ANALYSIS

INFINITORUM.

Von den Manuscripten aus den Jahren 1675 bis 1684, die als Beläge dienen, dass Leibniz den Algorithmus und die Rechnungsregeln der höhern Analysis selbstständig gefunden, kann keines in der vorliegenden Sammlung einen Platz finden, insofern sie in ihrer ganzen Haltung zeigen, dass sie nur Studien und erste Entwürfe sind; es fehlt ihnen offenbar die Durcharbeitung und die Vollendung, die den Charakter einer mathematischen Abhandlung ausmachen. Merkwürdigerweise hat eine Leibniz sehr missgünstige Critik an den aus dieser Zeit veröffentlichten Manuscripten dies übersehen und in den darin vorkommenden leichten Verstössen und Fehlern einen Anhalt gesucht, um, man möchte fast sagen, Leibniz der Ignoranz zu zeihen und namentlich die alte Anklage des Plagiats gegen ihn zu erneuern. Der Grund, weshalb dies möglich gewesen, liegt unsers Erachtens lediglich darin, dass Leibniz die Gewohnheit hatte, bei seinen mathematischen Studien und Untersuchungen jedes Wort, das er dachte, hinzuschreiben; sie erhalten dadurch für den, der mit der Beschaffenheit der Leibnizischen Manuscripte nicht vertraut ist, den Schein irgend welcher Vollendung.

Dagegen wird eine kurze zusammenhängende Darstellung der Ergebnisse, die in Betreff der Entdeckung des Algorithmus der höhern Analysis aus jenen Manuscripten folgen, an dieser Stelle gerechtfertigt erscheinen. Zuvörderst muss die Bemerkung vorausgeschickt werden, dass Leibniz seit seinen frühesten wissenschaftlichen Studien klar erkannt hatte, wie viel überall auf eine passend gewählte Zeichensprache ankommt, und dass nicht allein die richtige Darstellung des bereits Bekannten davon abhängt, sondern dass auch die Auffindung neuer Wahrheiten, der Fortschritt der Wissenschaften überhaupt, dadurch bedingt wird. Diesen Gedanken, der ihm unausgesetzt vorschwebte, hat er vielleicht am frischesten und ursprünglichsten auf einem der vielen tausend Zettel, die zwischen seinen Manuscripten zerstreut sich finden und deren Studium hinsichtlich des Ursprungs seiner Ideen eine nicht unwichtige Ausbeute ergeben möchte, ausgedrückt. Leibniz hat nämlich unter dem 26. März 1676, einige Monate also nach jener denkwürdigen Entdeckung, bemerkt: Illustribus exemplis quotidie disco, omnem solvendi pariter problemata et inveniendi theoremata artem, tunc cum res ipsa imaginationi non subjacet aut nimis vasta est, eo redire, ut characteribus sive compendiis imaginationi subjiciatur, atque quae pingi non possunt, qualia sunt intelligibilia, ea pingantur tamen hieroglyphica quadam ratione, sed eadem et philosophica. Quod fit, si non ut pictores, mystae aut Sinenses similitudines quasdam sectemur, sed rei ipsius ideam sequamur. *)

Nachdem Leibnizens Vorliebe für die Mathematik durch den Umgang mit Hugens und durch dessen Aufmunterung während seines Aufenthaltes zu Paris von neuem erwacht war, vertiefte er sich mit dem ganzen Feuer jugendlicher Begeisterung in das Studium der Cartesianischen Geometrie, welche er bis dahin nur oberflächlich kannte. Es konnte nicht fehlen, dass die Probleme, welche Descartes als die Spitze aller mathematischen Speculation gepriesen hatte, das direkte und das umgekehrte Tangentenproblem, seine Aufmerksamkeit in hohem Grade reizten. Leibniz construirte bereits im Jahre 1673 das von ihm sogenannte „triangulum characteristicum" und fand im Betreff desselben eine grosse Anzahl von Relationen; **) im folgenden Jahre 1674 erkannte er, dass das umgekehrte Tangentenproblem und die Quadratur der Curven im innigsten Zusammenhange ständen. Es lag nun nahe, umgekehrt zu versuchen, ob nicht durch die Quadratur der Curven zur Lösung eben dieses Problems zu gelangen sei. Er unterwarf deshalb die desfallsigen Methoden einer eingehenden Prüfung, und hierbei geschah es, dass er am 29. October 1675 statt der bis dahin üblichen wörtlichen Bezeichnung das Summen- oder späterhin allgemein genannte Integralzeichen einführte. Aus dem Manuscript von dem genannten Tage geht hervor, dass vorhandene Relationen sofort auf

---

*) Fast 20 Jahre später äussert Leibniz in einem Briefe an den Marquis de l'Hospital (28. Avril 1693) denselben Gedanken: Une partie du secret de l'analyse consiste dans la caracteristique, c'est à dire dans l'art de bien employer les notes dont on se sert. Leibniz. mathematische Schriften, Bd. II. S. 240.

**) Leibniz fand diese Sätze, ohne Barrow's Schriften zu kennen; sie werden, zugleich mit andern Beweisstücken, in einem Supplementbande erscheinen.

mehrfache Integrale führten, so wie auch, dass Leibniz durch den Gegensatz auf die Differenz und auf das Differentialzeichen kam. Die bereits feststehenden Lehrsätze über Quadraturen, besonders über die Parabel, dienten, wie bisher, als Prüfungsmittel für die Richtigkeit des neuen Calculs, und liessen ihn sogleich erkennen, dass das Summenzeichen die Dimensionen erhöht, das Differentialzeichen vermindert: die ersten Lehrsätze der Integral- und Differentialrechnung waren gefunden und zwar lediglich durch die eingeführten neuen Operationszeichen. Mit Recht ruft Leibniz aus: Satis haec nova et notabilia, cum novum genus calculi inducant! Der Algorithmus der höhern Analysis tritt demnach in seinem Entstehen als ein Operationscalcul auf, und dass er als solcher sogleich auch von Leibniz erkannt wird, das ist, was seinen Anspruch auf die selbstständige Entdeckung desselben unwiderleglich begründet. — Hiermit in Uebereinstimmung sind denn auch die Versuche, die Leibniz in den folgenden Tagen machte, um die weitern Rechnungsregeln des neuen Calculs zu finden. Insbesondere geht dies aus dem Manuscript vom 11. November 1675 hervor, wo es heisst: Videndum an dxdy idem sit quod $d\overline{xy}$ et an $\frac{dx}{dy}$ idem quod $\frac{d\overline{x}}{d\overline{y}}$. Er überzeugt sich, dass dxdy etwas anderes ist als $d\overline{xy}$ und dass $\frac{dx}{dy}$ nicht mit $\frac{d\overline{x}}{d\overline{y}}$ gleiche Bedeutung hat. Zehn Tage später, in einem Manuscript vom 21. November 1675, erhält Leibniz den Ausdruck für d(xy) und bezeichnet ihn sogleich als ein für alle Curven gültiges Theorem.

Mit diesen Bemühungen zur Aufstellung von Rechnungsregeln für den neuen Calcul gehen die Versuche Hand in Hand, die gewonnenen Resultate auch auf andere Weise zu erhärten, wie es bei jedem Operationscalcul immer der Fall sein muss. Welche Bedeutung den Zeichen dx, dy, dz u. s. w. beizulegen ist, wird von Leibniz auffallend selten berührt; es verdient hervorgehoben zu werden, dass Leibniz sich sträubte, sie als unendlich kleine Grössen aufzufassen. Unter andern findet sich auf einem Blatte, mit 26. März 1676 bezeichnet, folgende Notiz: „Videndum an exacte demonstrari possit in quadraturis, quod differentia non tantum sit infinite parva, sed omnino nulla, quod ostendetur, si constet eousque inflecti semper posse polygonum, ut differentia assumta etiam infinite parva minor fiat error. Quo posito sequitur non tantum errorem non esse infinite parvum, sed omnino esse nullum, quippe cum nullus assumi possit." Später indess änderte Leibniz seine Ansicht; je mehr er von der Zuverlässigkeit seiner neuen Rechnung überzeugt wurde, um so laxer gewissermassen und unbestimmter äusserte er sich über die Bedeutung der Differentiale.

Ueber die unendliche Tragweite seines gefundenen Schatzes hatte Leibniz in der ersten Zeit der Entdeckung noch keine genügende Erkenntniss; nur das leuchtete ihm sehr bald ein, dass die beiden Probleme, das direkte und umgekehrte Tangentenproblem, dadurch allgemein gelöst werden könnten. Das grösste Gewicht legte er auf das letztere, und der Sitte seiner Zeit folgend, eine neue Methode so lange als möglich der Oeffentlichkeit vorzuenthalten, vermied er sorgfältig den Algorithmus der Integralrechnung bekannt werden zu lassen, mit dessen Hülfe er noch Bedeutenderes zu leisten gedachte. *) Daher kommt es denn auch, dass er zuerst nur den Algorithmus der Differentialrechnung bekannt machte in der denkwürdigen Abhandlung: Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus, die in den Actis Erudit. Lips. des Jahres 1684 erschien.

In dieser Abhandlung befolgt Leibniz genau den Gang der Entdeckung des Algorithmus der höhern Analysis, und dies ist offenbar der Grund — denn er gab stets unter allen Darstellungen derjenigen den Vorzug, die sich an die Art und Weise des Ursprungs so nahe als möglich anschloss — weshalb er gerade auf diese in hohem Grade abstrakte Weise den Algorithmus der Differentialrechnung veröffentlichte und zwei andere Entwürfe, die sich unter seinen Manuscripten noch vorfinden und die für seine Zeitgenossen minder schwer zu verstehen gewesen wären, bei Seite legte.**)

---

*) Auf diese Weise geschah es, dass Leibniz nicht nur für seine Zeitgenossen, sondern sogar bis auf unsere Tage der Ehre, der Entdecker der Integralrechnung zu sein, verlustig gegangen ist, und dass allgemein Johann Bernoulli dafür gehalten wird. Vergl. Bd. III. S. 115 f.

**) Der eine dieser Entwürfe ist unter der Aufschrift: Elementa calculi novi pro differentiis et summis, tangentibus et quadraturis, maximis et minimis, dimensionibus linearum, superficierum, solidorum,

Auch findet sich in dieser Abhandlung jene unvermittelte Lücke, auf die bereits oben aufmerksam gemacht ist, wie nämlich die Differentiale in ihrem Verhältniss zu den ursprünglich gegebenen Grössen aufzufassen sind. „Ex cognito, heisst es daselbst, hoc velut Algorithmo, ut ita dicam, calculi hujus, quem voco differentialem, omnes aliae aequationes differentiales inveniri possunt per calculum communem, maximaeque et minimae, itemque tangentes haberi, ita ut opus non sit tolli fractas aut irrationales aut alia vincula, quod tamen faciendum fuit secundum Methodos hactenus editas. Demonstratio omnium facilis erit in his rebus versato, et hoc unum hactenus non satis expensum consideranti, ipsas dx, dy, dv, dw, dz ut ipsarum x, y, v, w, z (cujusque in sua serie) differentiis sive incrementis vel decrementis momentaneis proportionales haberi posse." — Dagegen ist auf der andern Seite hervorzuheben, dass Leibniz bereits in dieser ersten Abhandlung zeigt, wie vielseitig auf die verschiedensten Probleme die neue Rechnung sich anwenden lässt und deren Schwierigkeiten auf leichte Weise überwindet.

Im Folgenden finden sich alle Abhandlungen, die auf die Analysis des Unendlichen sich beziehen, vereinigt. Sie sind nach der Zeit ihres Erscheinens geordnet, jedoch so, dass die, welche auf denselben Gegenstand Bezug haben, zusammengestellt sind. In Betreff derjenigen, welche hier zum ersten Male abgedruckt sind, ist das Nöthige bei jeder einzelnen Abhandlung angemerkt.

---

aliisque communem calculum transcendentibus, im Anhang zu der Schrift: Historia et origo calculi differentialis, a G. G. Leibnitio conscripta, Hannov. 1846, abgedruckt.

I.

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, ITEMQUE TANGENTIBUS, QUAE NEC FRACTAS NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR, ET SINGULARE PRO ILLIS CALCULI GENUS*).

Sit (fig. 111) axis AX, et curvae plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatae ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quae vocentur respective v, w, y, x, et ipsa AX, abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE, axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, et recta, quae sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad XB (vel XC, vel XD, vel XE) vocetur dv (vel dw, vel dy, vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, vel y, vel z). His positis, calculi regulae erunt tales.

Sit a quantitas data constans, erit da aequalis 0, et $d\overline{ax}$ erit aequalis adx. Si sit y aequ. v (seu ordinata quaevis curvae YY aequalis cuivis ordinatae respondenti curvae VV) erit dy aequ. dv. Jam *Additio et Subtractio*: si sit z — y + w + x aequ. v, erit $d\overline{z - y + w + x}$ seu dv aequ. dz — dy + dw + dx. *Multiplicatio*: $d\overline{xv}$ aequ. xdv + vdx, seu posito y aequ. xv, fiet dy aequ. xdv + vdx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum, et x et dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y et dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam, non dari semper regressum a differentiali Aequatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*: $d\frac{v}{y}$ vel (posito z aequ. $\frac{v}{y}$) dz aequ. $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$.

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, et pro + z scribi + dz, pro — z scribi — dz, ut ex addi-

*) Act. Erud. Lips. an. 1684.

tione et subtractione paulo ante posita apparet; sed quando ad exegesin valorum venitur, seu cum consideratur ipsius z relatio ad x, tunc apparere, an valor ipsius dz sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa: quod posterius cum fit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non versus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsae ordinatae z decrescunt crescentibus x. Et quia ipsae ordinatae v modo crescunt, modo decrescunt, erit *dv* modo affirmativa, modo negativa quantitas, et priore casu $_1V_1B$ tangens ducitur versa A, posteriore $_2V_2B$ in partes aversas: neutrum autem fit in medio circa M, quo momento ipsae v neque crescunt neque decrescunt, sed in statu sunt, adeoque fit dv aequ. 0, ubi nihil refert, quantitas sitne affirmativa an negativa, nam + 0 aequ. — 0: eoque in loco ipsa v, nempe ordinata LM, est *Maxima* (vel si convexitatem Axi obverteret, *Minima)* et tangens curvae in M neque supra X ducitur ad partes A, ibique axi propinquat, neque infra X ad partes contrarias, sed est axi parallela. Si dv sit infinita respectu ipsius dx, tunc tangens est ad axem recta, seu est ipsa ordinata. Si dv et dx aequales, tangens facit angulum semirectum ad axem. Si crescentibus ordinatis v, crescunt etiam ipsa earum incrementa vel differentiae dv (seu si positis dv affirmativis, etiam ddv, differentiae differentiarum, sunt affirmativae, vel negativis, negativae) curva axi obvertit *concavitatem*, alias *convexitatem* *): ubi vero est maximum vel minimum incrementum, vel ubi incrementa ex decrescentibus fiunt crescentia, aut contra, ibi est *punctum flexus contrarii*, et concavitas atque convexitas inter se permutantur, modo non et ordinatae ibi ex crescentibus fiant decrescentes, vel contra, tunc enim concavitas aut convexitas maneret: ut autem incrementa continuent crescere aut decrescere, ordinatae vero ex crescentibus fiant decrescentes, vel contra, fieri non potest. Itaque punctum flexus contrarii locum habet, quando neque v neque dv existente 0, tamen ddv est 0. Unde etiam problema flexus contrarii non duas, ut problema maximae, sed tres habet radices aequales. Atque haec omnia quidem pendent a recto usu signorum.

Interdum autem adhibenda sunt *Signa ambigua*, ut nuper in *Divisione*, antequam scilicet constet quomodo explicari debeant. Et

*) Offenbar findet hier eine Verwechselung der Worte „*concavitatem*" und „*convexitatem*" statt.

quidem si crescentibus x, crescunt (decrescunt) $\frac{v}{y}$, debent signa ambigua in $d\frac{v}{y}$ seu in $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$ ita explicari, ut haec fractio fiat quantitas affirmativa (negativa). Significat autem $\mp$ contrarium ipsius $\pm$, ut si hoc sit $+$, illud sit $-$, vel contra. Possunt et in eodem calculo occurrere plures ambiguitates, quas distinguo parenthesibus, exempli causa si esset $\frac{v}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{v} = w$, foret $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy} + \frac{(\pm)\, ydz\, (\mp)\, zdy}{zz} + \frac{((\pm))\, xdv\, ((\mp))\, vdx}{vv} = dw$, alioqui ambiguitates ex diversis capitibus ortae confunderentur. Ubi notandum, signum ambiguum in se ipsum dare $+$, in suum contrarium dare $-$, in aliud ambiguum formare novam ambiguitatem ex ambabus dependentem.

Potentiae: $dx^a = a\,.\,x^{a-1}\,dx$, exempli gratia $dx^3 = 3x^2dx$. $d\frac{1}{x} = -\frac{adx}{x^{a+1}}$, ex. gr. si w sit $= \frac{1}{x^3}$, fiet $dw = -\frac{3dx}{x^4}$.

Radices: $d, \sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}\,dx \sqrt[b]{x^{a-b}}$ (hinc $d\sqrt[2]{y} = \frac{dy}{2\sqrt[2]{y}}$, nam eo casu est 1, et b est 2; ergo $\frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}$ est $\frac{1}{2}\sqrt[2]{y^{-1}}$; jam y^{-1} idem est quod $\frac{1}{y}$, ex natura exponentium progressionis Geometricae, et $\sqrt[2]{\frac{1}{y}}$ est $\frac{1}{\sqrt[2]{y}}$), $d\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}} = \frac{-adx}{b\sqrt[b]{x^{a+b}}}$. Suffecisset autem regula potentiae integrae tam ad fractas tam ad radices determinandas, potentia enim sit fracta cum exponens est negativus, et mutatur in radicem cum exponens est fractus: sed malui consequentias istas ipse deducere, quam aliis deducendas relinquere, cum sint admodum generales et crebro occurrentes, et in re per se implicita praestet facilitati consulere.

Ex cognito hoc velut *Algorithmo*, ut ita dicam, calculi hujus, quem voco *differentialem*, omnes aliae aequationes differentiales inveniri possunt per calculum communem, maximaeque et minimae, itemque tangentes haberi, ita ut opus non sit tolli fractas aut irrationales aut alia vincula, quod tamen faciendum fuit secundum

Methodos hactenus editas. Demonstratio omnium facilis erit in his rebus versato et hoc unum hactenus non satis expensum consideranti, ipsas dx, dy, dv, dw, dz, ut ipsarum x, y, v, w, z (cujusque in sua serie) differentiis sive incrementis vel decrementis momentaneis proportionales haberi posse. Unde fit, ut proposita quacunque aequatione scribi possit ejus aequatio differentialis, quod fit pro quolibet *membro* (id est parte, quae sola additione vel subtractione ad aequationem constituendam concurrit) substituendo simpliciter quantitatem membri differentialem, pro alia vero quantitate (quae non ipsa est membrum, sed ad membrum formandum concurrit) ejus quantitatem differentialem ad formandam differentialem quantitatem ipsius membri adhibendo non quidem simpliciter, sed secundum Algorithmum hactenus praescriptum. Editae vero hactenus methodi talem transitum non habent, adhibent enim plerumque rectam ut DX, vel aliam hujusmodi, non vero rectam dy, quae ipsis DX, DY, dx est quarta proportionalis, quod omnia turbat; hinc praecipiunt, ut fractae et irrationales (quas indeterminatae ingrediuntur) prius tollantur; patet etiam methodum nostram porrigi ad lineas transcendentes, quae ad calculum Algebraicum revocari non possunt, seu quae nullius sunt certi gradus, idque universalissimo modo, sine ullis suppositionibus particularibus non semper succedentibus, modo teneatur in genere, *tangentem* invenire esse rectam ducere, quae duo curvae puncta distantiam infinite parvam habentia jungat, seu latus productum polygoni infinitanguli, quod nobis *curvae* aequivalet. Distantia autem illa infinite parva semper per aliquam differentialem notam, ut dv, vel per relationem ad ipsam exprimi potest, hoc est per notam quandam tangentem. Speciatim, si esset y quantitas transcendens, exempli causa ordinata cycloeidis, eaque calculum ingrederetur, cujus ope ipsa z, ordinata alterius curvae, esset determinata, et quaereretur dz, seu per eam tangens hujus curvae posterioris, utique determinanda esset dz per dy, quia habetur tangens cycloeidis. Ipsa autem tangens cycloeidis, si nondum haberi fingeretur, similiter calculo inveniri posset ex data proprietate tangentium circuli.

Placet autem exemplum calculi proponere, ubi notetur, me divisionem hic designare hoc modo: x : y, quod idem est ac x divis. per y seu $\frac{x}{y}$. Sit aequatio *prima* seu data $x : y + \overline{\overline{a + bx}\;\overline{c - xx}}$: quadrat. $ex + fxx + ax\sqrt{gg + yy} + yy : \sqrt{hh + lx + mxx}$ aequ. 0, exprimens relationem inter x et y seu inter AX et XY, posito ipsas a, b, c, e, f, g, h, l, m esse datas; quaeritur modus ex dato puncto Y educendi YD, quae curvam tangat, seu quaeritur ratio rectae DX ad rectam datam XY. Compendii causa pro $a + bx$ scribamus n; pro $c - xx$, p; pro $ex + fxx$, q; pro $gg + yy$, r; pro $hh + lx + mxx$, s; fiet $x : y + np : qq + ax\sqrt{r} + yy : \sqrt{s}$ aequ. 0, quae sit aequatio *secunda*. Jam ex calculo nostro constat $d, x:y$ esse $\pm \overline{xdy \mp ydx} : yy$; et similiter $d, np : qq$ esse $(\pm)\ \overline{2npdq\ (\mp)\ qndp + pdn}, : q^3$ et $d, ax\sqrt{r}$ esse $+ axdr : 2\sqrt{r} + adx\sqrt{r}$; et $d, yy : \sqrt{s}$ esse $((\pm))\ yyds\ ((\mp))\ 4ysdy : 2s\sqrt{s}$, quae omnes quantitates differentiales inde ab ipso $d, x : y$ usque ad $d, yy : \sqrt{s}$ in unum additae facient 0, et dabunt hoc modo aequationem *tertiam*, ita enim pro membris secundae aequationis substituuntur quantitates eorum differentiales. Jam dn est bdx, et dp est $-2xdx$, et dq est $edx + 2fxdx$, et dr est 2ydy, et ds est $ldx + 2mxdx$. Quibus valoribus in Aequatione tertia substitutis habebitur aequatio *quarta*, ubi quantitates differentiales, quae solae supersunt, nempe dx, dy, semper reperiuntur extra nominatores et vincula, et unumquodque membrum afficitur vel per dx, vel per dy, servata semper lege homogeneorum quoad has duas quantitates, quomodocunque implicatus sit calculus: unde semper haberi potest valor ipsius $dx : dy$ seu rationis dx ad dy, hoc est DX quaesitae ad XY datam, quae ratio in hoc nostro calculo (mutando aequationem quartam in Analogiam) erit ut $\mp x : \overline{yy - axy : \sqrt{r}}\ ((\mp))\ 2y : \sqrt{s}$ est ad $\mp \overline{l : y}\ (\pm)\ \overline{2npe + 2fx}, : q^3\ (\mp)\ \overline{-2nx + pb} : qq + a\sqrt{r}\ ((\pm))\ \overline{yyl + 2mx} : 2s\sqrt{s}$. Dantur autem x et y ex dato puncto Y. Dantur et valores suprascripti literarum n, p, q, r, s per x et y. Habetur ergo quaesitum. Atque hoc exemplum satis implicatum ideo tantum ascripsimus, ut modus superioribus regulis in calculo etiam difficiliore utendi appareret. Nunc praestat usum in exemplis intellectui magis obviis ostendere.

Data sint duo puncta C et E (fig. 112), et recta SS in eodem cum ipsis plano; quaeritur punctum F in SS ita sumendum, ut junctis CF, EF, sit aggregatum rectangulorum CF in datam h, et FE in datam r, omnium possibilium minimum, hoc est si SS sit mediorum separatrix, et h repraesentet densitatem medii ut aequae a parte C, et r densitatem medii ut aëris a parte E, quaeritur punctum F tale, ut via a C ad E per F sit omnium possibilium facillima. Ponamus omnia ista rectangulorum aggregata

possibilia, vel omnes viarum possibilium difficultates, repraesentari per ipsas KV, curvae VV ordinatas ad rectam GK normales, quas vocabimus ω, quaerique minimam earum NM. Quia dantur puncta C et E, dabuntur et perpendiculares ad SS, nempe CP (quam vocabimus c) et EQ (quam e) et praeterea PQ (quam p), ipsa autem QF, quae sit aequalis ipsi GN (vel AX), vocabimus x, et CF, f, et EF, g; fiet FP, $p - x$, f. aequ. $\sqrt{cc + pp - 2px + xx}$ seu compendio $\sqrt{l}$, et g aequ. $\sqrt{ee + xx}$ seu compendio $\sqrt{m}$. Habemus ergo ω aequ. $h\sqrt{l} + r\sqrt{m}$, cujus aequationis aequatio differentialis (posito $d\omega$ esse 0, in casu minimae) est 0 aequ. $+ hdl : 2\sqrt{l} + rdm : 2\sqrt{m}$ per regulas calculi nostri traditas; jam dl est $-2dx\,\overline{p - x}$, et dm est 2xdx, ergo fit: $h\,\overline{p - x} : f$ aequ. $rx : g$. Quodsi jam haec accommodentur ad dioptricam, et ponantur f et g seu CF et EF aequales, quia eadem manet refractio in puncto F, quantacunque ponatur longitudo rectae CF, fiet $h\,\overline{p - x}$ aequ. rx, seu $h : r :: x : p - x$, seu h ad r ut QF ad FP, hoc est sinus angulorum incidentiae et refractionis FP et QF erunt reciproce ut r et h, densitates mediorum, in quibus fit incidentia et refractio. Quae densitas tamen non respectu nostri, sed respectu resistentiae quam radii lucis faciunt, intelligenda est. Et habetur ita demonstratio calculi, alibi a nobis in his ipsis Actis *) exhibiti, quando generale Opticae, Catoptricae et Dioptricae fundamentum exponebamus, cum alii doctissimi Viri multis ambagibus venati sint, quae hujus calculi peritus tribus lineis imposterum praestabit. Quod alio adhuc exemplo docebo. Sit curva 133 (fig. 113) talis naturae, ut a puncto ejus quocunque ut 3 ductae ad sex puncta fixa in axe posita 4, 5, 6, 7, 8, 9, sex rectae 34, 35, 36, 37, 38, 39 simul additae, sint rectae datae g aequales. Sit axis T 14526789, et 12 sit abscissa, 23 ordinata, quaeritur tangens 3 T; dico fore T 2 ad 23 ut $\frac{23}{34} + \frac{23}{35} + \frac{23}{36} + \frac{23}{37} + \frac{23}{38} + \frac{23}{39}$ est ad $-\frac{24}{34} - \frac{25}{35} + \frac{26}{36} + \frac{27}{37} + \frac{28}{38} + \frac{29}{39}$. Eademque erit regula, continuatis tantum terminis, si non sex, sed decem, vel plura puncta fixa supponerentur, qualia secundum methodos tangentium editas calculo praestare sublatis irrationalibus, taediosissimae et aliquando insuperabilis operae foret, ut si rectangula plana vel solida secundum omnes biniones vel terniones possibiles ex rectis illis composita datae quantitati aequari deberent,

*) Act. Erudit. Lips. an. 1682.

in quibus omnibus, et multo implicatioribus, methodi nostrae eadem est opinione multo major rarissimique exempli facilitas. Et haec quidem initia sunt tantum Geometriae cujusdam multo sublimioris, ad difficillima et pulcherrima quaeque etiam mistae Matheseos problemata pertingentis, quae sine calculo nostro differentiali, aut simili, non temere quisquam pari facilitate tractabit. Appendicis loco placet adjicere solutionem Problematis, quod *Cartesius* a *Beaunio* sibi propositum Tom. 3. Epist. tentavit, sed non solvit: Lineam invenire WW talis naturae, ut ducta ad axem tangente WC, sit XC semper aequalis eidem rectae constanti *a*. Jam XW seu *w* ad XC seu *a*, ut dw ad dx; ergo si dx (quae assumi potest pro arbitrio) assumatur constans sive semper eadem, nempe b, seu si ipsae x sive AX crescant uniformiter, fiet w aequ. $\frac{a}{b}$dw, quae erunt ipsae w ordinatae ipsis dw, suis incrementis sive differentiis, proportionales, hoc est si x sint progressionis arithmeticae, erunt w progressionis Geometricae, seu si w sint numeri, x erunt logarithmi: linea ergo WW logarithmica est.

II.

DE GEOMETRIA RECONDITA ET ANALYSI INDIVISIBILIUM ATQUE INFINITORUM. *)

Cum intelligam nonnulla, quae in his Actis ad Geometriae profectum publicavi, non mediocriter a Viris quibusdam doctis probari, quin et paulatim in usum transferri, quaedam tamen sive scribentis vitio sive aliam ob causam ab aliquibus non satis fuisse percepta, ideo pretium operae putavi, hoc loco adjicere, quae illustrare priora possint. Accepi nimirum tractatum *Dn. Craigii De Dimensione figurarum*, Londini anno superiore editum, ex quo sane apparet, autorem non contemnendos in Geometria interiore progressus fecisse. Is quidem valde approbat distinctionem a me aliquoties inculcatam inter dimensiones figurarum generales et speciales, quam pag. 1 ait optime nuper a Geometris fuisse observatam, et neglectioni hujus distinctionis paralogismos complures tetragonismi impossibilitatem probare conantium recte tribuit. Mecum

*) Act. Erudit. Lips. an. 1686.

etiam figuras, quas vulgo e Geometria rejiciunt, agnoscit esse Transcendentes pag. 26. Methodum quoque Tangentium a me in Actis Octobr. 1684 publicatam pro humanitate sua plurimum laudat pag. 27 et 29 tamquam praestantissimam, et cujus ope methodus dimensionum valde juvetur, optimo contra irrationalitates remedio suppeditato. Sunt tamen nonnulla, de quibus monere eum aliosque nec inutile nec ipsi ingratum fore putavi. Nescio enim quomodo factum sit, ut crediderit, eum qui Schediasma Act. Maji 1684 p. 233 scripsit, retractasse sententiam, et cum initio Act. Octobr. 1683 proposuisset omnimodam dare demonstrationem impossibilitatis tetragonismi circularis, postea agnovisse Majo anni sequentis, nondum satis demonstratam esse impossibilitatem tetragonismi specialis. Cum tamen Schediasma Octobr. 1683 sit a Dn. D. T.*), Schediasma vero Maji 1684 a me sit profectum, qui partim eandem methodum et mihi asserebam, ne aliquando rei alienae usurpatae accusarer, partim ab usu, quem ei tribuebat Dn. D. T., amice dissentiebam. Nam putabat ille, ex indefiniti tetragonismi impossibilitate sequi et cujusque definiti impossibilitatem: meum vero constans dogma fuerat (jam tum indicatum, cum tetragonismum arithmeticum ederem, mense secundo anni primi Actorum, nempe 1682), ab illa ad hanc non valere consequentiam. Quod ut probarem, instantiam cujusdam figurae attuli in Actis Maji 1684, quae tetragonismum specialem recipit (quod possum demonstrare), non vero generalem, ut ex ipsis Dn. D. T. theorematis ibi ostendere susceperam, quamquam festinus et rei certus in modo probandi per calculum nonnihil aberraverim, quod postea explicabo et corrigam. Ad haec Dn. D. T. privatim respondit, se methodum istam non ex meis hausisse, sed in eam proprio Marte devenisse, et quod ad objectionem attineret, se consequentiam illam a tetragonismis indefinitis ad definitos posse demonstrare, inque eo potissimum methodum suam eminere; instantiam vero meam pravo calculo niti. Ego vero lubens fassus sum (in Actis Decembr. 1684 p. 587) si eam consequentiam demonstrare possit, facturum quod hactenus nemo; semper tamen subdubitavi, et correcto calculo postea instantiam meam roboravi, de quo mox. Quamquam autem ego hanc methodum jam habuerim ante decennium et amplius, cum una essemus Parisiis et de rebus Geometricis creberrime loquere-

*) Tschirnhaus.

mur, quo tempore ipse per alias plane vias incedebat, mihi vero jam tum familiarissimum erat aequationes generales adhibere pro exprimenda natura lineae quaesitae, progressu calculi determinandas, in quo methodi nervus consistit, quale quid alibi nuspiam animadverteram: attamen candori ejus pariter et ingenio tantum tribuo, ut facile credam, vel ipsum per se in haec incidisse, vel saltem non amplius meminisse, qua olim occasione talium meditationum semina fuerint jacta, praesertim cum sciam, etiam difficiliora ipsum per se praestitisse, et multa praeclara maximique momenti ab ejus ingenio posse expectari.

Quoniam vero in instantiae supradictae calculo erratum a me, ut dixi, admissum est, quod Dn. Craigius Dno. D. T. (cui id tribuerat) tanquam argumentum, opinor, ad hominem objecit, ut ipsam methodum indefinitam refutaret, ideo corrigere calculum debeo. Inspiciatur Actorum anni 1684 pag. 239*), ubi aequationem $4zz - 8hz$ etc. conferendo cum aequatione $bzz + caz$ etc. debent in aequatione posteriore termini, ubi abest z, extra fractionem positi multiplicari per fractionis nominatorem, antequam comparatio instituatur, ut in utraque fractione omnes termini carentes litera z una fractione comprehendantur. Ponatur et $b = 1$, quod semper fieri potest, et quia in aequatione priore terminus xz plane abest, fiat in posteriore $d = 0$, dividatur et aequatio prior seu data per 4, et in posterioris seu supposititiae aequationis fractione tam numerator, quam nominator dividatur per g: ita tam terminus zz utrobique, quam terminus zz in nominatore fractionis utrobique consentient. Caetera comparando, ob terminum z fiet $c = 2h : a$; ob x^4 fiet $g = 1 : 16$ seu $\frac{1}{16}$; ob x^3 fiet $f = -1 : 6a$; ob x in nominatore fiet $f = -h : 8a$. Ergo fit $h = 8 : 6$ seu $\frac{4}{3}$, quod absurdum, nam h est quantitas data. Oriuntur et aliae ex comparatione continuata absurditates, nam fit vel c vel $f = 0$, contra jam conclusa.

Caeterum placet hoc loco, ut magis profutura dicamus, *fontem aperire Transcendentium Quantitatum,* cur nimirum quaedam problemata neque sint plana, neque solida, neque sursolida, aut ullius certi gradus, sed omnem aequationem Algebraicam transcendant. Eademque opera modum ostendemus, quomodo sine calculo demonstrari possit, lineam quadratricem Algebraicam circuli et hyperbolae esse impossibilem. Si enim ista daretur, sequeretur ejus

*) Vergl. die Abhandlung De Dimensionibus Figurarum inveniendis.

ope angulum aut rationem sive logarithmum secari posse in data ratione rectae ad rectam, idque una generali constructione, et proinde problema sectionis anguli vel inventionis quotcunque mediarum proportionalium foret certi gradus, cum tamen pro alio numero partium anguli aut mediarum proportionalium alius atque alius gradus aequationis Algebraicae requiratur, et ideo problema intellectum in genere de numero partium aut mediarum quocunque sit gradus indefiniti et omnem Algebraicam aequationem transcendat. Quoniam tamen nihilominus talia problemata revera in Geometria proponi possunt, imo inter primaria haberi debent, et determinata sunt; ideo necesse utique est, eas quoque lineas recipi in Geometriam, per quales solas construi possunt; et cum ea exacte continuoque motu describi possint, ut de Cycloide et similibus patet, revera censendas esse non Mechanicas, sed Geometricas, praesertim cum utilitate sua lineas communis Geometriae (si rectam circulumque exceperis) multis parasangis post se relinquant et maximi momenti proprietates habeant, quae prorsus Geometricarum demonstrationum sunt capaces. *Non minor ergo Cartesii Geometria eas excludentis, quam Veterum lapsus fuit*, qui loca solida aut linearia tamquam minus Geometrica rcjiciebant.

Quoniam etiam methodus investigandi Tetragonismos indefinitos aut eorum impossibilitates apud me casus tantum specialis est (et quidem facilior) problematis multo majoris, quod appello *Methodum Tangentium inversam*, in quo maxima pars totius Geometriae transcendentis continetur, et quod si Algebraice semper possit solvi, omnia reperta haberentur, et vero nihil adhuc de eo extare video satisfaciens; ideo ostendam quomodo non minus absolvi possit, quam Tetragonismus ipse indefinitus. Cum igitur antea Algebraistae assumerent literas seu numeros generales pro quantitatibus quaesitis, ego in talibus problematibus transcendentibus assumsi aequationes generales seu indefinitas pro lineis quaesitis, v. g. abscissa et ordinata existentibus x et y, aequatio pro linea quaesita mihi est $0 = a + bx + cy + exy + fxx + gyy$ etc.; ope hujus aequationis indefinite propositae, revera finitae (semper enim determinari potest, quousque assurgi opus sit) quaero lineae tangentem, et quod invenio, id cum proprietate tangentium data conferens, reperio valorem literarum assumtitiarum a, b, c etc. atque adeo aequationem lineae quaesitae definio, ubi tamen interdum quaedam manent arbitrariae; quo casu etiam innumerae lineae reperiri poss unt, quaesito satisfacientes, quod in causa fuit, ut multi problema non satis definitum a posteriori videntes putarent, nec in potestate esse. Eadem per series quoque praestantur. Ad calculum autem contrahendum multa habeo, de quibus alias. Quodsi comparatio non procedat, pronuntio lineam quaesitam non esse Algebraicam, sed transcendentem.

Quo posito ut ipsam *Transcendentiae speciem* reperiam (aliae enim transcendentes pendent a sectione generali rationis seu a Logarithmis, aliae a sectione generali anguli seu ab arcubus circuli, aliae ab aliis indefinitis quaestionibus magis compositis), ideo praeter literas x et y assumo adhuc tertiam ut v, quae transcendentem quantitatem significat, et ex his tribus formo aequationem generalem ad lineam quaesitam, ex qua lineae tangentem quaero secundum meam methodum tangentium in Actis Octobr. 1684 publicatam, quae nec transcendentes moratur. Deinde id quod invenio comparans cum data proprietate tangentium curvae, reperio non tantum literas assumtitias a, b, c etc., sed et specialem transcendentis naturam. Quamquam autem aliquando fieri possit, ut plures adhibendae sint transcendentes, naturae quandoque inter se diversae, et dentur transcendentes transcendentium, et omnino talia procedant in infinitum, tamen facilioribus et utilioribus contenti esse possumus; et plerumque peculiaribus artificiis uti licet ad calculum contrahendum, problemaque, quoad licet, ad terminos simplices revocandum, quae non sunt hujus loci. Hac autem methodo ad Tetragonismos applicata seu ad inventionem linearum quadratricium (in quibus utique semper tangentium proprietas data est) patet non tantum, quomodo inveniatur, an quadratura indefinita sit Algebraice impossibilis, sed et quomodo impossibilitate hac deprehensa reperiri possit quadratrix transcendens, quod hactenus traditum non fuit, adeo ut videar non vane asseruisse, Geometriam hac methodo ultra terminos a *Vieta* et *Cartesio* positos in immensum promoveri, cum hac ratione Analysis certa et generalis ad ea porrigatur problemata, quae nullius sunt certi gradus, atque adeo Algebraicis aequationibus non comprehenduntur.

Porro quoniam ad problemata transcendentia, ubicunque dimensiones tangentesque occurrunt, calculo tractanda, vix quicquam utilius, brevius, universalius fingi potest *Calculo meo differentiali seu Analysi indivisibilium atque infinitorum*, cujus exiguum tantum velut specimen sive Corollarium continetur in methodo illa mea Tangentium in Actis Octobr. 1684 edita, et *Dn. Craigio* tantopere

probata, et ipse *Dn. Craigius* suspicatus est aliquid altius in ea latere, ac proinde pag. 29 sui libelli inde derivare conatus est theorema Barrovianum (quod summa intervallorum inter ordinatas et curvae perpendiculares in axe sumtorum et ad axem applicatorum aequetur semiquadrato ordinatae ultimae), in cujus executione tamen nonnihil a scopo deflexit, quod in nova methodo non miror: ideo gratissimum ipsi aliisque fore arbitror, *si hoc loco additum rei, cujus tam late patet utilitas, patefecero.* Nam inde omnia hujusmodi theoremata ac problemata, quae admirationi merito fuere, ea facilitate fluunt, ut jam non magis ea disci tenerique necesse sit, quam plurima vulgaris Geometriae theoremata illi ediscenda sunt, qui Speciosam tenet. Sic ergo in casu praedicto procedo. Sit ordinata x, abscissa y, intervallum inter perpendicularem et ordinatam, quod dixi, sit p, patet statim methodo mea fore $pdy = xdx$, quod et *Dn. Craigius* ex ea observavit; qua aequatione differentiali versa in summatricem, fit $\int pdy = \int xdx$. Sed ex iis, quae in methodo tangentium exposui, patet esse $d, \frac{1}{2}xx = xdx$; ergo contra $\frac{1}{2}xx = \int xdx$ (ut enim potestates et radices in vulgaribus calculis, sic nobis summae et differentiae seu $\int$ et d reciprocae sunt). Habemus ergo $\int pdy = \frac{1}{2}xx$, quod erat demonstrandum. Malo autem dx et similia adhibere, quam literas pro illis, quia istud dx est modificatio quaedam ipsius x, et ita ope ejus fit, ut sola quando id fieri opus est litera x cum suis scilicet potestatibus et differentialibus calculum ingrediatur, et relationes transcendentes inter x et aliud exprimantur. Qua ratione etiam lineas transcendentes aequatione explicare licet, verbi gr. sit arcus a, sinus versus x, fiet $a = \int dx : \sqrt{2x - xx}$, et si cycloidis ordinata sit y, fiet $y = \sqrt{2x - xx} + \int dx : \sqrt{2x - xx}$, quae aequatio perfecte exprimit relationem inter ordinatam y et abscissam x, et ex ea omnes cycloidis proprietates demonstrari possunt; promotusque est hoc modo calculus analyticus ad eas lineas, quae non aliam magis ob causam hactenus exclusae sunt, quam quod ejus incapaces crederentur; interpolationes quoque Wallisianae, et alia innumera hinc derivantur.

Quod superest, ne nimium mihi adscribere aut detrahere aliis videar, paucis dicam quid potissimum insignibus nostri saeculi Mathematicis in hoc Geometriae genere mea sententia debeatur. Primi *Galilaeus* et *Cavallerius* involutissimas *Cononis* et *Archimedis* artes detegere coeperunt. Sed Geometria indivisibilium Cavalleriana, scientiae renascentis non nisi infantia fuit. Majora subsidia attulerunt triumviri celebres, *Fermatius* inventa methodo de maximis et minimis, *Cartesius* ostensa ratione lineas Geometriae communis (transcendentes enim exclusit) exprimendi per aequationes, et P. *Gregorius a S. Vincentio* multis praeclaris inventis. Quibus egregiam *Guldini* regulam de motu centri gravitatis addo. Sed et hi intra certos limites consistere, quos transgressi sunt, novo aditu aperto, *Hugenius* et *Wallisius*, Geometrae inclyti. Satis enim probabile est, Hugeniana *Heuratio*, Wallisiana *Neilio* et *Wrennio*, qui primi curvis aequales rectas demonstravere, pulcherrimorum inventorum occasionem dedisse, quod tamen meritissimae laudi inventionum nil detrahit. Secuti hos sunt *Jacobus Gregorius* Scotus et *Isaacus Barrovius* Anglus, qui praeclaris in hoc genere theorematibus scientiam mire locupletarunt. Interea *Nicolaus Mercator* Holsatus, Mathematicus et ipse praestantissimus, primus, quod sciam, quadraturam aliquam dedit per seriem infinitam. At idem inventum non suo tantum Marte assecutus est, sed et universali quadam ratione absolvit profundissimi ingenii Geometra, *Isaacus Newtonus*, qui si sua cogitata ederet, quae illum adhuc premere intelligo haud dubie nobis novos aditus ad magna scientiae incrementa compendiaque aperiret.

Mihi contigit adhuc tironi in his studiis, ut ex uno aspectu cujusdam demonstrationis de magnitudine superficiei sphaericae subito magna lux oboriretur. Videbam enim generaliter figuram factam ex perpendicularibus ad curvam, axi ordinatim applicatis (in circulo radiis) esse proportionalem superficiei ipsius solidi, rotatione figurae circa axem geniti. Quo primo theoremate (cum aliis tale quid innotuisse ignorarem) mirifice delectatus, statim comminiscebar triangulum, quod in omni curva vocabam characteristicum, cujus latera essent indivisibilia (vel accuratius loquendo infinite parva) seu quantitates differentiales; unde statim innumera theoremata nullo negotio condebam, quorum partem postea apud *Gregorios* et *Barrovium* deprehendi. Nec dum vero Algebraico calculo utebar, quem cum adjecissem, mox quadraturam meam Arithmeticam aliaque multa inveni. Sed nescio quomodo non satisfaciebat mihi calculus Algebraicus in hoc negotio, multaque quae analysi voluissem, praestare adhuc cogebar figurarum ambagibus, donec tandem verum Algebrae supplementum pro transcendentibus inveni, scilicet meum calculum indefinite parvorum, quem et differentialem, aut summatorium, aut tetragonisticum, et ni fallor, satis apte *Analysin indivisibilium et infinitorum* voco, quo semel detecto, jam ludus jocusque visum est quicquid in hoc genere ipse antea fueram admiratus. Unde non tantum insignia compendia, sed et methodum generalissimam paulo ante expositam condere licuit, qua sive quadratrices sive aliae quaesitae lineae Algebraicae vel transcendentes, prout possibile est, determinantur. Antequam finiam, illud adhuc admoneo, ne quis in aequationibus differentialibus, qualis paulo ante erat $a = \int dx : \sqrt{1 - xx}$, ipsam dx temere negligat, quia in casu illo, quo ipsae x uniformiter crescentes assumuntur, negligi potest: nam in hoc ipso peccarunt plerique et sibi viam ad ulteriora praeclusere, quod indivisibilibus istiusmodi, velut dx, universalitatem suam (ut scilicet progressio ipsarum x assumi posset qualiscunque) non reliquerunt, cum tamen ex hoc uno innumerabiles figurarum transfigurationes et aequipotentiae oriantur.

Scriptiuncula hac jam absoluta, venere in manus meas, quae Dn. D. T. in Martio hujus anni Actorum pag. 176 communicavit, ubi nonnullas quaestiones elegantes proposuit et solvi dignas*). Video autem lineam ACI (fig. 114) esse quandam ex lineis sinuum, semperque rectangulum AH in GD esse aequale spatio ABCA. Et in fig. 115, si quadratum BC in BD seu x semper aequale debeat esse dato cubo ab a, satisfacere paraboloeidem, cujus aequatio est $4a^3yy = 25x^5$. Similiter rem determinare licet pro aliis potentiis. Sin AD, DB, BC = cubo dato, res redit ad quadratricem figurae, cujus ordinatae valor est ax^3 divis. per $\sqrt{a^6 - x^6}$; in genere autem data relatione quacunque inter rectas AB, BC, CD, AD, DB in dicta fig. 115 invenire lineam, problema est, quod coincidit cum inventione quadraturarum. Sed si in recta AC assumatur punctum fixum L, novae oriuntur alterius naturae relationes, ut si data sit relatio inter LC et CD, quod problema tamen itidem solutionem recipit.

*) Zum bessern Verständniss des Folgenden sollen hier die betreffenden Stellen aus dem Schreiben Tschirnhausens angeführt werden: Sit (fig. 114) curva ACI, et FGH quadrans circuli; fiat jam ut FGH ad arcum GH, sic AH ad HB; porro demissa perpendiculari GD fiat continue quadrans ED aequalis rectae BC, patebitque curvam ACI esse mechanicam. — Curvam determinare, ubi (fig. 115) quadratum BC in lineam BD semper aequale sit cubo datae lineae. — Curvam invenire, ut productum ex tribus lineis AD, DB, BC (fig. 115) semper aequale sit cubo.

III.

DE LINEA ISOCHRONA, IN QUA GRAVE SINE ACCELERATIONE DESCENDIT, ET DE CONTROVERSIA CUM DN. ABBATE DE CONTI. *)

Cum a me in his Actis Martio 1686 editis publicata esset demonstratio contra *Cartesianos,* qua vera virium aestimatio traditur, ostenditurque non quantitatem motus, sed potentiae, a quantitate motus differentem servari, Vir quidam doctus in Gallia, Dn. Abbas *De Conti,* pro Cartesianis respondit, sed, ut post apparuit, vi mei argumenti non satis perspecta. Credidit enim, recepta quaedam alia principia a me impugnari, quae in Novellis Reip. Litterar. mens. Jun. 1687 p. 579 enumerat, et negat p. 519 seq. se agnoscere contradictionem, quam ego in illis invenire mihi videar: cum tamen nunquam mihi de illis dubitare in mentem venerit, quemadmodum ipsum admonui Novell. Reip. Lit. Septemb. 1687. Idem ut eluderet objectionem meam, conjecerat se in diverticulum temporis, quod eo modo, quo conceptus a me erat status controversiae, plane est accidentale. Eadem enim manente altitudine, eadem vis acquiritur aut impenditur a gravibus quocunque tempore indulto, quod pro inclinatione descensus majore minoreve augetur aut minuitur. Ea occasione, quo magis appareret, tempus atque adeo distinctionem inter potentias isochronas vel anisochronas hoc loco nihil ad rem facere, et ut ex disputatione nostra aliquid incrementi scientia caperet, *problema* tale, a me inter scribendum solutum, et, ut videtur, non inelegans, ipsi proposui in dictis Novellis Septembr. 1687: „Invenire lineam isochronam, in qua grave „descendat uniformiter, sive aequalibus temporibus aequaliter accedat ad horizontem, atque adeo sine acceleratione et aequali semper velocitate deorsum feratur.“ Sed Dn. Abbas *De Conti* nihil ultra reposuit, sive quod problema attingere nollet, sive quod agnita tandem mente mea, satisfactum sibi judicaret. Sed ejus loco problema hoc sua opera dignum judicavit Vir celeberrimus *Christianus Hugenius*, cujus solutio mea prorsus consona extat in Novellis Reip. Lit. Octbr. 1687, sed suppressa demonstratione et explicatione

*) Act. Erudit. Lips. an. 1689.

discriminis inter diversas lineas ejusdem, ut ait, generis, quas satisfacere notat. *) Haec igitur ego supplere hoc loco volui, facturus citius, nisi aliquid hic a Dn. Abbatis industria exspectavissem.

Problema. Invenire lineam planam, in qua grave sine acceleratione descendit.

Solutio. Sit (fig. 116) linea paraboloeides quadrato-cubica quaecunque βNe (nempe ubi solidum sub quadrato basis NM et parametro aP aequale est cubo altitudinis βM) ita sita, ut verticis β tangens βM sit perpendicularis horizonti, in cujus lineae puncto quocunque N si ponatur grave ea descendendi ulterius celeritate praeditum, quam potuit acquirere descendendo ex horizonte Aa, cujus elevatio $a\beta$ supra verticem β sit $\frac{4}{9}$ parametri curvae, tunc idem grave descendet porro uniformiter per lineam Ne, utcunque continuatam, ut desiderabatur.

Demonstratio. Recta NT curvam βNe tangat in N et ipsi βM occurrat in T. Utique (ex nota proprietate tangentium hujus curvae) erit TM ad NM in subduplicata ratione $a\beta$ ad βM. Ergo TM ad TN erit in subduplicata ratione $a\beta$ ad $a\beta + \beta M$ seu ad aM. Jam ratio TM ad TN eadem est, quae velocitatis per curvam descendendi (seu horizonti porro in curva appropinquandi), quam grave habet positum in N ad velocitatem, qua idem ex N porro, non per curvam, sed libere descenderet, si posset (ut constat ex natura motus inclinati). Sed velocitas haec libera porro est ad constantem quandam in subduplicata ratione aM ad $a\beta$; sunt enim (ut ex motu gravium constat) velocitates liberae in altitudinum

*) In der Beilage zu dieser Nummer folgt Hugens' Lösung des in Rede stehenden Problems, auf die hier Leibniz Bezug nimmt. Derselbe hatte bereits seine grosse Reise nach Italien angetreten (Herbst 1687), als die Nummer der Novelles de la Republique des lettres, welche die Lösung von Hugens enthält, zu seiner Kenntniss gelangte. Voll Freude, dass sein hochverehrter Lehrer und Freund das Problem der Beachtung für werth gehalten, entwarf Leibniz zu Pilsen in Böhmen Zusätze, die er nach dem Vermerk auf dem Manuscripte dem Herausgeber der Nouvelles de la Repub. des lettres übersandte. Es lässt sich nicht ermitteln, ob die Absendung wirklich erfolgte; ich habe in dem auf der Königlichen Bibliothek zu Hannover befindlichen Exemplar des genannten Journals diese Zusätze Leibnizens vergeblich gesucht.

(unde descendendo quaesitae sunt) aM subduplicata ratione: ergo velocitas descendendi per curvam Ne, quam grave habet in quocunque curvae puncto N positum, est ad velocitatem constantem in composita subduplicata ratione $a\beta$ ad aM et aM ad $a\beta$, quae est ratio aequalitatis. Ipsamet igitur velocitas illa per curvam descendendi est constans, seu ubique in curva Ne eadem. Quod praestandum erat.

Consectaria: 1) Grave celeritatem habens tamquam lapsum ab altitudine aliqua Aa, descendere potest ex eodem puncto N per curvas isochronas infinitas, sed ejusdem speciei, seu sola magnitudine parametri differentes, ut Ne, N(e), NE, quae omnes sunt paraboloeides quadrato-cubicae, adeoque similes inter se. Imo quaelibet hujusmodi paraboloeidum hic inservit, modo ita collocetur, ut $a\beta$ vel (a)(β) distantia verticis ab horizontali a(a), unde descendere incepit grave, sit $\frac{4}{9}$ parametri curvae βe vel (β)(e): nec refert, an grave isochrone descensurum in curva N(e) pervenerit ad N ex a(a) per viam (a)(β)N, an per aliquam aliam, aut sine descensu ullo ob aliam causam eandem celeritatem atque directionem acquisiverit. Ex infinitis tamen istis lineis isochronis, in quibus grave ex N porro sine acceleratione descendere potest, ea celerrimum ipsi descensum praebet, cujus vertex est ipsum punctum N, qualis est NE, quam recta AN horizonti perpendicularis tangit.

2) Tempus descensus per rectam $a\beta$ est ad tempus descensus per curvam βN, ut dimidia altitudo βM ad ipsam $a\beta$: ac proinde si βM sit dupla $a\beta$, aequalia erunt tempora descensuum per $a\beta$ et per βN. Quorum ratio manifesta est: nam tempora descensus uniformis sunt inter se ut altitudines, et ex demonstratis a *Galilaeo*, tempus quo mobile percurrit altitudinem $a\beta$ motu accelerato, est duplum ejus, quo perrurrit aequalem altitudinem βM (ut hoc loco fit, licet per curavm βN) motu uniformi, qui celeritatem habet aequalem ultimae per accelerationem acquisitae in β.

Hoc autem problema fateor me non Geometris primariis proposuisse, qui interiorem quandam Analysin callent, sed his potius, qui cum *erudito illo Gallo* sentiunt, quem mea de *Cartesianis* plerisque hodiernis (Magistri paraphrastis potius, quam aemulatoribus) querela suboffendisse videbatur. Tales enim cum alias receptis inter Cartesianos dogmatibus, tum etiam analysi inter ipsos pervulgatae nimium tribuunt, adeo ut se ipsius ope quidvis in Mathesi

(si modo velint scilicet calculandi laborem sumere) praestare posse arbitrentur, non sine detrimento scientiarum, quae falsa jam inventorum fiducia negligentius excoluntur. His materiam exercendae suae Analyseos praebere volueram in hoc problemate, quod non prolixo calculo, sed arte indiget.

Si quis tamen praereptam sibi jam solutionem queratur, poterit *aliam isochronam* huic vicinam quaerere, in qua non, ut hactenus, grave uniformiter recedat ab horizontali (vel ad eam accedat), sed a certo puncto. Unde problema erit tale, *invenire lineam, in qua descendens grave recedat uniformiter a puncto dato, vel ad ipsam accedat.*

Talis foret linea NQR, si ejus esset naturae, ut ex puncto dato seu fixo A, ductis rectis quibuscunque ad curvam ut AN, AQ, AR, esset excessus AR super AQ, ad excessum AQ super AN, ut tempus quo descenditur per arcum QR, ad tempus quo descenditur per arcum NQ.

Beilage.

Solution du Probleme proposé par M. L. dans les Nouvelles de la Republique des Lettres du mois de Septembre 1687.*)

Trouver une ligne de descente dans laquelle le corps pesant descende uniformement et approche egalement de l'horizon en temps egaux.

Solution.

Si l'on vouloit, que le corps pesant commençast à descendre dans cette ligne depuis le repos, elle seroit impossible.

Mais si le corps est supposé avoir quelque moment, quelque petit qu'il soit, comme par ex. celui qu'il aquiert en tombant de la hauteur perpendiculaire AB (fig. 117), alors la ligne courbe BC qui est telle que le cube de CD perpendiculaire sur AB prolongée,

*) Article VI des Nouvelles de la Republique des Lettres du mois d'Octobre 1687.