ponamus in eodem plano moveri rectam mobilem, quae durante motu eundem semper situm servet ad rectam quiescentem, eundem nempe angulum, linea utique, quam describet, etiam ubique se eodem modo ad rectam habebit. Et commodissimum erit assumi angulum rectum.

(7) Sed ostendendum foret, lineam quae describitur etiam esse rectam. Colligemus autem ex eo, quia ad eam, quae ubique uniformis est, se habet ubique eodem modo et ipsam esse ubique uniformem.

(8) Concipi etiam possunt parallelae sine ulla mentione recti, etsi ex eo conceptu sequatur esse rectas. Ponatur duo puncta A et B moveri motu aequiveloce, ita ut vestigia eorum a se invicem discerni non possint, et eandem etiam semper habeant relationem inter se, et has lineas vocari parallelas. Talis definitio non nisi parallelis rectis quadrat. Nam etsi puncta, circulos concentricos describentia eadem celeritate aequali, etiam eundem semper situm servent, una circumferentia ab alia discerni potest.

(9) Possunt etiam parallelae definiri rectae aequidistantes, seu tales ut minima, ab una ad aliam ducta, sit ubique aequalis. Sed de minimis a recta ad rectam nondum actum est.

(10) An ergo parallelas definiemus commodius duas rectas ejusdem plani, quae ad eandem rectam faciunt angulum eundem, quod si eas ponamus hoc modo se habere ad quamcunque rectam. Hinc statim sequitur eas non posse concurrere. Concurrant enim AC et BC (fig. 94) in puncto, dico non esse parallelas, quia recta DC, quae iis occurrit in C, non potest angulum aequalem facere ad ambas. Nam si aequales essent anguli DCA et DCB, aequaretur pars toti.

(11) Sed ostendere oportet, si una recta ad duas aequales angulos facit, quamvis ad eam angulos facere. Multa tentavi, et video ne hoc quidem facile demonstrari posse, si ex recta AB (fig. 95) educantur perpendiculares aequales AC et BD, esse CD rectam aequalem ipsi AB, et angulos ad C et D esse rectos. Quemadmodum ponendo rectam ex C versus D angulo recto educi, non facile demonstrari potest incidere in D et angulo itidem recto. Euclides cum difficultatem in proprietatibus parallelarum demonstrandis reperiret, axioma assumsit 13, quod rectae ex recta eductae, angulis inaequalibus (eo enim res redit) concurrant adeoque non sint parallelae, nam has definivit, quae in plano non concurrunt. Si maluisset definire parallelas, quae aequales angulos faciunt ad rectam,

assumendum fuisset ei axioma, quod tales non concurrant. Itaque res eo redit, ut connexio inter haec duo demonstretur, aequalem angulum facere ad rectam, et non concurrere. Demonstravi paulo ante, si ponatur angulum aequalem fieri ad quamcunque rectam. Ergo hoc ostendendum erat.

(12) Rem omnem consequi posse mihi videor ex altiore principio, nempe rationis determinantis. Ex A, B (fig. 96) angulo recto eductae AC, BD sunt determinatae. Assumantur AC, BD inaequales. Utique ob determinata puncta C et D, determinata est recta DC, eritque angulus ad C aequalis angulo ad D, cum eodem modo determinentur. Quin eodem argumento sequitur, angulum ad D vel ad B esse rectum, quia ex determinatione nulla haberi potest ratio, cur CD se aliter habeat ad partes E quam ad partes D, vel cur AB se aliter habeat ad partes D quam ad partes F, nec ullum est principium determinandi anguli obliquitatem. Itaque anguli ABD et ABF sunt aequales, atque adeo AB est perpendicularis.

(13) Ex his patet, congrua esse (fig. 97) LACN, MBDO et NAL, OBM, angulis A, B, C, D rectis, sive inverti posse posito LA = CN, et BM = DO, ergo congruent etiam rectae LM et NO. Sed LM recta ipsis AL, BM est in directum, ergo NO, aequalis ipsi LM, etiam est ipsis CN, DO, seu CNOD est recta.

(14) Eodem modo ponendo AB (fig. 98) procedere super AC angulo recto servato in CD, nulla ratio esse potest cur angulus DBA et BDC non sint aequales, seu cur plus aut tanto plus inclinetur in alteram partem. Unde patet etiam, si CD = AB et angulus ad A et C rectus, fore et ad B et D rectum. Unde simul probatur, et BD rectam esse, ea enim sola utrinque se habet eodem modo.

(15) Caeterum ex hoc solo, quod demonstravimus § 12 eductis angulo recto ad AB (fig. 99) rectis AC, BD aequalibus, angulos ad C et D rectos esse, sequitur rectas AC et BD non posse concurrere, quia Euclides ostendit propositione 28 primi, si anguli CAB et ABD sint aequales, rectas non posse concurrere. Idem ostendit prop. 27 ejusdem, si recta incidat eodem modo in duas parallelas seu angulos EAC, EBD (fig. 100) faciat aequales, rectas AC, BD concurrere non posse, seu ipsius definitione esse parallelas. Et haec pendent ex 16. primi Euclidis, quod in triangulo angulus externus sit interno opposito major, α ipsi β vel γ (fig. 101). Nos potuissemus aliter ita demonstrare: concipiendo LM (fig. 102)

rectam moveri ad AC angulo eodem quocunque, et extremitate L ferri per AC, extremitate M per BD, tunc si ponamus, AC existente recta, etiam BD esse rectam, sequitur eas non concurrere, nam si concurrerent, velut in H, recta LM eo veniens suo situ $\lambda\mu$, faceret angulos λHA, λHB aequales, partem toti. Porro si una sit recta, etiam alteram esse rectam, ex eo sequitur, quod recta LM durante motu ad ambas, quas describit, se habet eodem modo. Itaque supererat solum demonstranda inversa, seu quod rectae non concurrentes inter se ab eadem recta ad eosdem angulos secentur, quae 29. primi; et reapse redit ad axioma 13. Ad hoc demonstrandum Proclus assumsit, duas rectas, quae a communi producuntur, ad distantiam a se invicem venire quantamcunque; Clavius autem rem aliter demonstrare conatur, assumens rectam, quae super alia recta, manente angulo, fertur, describere rectam; id autem nos ex eo demonstramus in hac ipsa paragrapho, quod recta mobilis ad ambas, quas extremis percurrit, se habet eodem modo; ergo si una est recta, etiam altera talis erit.

(16) Ut concludatur, possis parallelas definire vel cum Euclide rectas, quae in eodem plano non concurrunt, vel rectas, quae ad eandem rectam sunt perpendiculares. Ostendi enim potest, tum has non concurrere, tum non concurrentes esse ad eandem rectam perpendiculares. Ostendi etiam potest, rectas binas, quae ad unam aliquam rectam angulos aequales faciunt, ad quamlibet aliam cui occurrunt angulos aequales facere, quod parallelae sunt quae non concurrunt; etsi minus sit causalis, habet tamen hoc quod nihil eligit. At quae definit parallelas per eas, quae ad eandem rectam sunt normales, eligit angulum rectum; quae vero vult generatum ut ad eandem rectam faciat eundem angulum, paradoxa est, seu essentiae dubitabilis, quaeritur enim an aliam quemvis alio angulo quo......*) Si parallelas quis definiat lineas, quae nec inter se discerni possunt nec in variis locis respondentibus invicem possint discerni, demonstrare debebit, tales esse rectas.

XXXV. *Parallelogrammum* est, cujus bina opposita latera sunt parallela seu aeque distantia.

(1) Hic aequidistantia et parallela seu non concurrentia pro iisdem habentur, credo per anticipationem, quia suo loco demonstrabitur, hoc idem esse.

---

*) Hier fehlen einige Worte.

(2) Bina opposita, intellige bina quaevis opposita.

(3) Parallelogrammum etiam definiri posset, cujus bina aliqua latera opposita sunt simul aequalia et parallela. Hinc enim sequitur, etiam bina opposita reliqua esse et aequalia et parallela.

XXXVI. In hac definitione nihil est difficultatis.

Ad Libri primi Euclidis Postulata.

Postulat. I. Postuletur ut a quocunque puncto ad quodcunque punctum rectam lineam ducere concedatur.

(1) Haec recta habebitur, si magnitudo aliqua, in qua existent haec duo puncta, ipsis immotis moveri intelligatur, omnia enim puncta magnitudinis durante hoc motu quiescentia cadent in rectam. Item . . .

(2) Potest spatium secari plano per dua data puncta transeunte, cum et per tria data transire possit. Et planum rursus secari potest linea per duo puncta transeunte, utrinque se habente eodem modo.

(3) Possunt et datis duobus punctis inveniri quotcunque puncta, quae in rectam inter ipsa cadant, si punctis tanquam radiis, quorum summa componat distantiam punctorum, in plano, in quo sunt duo puncta, duo describantur circuli, qui se tangent in puncto rectae. Et quot bini tales circuli assumentur, tot etiam puncta rectae habebuntur. Hinc ut obiter dicam, si diversa plana assumantur, in quae cadant eadem puncta, recta tamen prodibit eadem, plana autem sese in ea secabunt. Quodsi plano non utimur, possumus adhibere sphaeras radiis iisdem descriptas, quae se in puncto rectae tangent; circuli autem supra dicti, qui idem punctum deferunt, etsi in diversis planis descripti, omnes in eandem sphaeram cadent. Quodsi rectae utcunque productae, per duo puncta transeuntis, puncta quaevis definire velimus, sufficit duas circumferentias vel duas superficies sphaericas circa duo data puncta descriptas se tangere, et tunc cum distantia punctorum est summa radiorum, punctum cadit intra puncta data; sin vero distantia punctorum sit differentia radiorum, cadet extra, in rectam productam.

Postulat. II. Rectam datam in continuum recta producere.

(1) Hoc ex definitione illa statim sequitur, quae facit rectam esse lineam, cujus pars similis toti. Nam quia pars producta totum fecit, etiam totum poterit produci, ut sit pars majoris totius.

(2) Idem dant constructiones postulat. praecedentis, quo exhibentur puncta non solum intra, sed et extra rectam duobus punctis interceptam.

Postulat. III. Quovis centro et intervallo circulum describere.

(1) Id in plano efficit motus radii uno puncto immoto. Posse autem moveri rectam uno puncto immoto ex eo colligitur, quod spatium planumve uniforme est, et quod versus unam est plagam, potest etiam versus aliam sumi quamcunque.

(2) Sed et extra planum res efficitur, si duobus punctis immotis magnitudo moveatur, adeoque in ea punctum moveatur, cujus distantia ab axe quantacunque esse potest, quia augeri potest utcunque. Hujus autem puncti distantia ab axe radium dabit.

Postulat. IV. Quavis magnitudine data sumi posse majorem vel minorem.

(1) Quod major semper sumi possit, nemo facile dubitavit, sed quod semper minor, nonnullis non adeo manifestum videbitur; colligitur autem ex natura continui, de tali enim magnitudine vel huic proportionali (ut angulo) sermo est. Res autem ita clarior reddi potest: Cum in recta pars sit similis toti, manifestum est, in ea partis rursus esse partem, adeoque recta quavis minorem rectam posse sumi, cum pars utique minor sit eaque rursus sit recta. Porro data quacunque Magnitudine, quae non sit recta, ducatur recta duo ejus puncta jungens; assumatur alia recta priore minor, poterit magnitudo fieri priori similis, ita ut recta minor sit majori homologa, seu eodem modo se habeat in magnitudine nova, ut major se habuit in vetere, quod obtineri potest, si rectis quotcunque in vetere ductis novae similiter positae ducantur, quae sint ad rectam minorem, ut priores ad majorem. Ita etiam magnitudo priori similis erit, et tamen minor.

Ad Libri primi Euclidis Axiomata.

Axiom. I. Quae eidem aequalia, et inter se sunt aequalia. Et quod uno aequalium majus est aut minus, majus quoque est et minus altero aequalium.

Ax. II. Et si aequalibus aequalia adjecta sint, tota sunt aequalia.

Ax. III. IV. V. VI. VII. exscribantur.

(1) Haec omnia demonstrari possunt et definitione aequalium, si scilicet *aequalia* sint, quorum unum alteri salva quantitate substitui potest. Sint aequalia a et b, et sit c aequale ipsi a, dico c etiam fore aequale ipsi b. Sint enim $a = c$, quia $a = b$, hinc b substitui potest ipsi a salva quantitate, et fiet $b = c$, quod erat demon.

(2) ad Axiom. 2. Sit $a = b$ et $b = m$, erit $a + b = b + m$. Nam $a + b = a + b$; pro a et b in alterutro latere substituitur l et m, fiet $a + b = l + m$.

(3) Similiter ax. 3. ex $a - b = a - b$ fiet $a - b = l - m$. Eadem methodo facile erit probare Axiomata 4, 5, 6, 7.

Ax. VIII. Quae congrua sunt, aequalia sunt.

(1) Cum enim unum ab altero discerni non possit, si sibi applicentur, etiam *quantitate* discerni non poterunt; quantitas enim manet, sive sibi applicentur, sive non; quin etiam forma seu *qualitate* discerni non poterunt congrua, atque adeo etiam similia sunt. Sola autem possunt discerni *positione*, alioqui plane coinciderent.

Ax. IX. Totum sua parte majus est.

(1) Hoc quoque axioma demonstravi dudum ex definitione majoris et minoris. Nempe *Minus* est, quod alterius (nempe *Majoris*) parti aequale est. Sed pars est aequalis parti totius, nempe sibi, ergo pars est minor, totum vero est majus.

Ax. X. Duae rectae non possunt habere segmentum commune seu partem communem.

(1) Hoc pronuntiatum Proclus pulchre demonstrat hoc modo: Habeant, si fieri potest, duae rectae AB, AC (fig. 103) partem communem AD. Centro A, intervallo DA describatur circulus secans duas rectas propositas in punctis B et C; quia ergo tam AB, quam AC est diameter transiens per centrum D, erit tam arcus AB semicircumferentia, quam arcus ABC, sed semicircumferentiae aequantur. Ergo aequantur pars AB et totum ABC, quod est absurdum.

(2) Ex hac demonstratione patet, quam necessarium fuerit, ut demonstraretur, quod Euclides definitione 17. subreptione quadam assumserat, rectam per centrum bifariam secare circulum.

Ax. XI. Duae rectae in uno puncto concurrentes, si producantur ambae, necessario se mutuo in eo puncto secabunt.

(1) Hoc etiam non dissimili modo demonstratur. Concurrant AB, CB (fig. 104) in B, producatur AB in D, dico CB productam cadere in E, et esse E ad partes alias ipsius AD, quam ad quas fuit C. Nam aliter CB producta vel cadet in ipsam, sed ita duae

rectae AB, CB haberent segmentum commune BD, vel producta CB caderet in F ad easdem partes, ad quas est C. Centro B radio quovis describatur circulus occurrens ipsis BD et BF in D et F. Quia ergo utraque recta AD et CBF transit per centrum B, erit tam arcus ACFD, quam arcus CF semicircumferentia. Ergo aequales sunt totum et pars, quod est absurdum. Ergo CB producta occurrit circulo ad alteras partes ipsius AD, secat in E, quod erat dem.

Ax. XII. Anguli recti sunt aequales inter se.

(1) Hoc quoque Axioma Proclus egregie demonstrat hoc modo: Sint duo anguli recti ABC, DEF (fig. 105), dico esse aequales. Sint enim inaequales, et sit ABC major. Applicetur E ipsi B, et DE ipsi AB. Si jam angulus DEF vel ABG ei aequalis est minor, quam ABC ex hyp., cadet BG inter AB et BC. Producatur CB in H, et GB producta cadet (per ax. praecedens) ad alteras partes ipsius CH in I; angulus ABH, cum sit aequalis ipsi ABC, erit major ipso ABG; ergo et major ipso IBA, qui ipsi ABG est aequalis. Ergo angulus ABH pars erit major angulo IBA toto, quod est absurdum.

Ax. XIII. Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duae illae rectae lineae in infinitum productae sibi mutuo incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores.

(1) Nempe si anguli BEF et DFE (fig. 106) simul sumti sint duobus rectis minores, concurrent rectae AEB, CFD versus B sive D. Hoc pronunciatum potuisset enuntiari clarius hoc modo: Si duae rectae ad eandem non faciant angulos aequales, concurrent. Nam quod concurrant ab ea parte, ubi summa eorum angulorum internorum seu se respicientium est minor, seu ubi ad se inclinantur, facilius demonstrari poterat, nec credo axioma addi opus habebat. Producatur EF ad G et FE ad H; si jam anguli BEF, DFG sunt inaequales, erunt BEF+DFE minores duobus rectis. Si BEF—DFG=0, hinc cum sit DFG=2 rect. —DFE, fiet BEF—2 rect. +DFE=0; ergo cum recta EF aequales facit angulos ad easdem partes ad AB et CD, erunt BEF+DFE interni aequales duobus rectis; sin non facit aequales, etiam haec summa duobus rectis inaequalis erit, ab una parte minor, ab altera major. Ergo si verum est in casu summae duobus rectis inaequalis concursum etiam in casu rectae ad duos rectos angulos inaequales facientes, earum duarum rectarum concursus erit.

(2) Hujus axiomatis demonstrationem dedit Proclus, credo et ante ipsum Geminus; aliam Clavius tentavit. Sed de his agemus, et breviora etiam tentabimus suo loco.

Ax. XIV. Duae rectae lineae spatium non comprehendunt.

(1) Hoc axioma Proclus etiam demonstrat hoc modo: Duae rectae ABC, ADC (fig. 107) claudant spatium, seu coëant in duobus punctis A et C; centro C, radio CA describatur circulus, et producantur rectae ABC, ACD, donec circulo occurrant, illa in E, haec in F. Et quia rectae ACE, ACF transeunt per centrum, erunt semicircumferentiae AE, AEF aequales, pars toti, quod est absurdum. Huic demonstrationi objicit Clavius, ab adversario responderi posse, fortasse rectas ABC, ADC rursus concurrere in ipsa circumferentia seu puncta F et E coincidere, atque ideo aliam comminiscitur demonstrationem, in qua supponit, quod demonstrare voluit ad defin. 18, rectam, quae non transit per centrum, secare circulum in partes inaequales, centrum autem esse in majore. Sed illa demonstratio habet aliquid difficultatis et circulum committere videtur.

(2) Ego aliam excogitavi ex alio principio ductam, nempe ex nostra rectae definitione, quod secet planum bifariam, seu in segmenta, ita ut se habeat utrinque eodem modo. Sint ergo AB vel ACB (fig. 108) et recta ADB bis concurrentes. Quia ergo posterior planum ita secat, ut utrinque se habeat eodem modo, necesse est ut detur alia recta AKB ad partes K, quae ita se habeat ad ADB, ut ACB ad partes C se habet ad ADB, ita nempe, ut congrua sint ADBCA et ADBKA. Similiter AKB ut ab una parte habet ADB, ita ab altera habebit $A\delta B$, ita ut congruant AKBDA et $AK\delta BA$. Et ita porro in infinitum. Sint C, D, K, δ etc. puncta media rectarum ACB, ADB, AKB, $A\delta B$ etc., cumque AC, AD, AK, $A\delta$ sint rectae, erunt DAC, KAD, δAK anguli rectilinei, et quidem aequales inter se, quia congruunt KAD et CAD, itemque DAK et δAK, et ita porro. Utcunque autem continuata sit rectarum repetitio usque ad $A\varphi B$, erit angulus φAC minor recto EAB, cum recta ex A ad angulos rectos educta non tendit ad B, quoniam utrinque se habet eodem modo. Et cum AE planum supra AB bifariam secet, et B sit intra unam ex hypothesi, non cadet in AE, cujus puncta sunt in confinio utriusque partis. Porro angulus DAC est minor recto in ratione aliqua, ut L ad M; sumatur numerus, cujus major sit ratio ad unitatem, quam rectae M ad rectam L, et quia repetitio rectarum utcunque continuari potest, ponatur esse $A\varphi B$ recta quae

numero respondeat exempl. gr. centesima recta, si ratio M ad L sit minor quam 100 ad 1. Itaque erit anguli φAC ad angulum DAC ratio major, quam anguli recti EAB ratio est ad DAC, ergo erit angulus φAC major recto EAB, pars toto, quod est absurdum.

(3) Eodem fere modo ostendi potest, duas rectas non posse habere segmentum commune. Sit recta AB (fig. 109), quae produci possit in C et in D; cum ergo ABD planum secet bifariam, dabitur recta ABK eodem modo se habens ad ABD, ut ABC se habet ad ABD, eritque adeo angulus KBD angulo CBD aequalis. Eodem modo dabitur recta $AB\delta$, quae sit ad ABK, ut ABD ad ABK. Et ita in infinitum. Porro angulus, utcunque continuetur repetitio, semper est minor recto. Neque enim ABE bifariam secat planum, cum potius hujus quartam partem abscindat, nempe dimidiam ejus quam abscindit ABC, quae bifariam secat, quia utrinque ad partes supra ABC se habeat eodem modo. Et multo minus ABF inter A et E recta esse potest, cum adhuc minus quam quartam partem abscindat, adeoque bifariam planum non secet. Ergo post quotcunque repetitiones, velut usque ad φB, erit φBC minor recto. Sed rectus EBC habet ad DBC rationem finitam, ut M ad L, sed φBC aliquis repetitione angulorum aequalium utcunque continuata, habebit majorem, erit ergo φBC major ipso EBC, pars toto, quod est absurdum.

(4) Idem etiam ex eo patet, quod si AB secat planum totum bifariam, ABD bifariam non secabit, cum cadat supra ABC; sed quae de sectione plani dicimus, intelligi possunt et de sectione circuli. Et ita haec demonstratio revera coincidet superiori.

(5) Caeterum haec etiam ex principio rationis determinantis demonstrare licebit. Nam posito (fig. 110) GACB et HADB, GA et HA rursus concurrere in B, non potest dari ratio definiens, quanta sit distantia per puncta A et B. Dicat aliquis eam crescere angulo GAH vel DAC; sed oportet dari legem relationis, utrum nempe crescat in ratione angulorum, an ut quadrata eorum vel cubi vel in alia relatione quacunque, seu quaenam sit linea, in qua anguli poni possunt ut abscissae, et ipsae distantiae ut ordinatae. Praeterea si angulis variatis variaretur CB, non posset tertia recta AKB occurrere ipsi ACB in B, quia angulus KAC major est angulo DAC, et tamen talis dari debet recta AKB, ut supra ostendimus, nam ipsa ADB planum secat bifariam, itaque debet dari AKB, quae eodem modo se habeat ad ADB, ut ACB se ad ADB habet. Cum ergo

distantia puncti B a puncto A ex angulo rectarum CA et DA definiri non possit, qui tamen determinat rectarum CA et DA situm ad invicem, atque adeo nulla est ratio determinandi distantiam punctorum duplicis concursus.

Ax. XV. XVI. XVII. XVIII. XIX. XX. Haec ex superioribus definitionibus aequalis, majoris, per substitutionem facile derivantur, excepto Ax. 19, quod ait totum esse aequale omnibus suis partibus simul sumtis. Sed addenda est limitatio, ut scilicet partes ipsae non habeant partem communem, alioqui computata partium quantitate ad habendam quantitatem totius, idem bis repetitur. De quo jam dictum est ad defin. 2. § 3.
