin que de la régle et du compas, comme si tout le reste étoit mécanique. *Mr. de Leibniz* ayant remarqué qu'il y a des problèmes et des lignes qui ne sont d'aucun degré déterminé, c'est à dire, qu'il y a des problèmes dont le degré même est inconnu ou demandé, et des lignes dont une seule passe continuellement de degré en degré, cette ouverture le fit penser à un calcul nouveau, qui paroit extraordinaire, mais que la nature a reservé pour ces sortes de problèmes transcendans, qui surpassent l'Algèbre ordinaire. C'est ce qu'il appelle *l'Analyse des infinis*, qui est entiérement différente de la Géométrie des indivisibles de *Cavaleri*, et de l'Arithmétique des infinis de *Mr. Wallis*. Car cette Géométrie de *Cavaleri*, qui est très bornée d'ailleurs, est attachée aux figures, où elle cherche les sommes des ordonnées; et *Mr. Wallis*, pour faciliter cette recherche, nous donne par induction les sommes de certains rangs de nombres: au lieu que l'analyse nouvelle des infinis ne regarde ni les figures, ni les nombres, mais les grandeurs en général, comme fait la specieuse ordinaire. Elle montre un algorithme nouveau, c'est à dire, une nouvelle façon d'ajouter, de soustraire, de multiplier, de diviser, d'extraire, propre aux quantités incomparables, c'est-à-dire à celles qui sont infiniment grandes, ou infiniment petites en comparaison des autres. Elle employe les équations tant finies qu'infinies, et dans les finies elle fait entrer les inconnues dans l'exposant des puissances, ou bien au lieu des puissances ou des racines, elle se sert d'une nouvelle affection des grandeurs variables, qui est la variation même, marquée par certains caractères, et qui consiste dans les différences, ou dans les différences des différences de plusieurs degrés, auxquelles les sommes sont réciproques, comme les racines le sont aux puissances.

Une partie des élémens de ce calcul, avec plusieurs échantillons, a été publiée dans la Journal de Leipsic, où l'auteur l'a appliquée particulièrement à quelques problèmes géométrico-physiques, comme par exemple à la ligne isochrone, dans laquelle un corps pesant approche uniformément de l'horizon en descendant; à la ligne loxodromique, ou des rhumbs de vent, pour résoudre les plus utiles problèmes géométriques de la navigation, où l'on n'étoit arrivé jusqu'ici qu'imparfaitement par certaines tables subsidiaires; à la résistance des solides ou des liquides, pour avancer la Mécanique, et particuliérement la Balistique; aux loix harmoniques des mouvemens planétaires, pour approcher de la perfection de l'Astronomie; et à d'autres usages de conséquence. Cette méthode fut applaudie et suivie d'abord par quelques personnes habiles. *Mr. Craige* s'en servit en Angleterre; et ensuite *Mr. Bernoulli* Professeur de Bâle, connu par plusieurs belles productions de Mathématique, l'ayant étudiée et en ayant remarqué l'importance, pria l'auteur publiquement de l'appliquer à la recherche de la ligne d'une chainette suspendue par les deux bouts, que *Galilée* avoit proposée, mais qu'on n'avoit pas encore déterminée jusqu'ici.

L'Auteur de la méthode y réussit d'abord, et pour donner aux autres l'occasion d'exercer encore leur méthode, proposa publiquement ce même problème, leur donnant le terme d'un an. Le frère de *Mr. Bernoulli* ayant appris que cette méthode y alloit, la médita de telle sorte, qu'il vint à bout du problème, et donna à connoitre par là ce qu'on doit attendre de lui. *Mrs. Bernoulli* poussèrent même la recherche plus loin, et l'appliquèrent à d'autres problèmes, qui ont de l'affinité avec celui-ci.

De ceux qui ont employé d'autres méthodes, on ne connoit que *Mr. Huygens*, qui ait réussi. Il est vrai, qu'il suppose la quadrature d'une certaine figure. Du reste en ce qui étoit commun aux solutions ou remarques sur cette ligne, il s'est trouvé un parfait accord, quoiqu'il n'y ait eu aucune communication entre les auteurs des solutions; ce qui est une marque de la vérité, propre à persuader ceux qui ne peuvent ou ne veulent pas examiner les choses à fond.

Par la méthode nouvelle le problème a reçu une parfaite solution. *Mr. de Leibniz* qui a été le premier à résoudre ce problème, l'ayant réduit à la quadrature de l'hyperbole, ce que *Mr. Bernoulli* a fait aussi ensuite; mais la construction de *Mr. de Leibniz* donne enfin le moyen de marquer autant de points qu'on voudra de la ligne demandée, en supposant une seule proportion une fois pour toutes, et n'employant du reste aucune quadra-

ture ni extension de courbe, mais les seules moyennes, ou troisiémes proportionelles. Et comme c'est tout ce qu'on peut souhaiter pour les problèmes transcendans, il sera bon de donner ici cette construction.

Soient (fig. 121) menées les droites infinies NO(N) horizontale, et OAB verticale. Soient paralléles et continuellement proportionnelles autant qu'on voudra de droites, comme ${}_3N_3\xi$, ${}_1N_1\xi$, OA, ${}_1(N)_1(\xi)$, ${}_3(N)_3(\xi)$ etc. dont les distances ${}_3N_1N$, ${}_1NO$, $O(N)$, ${}_1(N)_3(N)$ etc. soient toujours égales, en sorte pourtant que prenant ${}_3NO$ ou $O_3(N)$ égal à OA, soient ${}_3N_3\xi$ à OA, ou OA à ${}_3(N)_3(\xi)$ en raison de D à K, qu'on suppose connue une fois pour toutes, et tousjours la même. Ainsi appliquant autant de moyennes ou troisièmes proportionnelles qu'on voudra, pourvu que tousjours les intervalles des proportionnelles soient égaux, on aura la ligne logarithmique $\xi A(\xi)$ passant par tous les ξ, où OA étant prise pour l'unité, et les $N\xi$ étant comme les nombres, les intervalles ON seront comme les logarithmes. Maintenant prenons dans la verticale OAB une moyenne arithmétique OB entre deux nombres $N\xi$ et $(N)(\xi)$, qui ont le même logarithme ON ou O(N), c'est-à-dire, dont la moyenne géométrique est l'unité OA: accomplissons les rectangles BONC, BO(N)(C), et C, (C) seront des points de la chainette demandée FCA(C)L, suspendue aux deux extrémités F et L, dont le sommet renversé sera A, l'axe OAB, et le paramétre sera OA, ou l'unité prise arbitrairement; et OB ou NC sera la hauteur du point de la chainette C au dessus de l'horizontale NC(N); et BC ou ON logarithme commun des deux nombres $N\xi$, $(N)(\xi)$ sera la largeur de la chainette à cette hauteur, ou la distance du point C de l'axe.

Quant aux principaux problèmes qu'on a coutume de chercher sur les lignes, sçavoir les tangentes, dimension de la courbe, quadrature de son aire, centres de gravité tant de la ligne que de l'aire, ou dimensions des surfaces et des contenus des solides formés par la rotation de la ligne autour de quelque droite qu'on voudra prendre pour l'axe; on trouvera tout cela renfermé dans ce peu de paroles qu'on a mises à la figure. *)

---

*) $OR = OB$, $OR - AR = N\xi$, $OR + AR = (N)(\xi)$, $AR = AC$, $\psi\omega = CA(C) =$ bis AC, rectangl. $RAO =$ spat. AONCA, triangl. OAR et CBT sunt similia. Sint G, P, Q centra gravitatis ipsarum CA(C), AC, AONCA, fiet $O\vartheta + OB =$ bis $OG =$ quater $O\beta$, et $AE = GP = \beta Q$.

Mettons seulement ici l'usage principal de cette ligne, et faisons voir comment elle pourroit servir pour les logarithmes, et toutes sortes de proportionnelles, moyennes ou extrêmes, multiplication, division, règles de trois, ou extractions, pourvû qu'on suppose que cette ligne puisse être décrite physiquement par le moyen d'une chaîne déliée, que je préfère à une corde, laquelle se peut étendre et n'est pas si flexible.

Etant donné le nombre $O\omega$, soit ce nombre, et à l'unité OA, la troisième proportionnelle $O\psi$; et entre $O\omega$, $O\psi$ moyenne arithmétique OB, de B menons à la chainette l'ordonnée BC, et nous aurons le logarithme demandé BC ou ON.

En échange étant donné le logarithme ON, menons de N à angle droit sur ON, la droite de NC, rencontrant la chainette en C; et du centre O du rayon OB, égal à NC, décrivons l'arc de cercle qui coupe AR', horizontale par le sommet A, au point R. Après quoi la différence et la somme des droites OR, AR seront les deux nombres demandés $N\xi$ et $(N)(\xi)$, l'une au dessus, l'autre au dessous de l'unité OA, dont le logarithme commun étoit donné ON. Il resulte encore de ceci et des découvertes de l'auteur de cette méthode sur la loxodromie, qu'il a réduite aux logarithmes, qu'on pourroit résoudre sans tables par la chainette suspendue, comme par les logarithmes, le plus important problème de la Géométrie de la navigation, qui est: *L'angle de la Loxodromie, ou le rhumb du vent avec lequel on va d'un lieu à un autre, étant donné aussi bien que la différence des latitudes, trouver la différence des longitudes.*

Cela peut servir, parce que dans les grands voyages on peut perdre la table des logarithmes, ou la table logarithmiquement graduée, que *Mr. de Leibniz* a proposée. Mais la chainette y pourroit suppléer en cas de besoin. Pour ne rien dire ici des autres règles qu'il a publiées pour se passer au besoin des tables tant des sinus ou tangentes, que de leurs logarithmes, sans rien perdre de la précision, voici en peu de mots la règle, qu'il a donnée pour les rhumbs ou loxodromies, qui pourra tirer les Hydrographes de l'embarras, où ils témoignent se trouver sur ce sujet.

La différence des longitudes est au logarithme de la raison qu'il y a du nombre $\frac{1+e}{1-e}$ au nombre $\frac{1+(e)}{1-(e)}$, comme la tangente de l'angle que le rhumb ou la loxodromie fait au méridien, est à

un certain nombre constant et perpétuel, qu'on peut marquer une fois pour toutes, supposé que le sinus total soit l'unité, et que e soit le sinus de la latitude plus grande et (e) le sinus de la latitude plus petite. Et s'il y avoit une carte, où les degrés de longitude fussent égaux, les méridiens paralléles et par conséquent les loxodromies représentées par des droites, il faudroit représenter les degrés de latitude dans les divisions du méridien en telle sorte qu'une droite qui couperoit obliquement les méridiens éloignés l'un de l'autre plus prochain d'un même intervalle, par exemple, des méridiens disposés de degrés en degrés, y rencontreroit des latitudes, dont les sinus étant e et le sinus total 1, les nombres $\frac{1+e}{1-e}$ seroient en progression géométrique. Ce qui suffit pour la construction d'une carte graduée comme il faut pour la Marine. On en peut encore construire d'autres sur le même fondement.

VII.

SOLUTIO ILLUSTRIS PROBLEMATIS A GALILAEO PRIMUM PROPOSITI DE FIGURA CHORDAE AUT CATENAE E DUOBUS EXTREMIS PENDENTIS, PRO SPECIMINE NOVAE ANALYSEOS CIRCA INFINITUM.*)

Galilaeus inter caetera praeclara cogitata primus in catenae aut chordae e duobus extremis suspensae figuram inquisivit, etsi quod quaerebat non sit assecutus; nondum enim ejus temporibus eo quo nunc profecerat Geometria, ut talia in potestate essent. Sed nec ab eo tempore solutionem dedit quisquam, donec Cl. Vir Godefridus Guilelmus Leibnitius ea quae sequitur occasione ad hanc meditationem fuit invitatus. Ediderat is Analysin quandam novam circa infinitum a Cavaleriana Geometria indivisibilium et Wallisiana Arithmetica infinitorum plane diversam, nec ut illa a lineis, nec ut haec a numerorum seriebus pendentem, sed generalem, adeoque speciosam seu Symbolicam, in qua loco vulgaris calculi analytici per potentias et radices, adhibetur calculus per differentias

*) Aus dem Giornale de' Letterati dell' an. 1692 pag. 128—132. Modena.