(20) Unde jam colligitur, duas rectas non posse sibi occurrere nisi in uno puncto, seu duas rectas, quae habeant duo puncta A et B communia, productas coincidere inter se, cum utraque sit locus omnium (atque adeo eorundem) punctorum suae ad puncta A et B relationis unicorum. Atque ita datis duobus punctis determinata est recta, in quam cadunt.

(21) Hinc porro duae rectae, quae scilicet productae non coincidunt, non possunt habere segmentum commune. Nam si segmentum commune AB (fig. 69) habeant, duo etiam puncta minimum habebunt communia $A . B$, ergo productae coincident.

(22) Similiter duae rectae non possunt claudere spatium, alioqui bis sibi occurrerent, adeoque duo puncta communia haberent (fig. 70).

(23) Ita ex nostra rectae definitione demonstrantur Axiomata, quae Euclides sine demonstratione circa rectam assumsit.

(24) *Circulus* fit rectae circa unum punctum quiescens motu in plano. Extremum quiescens erit centrum, linea ab altero extremo descripta erit circumferentia.

(25) Itaque (fig. 71) omnia circumferentiae puncta, ut X, sese eodem modo habebunt ad centrum C, seu omnia X se habebunt ad C, ut A ad C. Quod ut calculo nostro exprimatur, si sit $X . C \simeq A . C$, erit $\overline{X}$ *circuli circumferentia.*

(26) Locus omnium punctorum eodem modo se ad duo puncta habentium est *recta.* Sint duo puncta C et D (fig. 72), sitque locus $\overline{X}$, cujus quodlibet punctum X eodem modo se habeat ad C quo ad D; dico $\overline{X}$ esse rectam. Quod ut demonstretur, in loco $\overline{X}$ sumantur duo puncta A et B, ducatur recta $\overline{Z}$ per A et B; ea determinata est ex ipsis $A . B$ per § 20. Jam $A . B . C \simeq A . B . D$ ex hypothesi, quia A et B cadunt in $\overline{X}$; ergo (per axioma § 3) etiam recta per $A . B$ seu $\overline{Z}$ eodem modo se habebit ad C ut ad D, seu erit $\overline{Z} . C \simeq \overline{Z} . D$; jam etiam $X . C \simeq X . D$ ex hypothesi, ergo conjungendo $X . \overline{Z} . C \simeq X . \overline{Z} . D$. Ergo punctum X non potest esse ab uno latere rectae Z, veluti (si placet) a latere D; ita enim se aliter haberet ad rectam $\overline{Z}$ et ad D, quam ad rectam $\overline{Z}$ et ad C, itaque necesse est X cadere in $\overline{Z}$ seu omne X erit Z, unde et $\overline{X}$ cadet in $\overline{Z}$, quod erat demonstrandum.

(27) Hic ergo specimen calculi habuimus non inelegans ad praescriptum § 4. Nempe quia $X . \overline{Z} \simeq X . \overline{Z}$, quod est identicum, et $X . C \simeq X . D$ ex hypothesi, et $\overline{Z} . C \quad \overline{Z} . D$, quod probatum de-

dimus ex natura rectae, ex his binionibus omnibus singulatim respective congruentibus sequitur congruere et conflatas inde terniones seu conjungendo esse $\underbrace{X . \overline{Z} . C} \simeq \underbrace{X . \overline{Z} . D}$.

(28) Hinc si $X . C \simeq X . D$, erit $\overline{X}$ *recta,* quae congruentia permagnae est utilitatis in calculo nostro. Et vicissim si $\overline{X}$ sit recta, oportet existere puncta qualia C et D, ut locum habeat congruentia.

(29) Fieri nequit, ut recta eodem modo se habeat ad tria plani puncta seu ut sit $X . C \simeq X . D \simeq X . E$ (fig. 73). Nam si hoc esset, foret conjungendo $X . C . E \simeq X . D . E$, ergo E non potest esse ab alterutro latere. Sed idem E non potest esse in $\overline{X}$, ita enim etiam C et D forent in $\overline{X}$, et hoc amplius, coinciderent cum E, alioqui punctum aliquod rectae (nempe ipsum E) se aliter haberet ad C et ad D quam ad E, ergo punctum E praeter C et D nuspiam reperiri potest.

(30) Circulus circulo non occurrit in pluribus quam duobus punctis. Sint duae circumferentiae circulares $\overline{X}$ et $\overline{Z}$ (fig. 74), dico eas non posse secare nisi in duobus punctis, velut L et M. Nempe ipsius $\overline{X}$ centrum sit A, ipsius $\overline{Z}$ centrum sit B. Quia jam L est X et M est X, erit $L . A \simeq M . A$, et quia L est Z et M est Z, erit $L . B \simeq M . B$, utrumque ex natura circumferentiarum, quibus puncta sunt communia per § 25. Ergo conjungendo $L . A . B \simeq M . A . B$. Sit $\overline{Y}$ recta per $A . B$, utique etiam $L . \overline{Y} \simeq M . \overline{Y}$ per axiom. § 3; sed si daretur praeterea aliud duabus circumferentiis commune punctum N, haberemus $L . \overline{Y} \simeq M . \overline{Y} \simeq N . \overline{Y}$, seu recta $\overline{Y}$ se eodem modo haberet ad tria puncta L, M, N, quod fieri nequit per praecedentem. Hinc sequitur, tribus datis punctis circumferentiam, cui insint, esse determinatam, cum pluribus simul inesse non possint.

(31) Si circulus circulum tangat (fig. 75), punctum contactus in eadem est recta cum centris. Centra sunto A et B, et punctum contactus C, ubi scilicet duo puncta occursus coalescunt. Itaque (per praecedentem) circulus circulo praeterea non occurrit, alioqui forent puncta occursus tria. Punctum ergo contactus duobus circulis solum commune est. Ajo, id esse in recta per $A . B$. Quod patebit per § 19, si ostendatur, esse suae ad $A . B$ relationis unicum. Esto aliud, si fieri potest, F et debet esse $F . A . B \simeq C . A . B$; ergo divellendo et $F . A \simeq C . A$, itemque $F . B \simeq C . B$; ergo F cadet

in ambas circumferentias, atque adeo vel coincidet cum C, vel C non erit solum commune, quod est absurdum.

(32) Recta et circulus non possunt sibi occurrere in plus quam duobus punctis. Sint L et M (fig. 76) in recta $\overline{X}$, itemque in circumferentia $\overline{Z}$ circa C, dico praeter L et M non posse dari punctum N. Sumatur D eodem modo se habens ad rectam $\overline{X}$, ut C ab altera parte per § 17. Ob circulum est $L.C \simeq M.C \simeq N.C$, ergo quia puncta L, M, N sunt in recta eodem modo se habente ad D, quo ad C, etiam erit $L.D \simeq M.D \simeq N.D$; ergo conjungendo $L.C.D \simeq M.C.D \simeq N.C.D$. Sit $\overline{Y}$ recta per C.D, ergo (per axiom. § 3.) fiet $L.\overline{Y} \simeq M.\overline{Y} \simeq N.\overline{Y}$, seu recta $\overline{Y}$ se eodem modo habebit ad tria puncta L, M, N, quod fieri nequit per § 29.

Atque ita fundamentalia rectae et circuli exposuimus, quomodo scilicet occurrere sibi possint haec loca: recta rectae, circulus circulo, recta circulo, quorum occursibus caetera determinantur. Unde consequens est, caetera quoque calculo nostro tractari posse.

III.

DE ANALYSI SITUS.

Quae vulgo celebratur *Analysis Mathematica*, est *magnitudinis*, non *situs*; atque adeo directe quidem et immediate ad Arithmeticam pertinet, ad Geometriam autem per circuitum quendam applicatur. Unde fit, ut multa ex consideratione situs facile pateant, quae calculus Algebraicus aegrius ostendit. Problemata Geometrica ad Algebram, id est quae figuris determinantur ad aequationes revocare, res non raro satis prolixa est, et rursus alia prolixitate difficultateque opus est, ut ab aequatione ad constructionem, ab Algebra ad Geometriam redeatur, saepeque hac via non admodum aptae prodeunt constructiones, nisi feliciter in quasdam non praevisas suppositiones assumtionesve incidamus. Hoc ipse Cartesius tacite fassus est, cum lib. 3 Geometriae suae problema quoddam Pappi resolvit. Et sane Algebra sive numerica sive speciosa addit, subtrahit, multiplicat, dividit, radices extrahit, quod utique arithmeticum est. Nam ipsa Logistica, seu scientia magnitudinis proportionisve in universum, nihil aliud tractat quam numerum generalem seu indeterminatum et has in eo species

operandi, quoniam *Magnitudo* revera determinatarum partium multitudine aestimatur, quae tamen manente re variat, prout alia aut alia mensura vel unitas assumitur. Unde mirum non est, Scientiam Magnitudinis in universum esse Arithmeticae genus, cum agat de numero incerto.

Habebant Veteres aliud Analyseos genus, ab Algebra diversum, quod magis ad situs considerationem accedit, tractans de *Datis* et de *Sedibus* quaesitorum seu *Locis*. Et huc tendit Euclidis libellus de Datis, in quem Marini Commentarius extat. De Locis vero planis, solidis, linearibus actum est cum ab aliis, tum ab Apollonio, cujus propositiones Pappus conservavit, unde recentiores Loca plana solidaque restituerunt, sed ita, ut veritatem magis quam fontem doctrinae veteris ostendisse videantur. Hoc tamen Analyseos genus neque ad calculum rem revocat, neque etiam producitur usque ad prima principia atque elementa situs, quod ad perfectam Analysin necesse est.

Vera igitur Situs Analysis adhuc supplenda est, idque vel ex eo constat, quod omnes Analytici, sive Algebram exerceant novo more, sive data et quaesita ad veterem formam tractent, multa ex Geometria elementari assumere debent, quae non ex magnitudinis, sed figurae consideratione deducuntur neque determinata quadam via hactenus patent. Euclides ipse quaedam axiomata satis obscura sine probatione assumere coactus est, ut caetera procederent. Et Theorematum demonstratio solutioque Problematum in Elementis magis aliquando apparet laboris opus quam methodi et artis, quanquam et interdum artificium processus suppressum videatur.

Figura in universum praeter quantitatem continet qualitatem seu formam; et quemadmodum *aequalia* sunt quorum eadem est magnitudo, ita *similia* sunt quorum eadem est forma. Et similitudinum seu formarum consideratio latius patet quam mathesis, et ex Metaphysica repetitur, sed tamen in mathesi quoque multiplicem usum habet, inque ipso Calculo algebraico prodest, sed omnium maxime similitudo spectatur in sitibus seu figuris Geometriae. Itaque Analysis vere geometrica non tantum aequalitates spectat et proportionalitates, quae revera ad aequalitates reducuntur, sed similitudines etiam, et ex aequalitate ac similitudine conjunctis natas congruentias adhibere debet.

Causam vero cur similitudinis consideratione non satis usi sunt Geometrae, hanc esse arbitror, quod nullam ejus notionem generalem haberent satis distinctam aut ad mathematicas disquisitiones accommodatam, vitio philosophorum, qui definitionibus vagis et definito obscuritate paribus, in prima praesertim philosophia contenti esse solent, unde mirum non est sterilem esse solere doctrinam illam et verbosam. Itaque non sufficit similia dicere, quorum eadem forma est, nisi *formae* rursus generalis notio habeatur. Comperi autem, instituta qualitatis vel formae explicatione, rem tandem eo devenire, ut *similia* sint, quae singulatim observata discerni non possunt. Quantitas enim sola rerum compraesentia seu applicatione actuali interveniente deprehendi potest, qualitas aliquid menti objicit, quod in re separatim agnoscas et ad comparationem duarum rerum adhibere possis, actuali licet applicatione non interveniente, qua res rei vel immediate vel mediate tertio tanquam mensura confertur. Fingamus duo templa vel aedificia exstructa esse haberi ea lege, ut nihil in uno deprehendi queat, quod non et in alio observes: nempe materiam ubique eandem esse, marmor Parium candidum, si placet; parietum, columnarum, caeterorumque omnium easdem utrobique esse proportiones, angulos utrobique eosdem seu ejusdem rationis ad rectum; itaque qui in haec bina templa ducetur clausis oculis, sed post ingressum apertis, et nunc in uno, nunc in altero versabitur, nullum indicium ex ipsis inveniet, unde alterum ab altero discernat. Et tamen magnitudine differre possunt, atque adeo discerni poterunt, si simul spectentur ex loco eodem, vel etiam (licet remota sint invicem) si tertium aliquod translatum nunc cum uno, nunc cum altero comparetur, veluti si mensura aliqua, qualis ulna aut pes aut aliud quiddam ad metiendum aptum, nunc uni nunc alteri accommodetur, nam tum demum discernendi ratio dabitur inaequalitate deprehensa. Idem est, si ipsum spectatoris corpus aut membrum, quod utique cum ipso de loco in locum transit mensuraeque officium praestat, his templis applicetur; tunc enim magnitudo diversa, et per hanc discernendi modus apparebit. Sed si spectatorem non nisi ut mentem oculatam consideres, tanquam in puncto constitutam, nec ullas secum magnitudines aut re aut imaginatione afferentem, eaque sola in rebus considerantem, quae intellectu consequi licet, velut numeros, proportiones, angulos, discrimen nullum occurret. Similia igitur dicentur haec templa, quia non nisi hac coobservatione vel inter se, vel cum tertio, minime autem sigillatim et per se spectata discerni potuere.

Haec evidens et practica et generalis similitudinis descriptio nobis ad demonstrationes geometricas proderit, ut mox patebit. Nam duas figuras oblatas similes dicemus, si aliquid in una singulatim spectata notari nequeat, quod in altera non aeque deprehendatur. Itaque eandem utrobique ingredientium rationem sive proportionem esse debere consequitur, alioqui per se sigillatim seu nulla licet amborum coobservatione instituta, discrimen apparebit. At Geometrae cum generali similitudinis notione carerent, figuras similes ex aequalibus respondentibus angulis definierunt, quod speciale est, non ipsam naturam similitudinis in universum aperit. Itaque circuitu opus fuit, ut demonstrarentur, quae ex nostra notione primo intuitu patent. Sed ad exempla veniamus.

Ostenditur in Elementis, triangula similia seu aequiangula latera habere proportionalia, et vicissim; sed hoc multis ambagibus Euclides quinto demum libro conficit, cum primo statim ostendere potuisset Elemento, si nostram notionem fuisset secutus. Demonstrabimus primum, *triangula aequiangula esse similia.* Esto triangulum ABC (fig. 77) et aliud rursus LMN, sintque anguli A, B, C ipsis L, M, N respective aequales, dico triangula esse similia. Utor autem hoc *axiomate novo*: *Quae ex determinantibus* (seu datis sufficientibus) *discerni non possunt, ea omnino discerni non posse*, cum ex determinantibus caetera omnia oriantur. Jam data basi BC datisque angulis B et C (adeoque et angulo A) datum est triangulum ABC; itemque data basi MN datisque angulis M, N (adeoque et angulo L) datum est triangulum LMN. Sed ex his datis sufficientibus singulatim discerni triangula non possunt. Nam in uno quoque data sunt basis et duo ad basin anguli; jam basis angulis conferri nequit; nihil aliud ergo superest quod in triangulo alterutro ex determinantibus sigillatim spectato examinari possit, quam ratio anguli cujusque dati ad rectum vel duos rectos, id est anguli ipsius magnitudo. Quae ipsa cum utrobique eadem reperiantur, necesse est triangula sigillatim discerni non posse, adeoque similia esse. Nam ut in Scholii modum addam, etsi magnitudine triangula discerni possint, tamen magnitudo nisi per coobservationem vel triangulorum amborum simul, vel utriusque cum aliqua mensura agnosci non potest, sed ita jam non tantum spectarentur singulatim, quod postulatur.

Vicissim manifestum est, *triangula similia etiam aequiangula* sse; alioqui si esset angulus aliquis ut A in triangulo ABC, cui nullus reperiretur aequalis angulus in triangulo LMN, utique daretur angulus in ABC, habens rationem ad duos rectos (seu ad omnium trianguli angulorum summam), quam non habet ullus in LMN, quod sufficit ad triangulum ABC a triangulo LMN singulatim distinguendum. Constat etiam *triangula similia habere latera proportionalia.* Nam si dentur duo aliqua latera, velut AB, BC, habentia rationem inter se, quam nulla trianguli LMN latera inter se habeant, jam poterit alterum triangulum ab altero singulatim discerni. Denique *si latera proportionalia sint*, *triangula similia erunt*; quoniam enim datis lateribus data sunt triangula, sufficit (per axioma nostrum) ex laterum ratione discrimen haberi non posse, ut ex nullo in triangulis his singulatim spectatis alio haberi posse judicemus. Ex his vero etiam patet, *triangula aequiangula habere latera proportionalia, et vicissim.*

Eodem modo primo statim mentis obtutu ex nostra similitudinis notione directe ostenditur, *circulos esse ut quadrata diametrorum*, quod Euclides demum decimo libro ostendit, et quidem per inscripta et circumscripta, rem reducendo ad absurdum, cum tamen nullis ambagibus esset opus. Diametro AB (fig. 78) descriptus sit circulus, eique circumscriptum diametri quadratum CD; eodemque modo diametro LM descriptus sit circulus, eique circumscriptum diametri quadratum NO. Determinatio utrobique est similis, circulus circulo, quadratum quadrato, et accommodatio quadrati ad circulum, itaque (per axioma supradictum) figurae ABCD et LMNO sunt similes. Ergo (per definitionem similitudinis) erit circulus AB ad quadratum CD, ut circulus LM ad quadratum NO; ergo etiam circulus AB ad circulum LM est ut quadratum CD ad quadratum NO, quod affirmabatur. Pari ratione *sphaerae* ostenduntur esse *ut cubi diametrorum.* Et in universum in similibus lineae, superficies, solida homologa erunt respective ut longitudines, quadrata, cubi laterum homologorum, quod hactenus generaliter assumtum magis quam demonstratum est.

Porro haec consideratio, quae tantam praebet facilitatem demonstrandi veritates alia ratione difficulter demonstrandas, etiam novum calculi genus nobis aperuit, a calculo algebraico toto coelo diversum, notisque pariter et usu notarum operationibusve novum. Itaque Analysin situs appellare placet, quod ea situm recta et immediate explicat, ita ut figurae etiam non delineatae per notas in animo depingantur, et quicquid ex figuris imaginatio intelligit em-

pirica, id ex notis calculus certa demonstratione derivet, caeteraque etiam omnia consequatur, ad quae imaginandi vis pertingere non potest: imaginationis ergo supplementum, et ut ita dicam perfectio in hoc, quem proposui, calculo situs continetur, neque tantum ad Geometriam, sed etiam ad machinarum inventiones, ipsasque machinarum naturae descriptiones usum hactenus incognitum habebit.

IV.

IN EUCLIDIS ΠΡΩΤΑ.

Ad Libri primi Definitiones.

I. *Punctum* est cujus pars nulla est.

Addendum est, *situm habens.* Alioqui et temporis instans, et Anima punctum foret. Sit locus $\overline{X}$; si jam quicquid est in loco $\overline{X}$, sit X, dicetur X esse punctum, quale A.

II. *Linea* est longitudo latitudinis expers.

(1) Debebat definiri, quid longitudo latitudoque esset, ne obscurum per aeque obscurum explicari videretur. Malim ergo sic definire: *Linea* est magnitudo, cujus sectio non est Magnitudo. Et haec magnitudo dicetur latitudine carere, cum *latitudo* nihil aliud sit quam quantitas sectionis, *longitudo* autem ea secundum quam sectio non fit. Sit magnitudo, cujus duae partes quaecunque sint $\overline{Z}$ et $\overline{Y}$, sectio autem eorum communis erit $\overline{Z \text{ et } Y}$. Si jam $\overline{Z \text{ et } Y}$ semper est punctum, magnitudo est linea. Voco autem $\overline{Z}$ locum omnium punctorum Z, et $\overline{Y}$ locum omnium punctorum Y, et $\overline{Z \text{ et } Y}$ locum eorum punctorum quae simul sunt Z et Y, seu quae simul sunt in $\overline{Z}$ et in $\overline{Y}$.

(2) Linea etiam per motum definiri potest, sed tunc adhibendum est tempus. Sit $\overline{Z}$ ad $\overline{T}$, et $\overline{T}$ tempus, erit $\overline{Z}$ linea; porro $\overline{Z}$ ad $\overline{T}$ significat, puncta Z et instantia T *coordinata* esse sive cuivis Z proprium esse T (unde sequitur, et ob continuam mutationem cuivis T proprium esse Z) seu Z esse locum puncti lineam motu describentis. Nam si describatur superficies, plura puncta loci eodem instanti tempore describuntur. Quicquid autem eodem instanti describitur, commune est ei quod prius et quod posterius describitur, seu duabus descripti partibus, atque adeo est sectio, de quo mox. Itaque si quovis momento non nisi unum punctum

describitur, sectio magnitudine caret, ac proinde quod producitur linea est.

Magnitudo ita definienda est, ut comprehendat lineam, superficiem et solidum, non tamen angulum, quod ita nos consequi posse arbitror: *Magnitudo* est continuum, quod habet situm; Angulus autem continuum non est. Porro ad continuum duo requiruntur, unum ut duae quaevis ejus partes totum aequantes habeant aliquid commune, quod adeo pars non est; alterum ut in continuo sint partes extra partes, ut vulgo loquuntur, id est ut duae ejus partes assumi possint (sed non aequantes), quibus nihil insit commune, ne minimum quidem. Ita rectae AB (fig. 79) duae partes assumi possunt AC et BD, nihil plane quod ipsi rectae insit commune habentes, ne punctum quidem. Sed duae quaevis partes aequantes, ut AC et BC, commune habent, nempe C. At anguli AEB (fig. 80) tales partes sumi nequeunt, nam AEC et BED anguli, qui sunt ejus partes, saltem habent punctum E commune; imo revera Anguli in ipso sunt puncto, vel saltem ad ipsum, cum idem sit angulus, quantulaecunque sint rectae, sitque adeo nihil aliud quam inclinatio exeuntium linearum, uti velocitas spectatur in statu mobilis loco suo exire jam tendentis, etsi nullos adhuc fecerit progressus.

(3) Sed opus est, ut etiam explicemus quid sit sectio. Eam ita definio: *Sectio* magnitudinis est quidquid est commune duabus Magnitudinis partibus partem communem non habentibus. Esto Magnitudo AB (fig. 81), ejusque partes AD, BC, quibus communis recta CD, quae est et in AD et in BC, etsi hae partes non habent partem communem. Nam CD *non est* pars ipsius AD nec ipsius BC. Hujus indicium est, quod AD + BC + CD non est majus quam AD + BC, seu non habet ad ipsum rationem majoris ad minus, cum AD et BC sint partes aequantes totum. Sed si partes *partem communem haberent*, uti ex. gr. AF et BC partes ipsius AB habent partem communem CF, tunc AF + CB majus foret quam AB (cum sint partes complentes quidem totum AB, ut faciunt AD et BC, sed non aequantes, ut etiam faciunt AD et BC), et tamen AF (+) CB seu AF et CB simul sumta, non sunt plus quam AB. Quod discrimen inter additionem quantitatum, et simul-sumtionem rerum probe notandum est. Et ut additio mentalis *quantitatum* designatur per +, ita additionem realem *magnitudinum*, seu ipsorum quantorum designo per (+), donec aliquid commodius occurrat.

III. Lineae Termini sunt puncta.

(1) Haec positio non recte inter definitiones collocatur, neque enim apparet definitum. Est potius conclusio, quae ex praecedentibus duci potest. *Terminus* est quod commune est magnitudini cum alia, partem priori communem non habente. Itaque cadit in sectionem totius ex ambabus magnitudinibus compositi, adeoque Terminus vel ipsa erit sectio (cum intelligatur id omne quod commune est) vel saltem sectioni inerit. Sed sectio lineae non est magnitudo; itaque nec terminus magnitudo erit, et proinde, cum situm habeat, erit punctum.

IV. *Recta Linea* est quae ex aequo sua interjacet puncta.

(1) Haec definitio nullius momenti est, neque uspiam ab Euclide in demonstrando adhibetur, neque satis intelligitur. Itaque Archimedes rectam definit, quae est minima inter duo puncta. Sed si haec mens fuisset etiam Euclidis, ut Clavius interpretatur, non fuisset aggressus demonstrare, in triangulo duo quaecunque latera esse tertio majora; id enim ex tali definitione statim consequebatur.

(2) Ego varias lineae rectae definitiones habeo: veluti *Recta* est linea, cujus pars quaevis est similis toti, quanquam Recta non solum inter lineas, sed etiam inter magnitudines hoc sola habeat. Sit locus $\overline{X}$ (fig. 82), et locus alius quicunque $\overline{Y}$, qui insit priori, seu cujusque punctum quodvis Y sit X; si jam $\overline{Y}$ est simile ipsi $\overline{X}$, erit $\overline{X}$ recta. Simul autem hinc patet, Y esse *partem* ipsius $\overline{X}$, nam omne quod inest si simile sit, *pars* est.

(3) Definio etiam *rectam*, locum omnium punctorum ad duo puncta sui situs unicorum. Et hinc si quaecunque magnitudo moveatur duobus punctis immotis, mota quidem puncta arcum circuli describent, quiescentia autem omnia cadent in rectam, in quam cadent omnium illorum Circulorum centra. Et haec recta erit Axis Motus. Ita generationem rectae et circuli una eademque constructione habemus. At punctum extra rectam positum, circumferentiam describens, infinita percurrit puncta, eodem modo sita ad duo illa puncta immota et ad rectam per ea transeuntem. Calculo situs rem ita exprimo: Si sit X . A . B unic., erit $\overline{X}$ recta, vel si sit X . A . B $\sim$ (X) . A . B et ideo X $\simeq$ (X), erit $\overline{X}$ recta, ubi $\sim$ mihi similitudinem significat, $\simeq$ congruentiam, $|\simeq$ coincidentiam.

(4) Sed ad Euclideas demonstrationes perficiendas deprehendi hac opus esse definitione, ut *recta* sit sectio plani utrinque se habens eodem modo, ut latus A (fig. 83) et latus B, cum in *curva*

differat latus (A) a latere (B), quorum illud *convexum* appellatur, hoc vero *concavum*, in quod cadit recta jungens extrema. Sumatur folium chartae et secetur: si sectio est linea recta, novus terminus sectione factus in uno segmento non potest ab eo distingui, qui factus est in alio segmento; si vero sectio sit non recta, sed quam curvam vocant, terminus unius segmenti erit convexus, alter concavus.

(5) Calculo rem ita exprimimus. Sint plani segmenta $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, et sit $\overline{Z}$ sectio communis, ita $\overline{Z}$ est in $\overline{X}$ et in $\overline{Y}$, seu quod eodem redit, omne Z est X et omne Z est Y. Si jam $\overline{Z} . \overline{X} \simeq \overline{Z} . \overline{Y}$, erit $\overline{Z}$ recta. Itaque si A sit quoddam X, dabitur quoddam Y, quod vocabimus L (ita ut L sit quoddam Y) eodem modo se habens ad $\overline{Z}$, ut A se habet ad $\overline{Z}$, ut adeo sit $A . \overline{Z} \simeq L . \overline{Z}$. Sed etsi sint quotcunque assumta X, quomodocunque se inter se habentia et ad $\overline{Z}$, veluti A . B . C, dabuntur his respondentia puncta Y, ita ut sit $A . B . C . \overline{Z} \simeq L . M . N . \overline{Z}$.

(6) Hinc sequitur, in quo plano sunt puncta rectae, in eo etiam esse rectam. Ac proinde si linea aut lineae sint in uno aliquo plano, rectas omnes, quae puncta lineae aut linearum jungunt, esse in eodem plano et figuram constituere, quae sit pars plani, et non posse partem rectae esse in plano partem in sublimi, quia recta in plano cui inest semper continuari potest, ergo non etiam extra planum, alioqui duae rectae haberent segmentum commune, quod de rectis, quales § 4. definivimus, impossibile esse infra ostendetur. Unde patet etiam coincidere duas figuras planas, quarum termini (in eodem plano scilicet positi) coincidunt, quia coincidunt rectae intra figuram cadentes ab uno puncto termini ad aliud ductae, sive non nisi unica duci potest. Porro hae rectae figuram constituunt, cum constituant omnia ejus puncta. Nam per quodvis punctum intra figuram recta ducta occurret figurae (planae scilicet) in duobus punctis, ut infra ostendemus definit. 17. § 1. Sed haec in Circulo suo loco maxime patebunt.

V. *Superficies* est quae longitudinem latitudinemque tantum habet.

(1) Uti dictum erat, lineam habere longitudinem sine latitudine, ita dicendum erat, superficiem habere longitudinem et latitudinem sine profunditate.

(2) Sed definiendum erat quid sit profunditas, quod cum factum non sit, eum defectum supplebimus, uti definivimus, quid

sit Latitudo. *Profundum* esse illud invenio, in quo est quod ab externo attingi non potest; ita nullum quidem est circuli punctum, vel alterius superficiei, quod non ab alio minime licet in eam superficiem penetrante attingi possit. At vero profundum habet partes undique tectas. Itaque *profunditatem* habet Magnitudo, in qua aliquid sumi potest, quod non potest ei esse commune cum alio nisi *penetrante* seu partem in eadem magnitudine habente.

(3) Hinc sequitur, *Solidum* seu profunditate praeditum non posse esse sectionem alterius sive sectionis partem, vel in sectione existens, adeoque non posse esse Terminum. Nam quicquid Terminus est, ab extraneo attingi totum potest. Unde intelligitur, solido altiorem dimensionem non dari. Nec solidum ita moveri potest, quin vestigia ejus partem habeant communem, quod secus est in his, quae profunditate carent; add. defin. 2. § 2. Patet etiam, superficiem, etsi a superficie *secari* possit ita ut *sectio* longitudinem habeat, non posse tamen a linea ita trajici, ut trajectio longitudinem habeat. At omnis solidi trajectio magnitudinem habet. Notandum, differre sectionem a trajectione, quod illa non nisi homogeneis communis est, lineae et lineae, superficiei et superficiei, solido et solido; trajectio autem etiam lineae et solido communis esse potest; quod secat, trajicit, non contra. Trajicit autem cujus aliquod medium est intra trajectum, caetera, inter quae medium, sunt extra.

(4) Ex his, cum omnis in magnitudinibus varietas oriatur a terminis, manifestum est omne solidum intus uniforme esse, ut unum punctum ab alio discerni non possit, nisi ad terminos referantur.

(5) Sed imperfecta est haec doctrina, antequam demonstretur, tres tantum esse dimensiones, seu id omne quod profunditate caret et latitudinem habet seu quod medium est inter lineam et solidum, esse unius ejusdemque dimensionis. Ostendendum igitur est, sectionem solidi esse superficiem, id est magnitudinem cujus sectio sit linea, vel quod eodem redit, motu superficiei describi solidum. Caeterum ea res demonstrata est, quantum memini, a Ptolemaeo de Analemmate, ex eo quod tres tantum dantur rectae perpendiculares inter se ad idem punctum.

(6) Ex his etiam patet, superficiem non esse sufficienter definitam, neque enim constat ut dixi, an omne quod latitudinem habet et profunditate caret, sit ejusdem dimensionis. Nam si *super-*

ficies descendendo definiatur, est Magnitudo cujus sectio sectionem non potest habere, quae rursus sit magnitudo (quo posito omnis superficiei sectio vel erit linea vel punctum). Quaeri poterit an ascendendo possit dari dimensio media inter superficiem et solidum, cujus sectio sit superficies, quae adeo dimensio summa non sit, sed possit rursus alterius constituere sectionem. Similiter si *superficies* definiatur ascendendo, quod sit sectio solidi, jam quaeri potest descendendo, an non detur medium inter talem superficiem et lineam; quod si demonstretur, ambas definitiones coincidere, seu quod est sectio solidi, id sectionem habere lineam, jam demonstratum erit, non nisi tres esse dimensiones, sane ponendo planum esse sectionem solidi, et plani sectionem esse rectam, et ubi jam constitui rectam a recta non nisi in puncto secari posse, adeoque rectam esse lineam, res confecta erit.

VI. Superficiei autem extrema sunt lineae.

(1) Ad hunc articulum eadem notari possunt quae ad quartum, non esse definitionem, cum careat definito, et ex ipsa superficiei notione derivari, sed qualis a nobis correcta est, in articuli praecedentis § 6.

(2) Dicendum tamen erat, superficiei extrema non tantum esse posse lineas, sed et puncta.

VII. *Plana* est superficies, quae ex aequo suas interjicit lineas.

(1) Haec quoque definitio nullius momenti est ob eas causas, quas allegavimus ad definitionem lineae rectae.

(2) Quidam planum definiunt superficiem minimam inter eadem extrema, quod verum est, sed non est commodum demonstrationibus. Nec male Heroni *planum* est superficies, cujus quibuslibet partibus recta accommodari potest, seu in qua duci potest linea recta a puncto quocunque versus partem seu plagam quamcunque, quanquam in hac definitione videatur aliqua esse subreptio pleonastica, et dubitari posse, an talis superficies detur; uti in definitione rectae ad planum perpendicularis apud Euclidem subreptio pleonastica est.

(3) Ego quoque aliquas plani definitiones commentus sum. Una est, ut sit superficies, in qua pars similis toti, tunc cum extrema partis similia sunt extremis totius, ita cum circumferentia circuli sit alteri circumferentiae circuli similis, etiam circulus circulo similis erit, quia est in plano. In hoc ergo differt a recta, cujus absolute pars quaevis est similis toti. Atque ita etiam duo

diversa plana, quorum extrema sunt similia, erunt inter se similia. Nempe plana intus uniformia sunt, nec nisi extremis distinguuntur. Illud solius planae superficiei proprium non est, ut congrua sint, quorum extrema sunt congrua, nam et superficiei sphaericae et cylindricae partes congruis circumferentiis inclusae congruae sunt.

(4) Alia *plani* definitio mihi est, ut sit locus omnium punctorum sui ad tria puncta in eandem rectam non cadentia situs unicorum. Haec respondet paulo ante positae definitioni rectae. Et hinc statim colligitur, positis duabus rectis se secantibus omnes rectas, quae per duo quaevis unius et alterius puncta transeunt, esse in eodem plano.

(5) Sit $\overline{Y}$ planum, erit Y . A . B . C unic. Et haec puncta sunt ipsa in plano. Nam utique A est quoddam Y, quia A ad A . B . C est unic.; idemque est de B et C. Et idem quod de A . B . C, intelligi potest de tribus quibuscunque plani punctis, in eandem rectam non cadentibus, ut caetera sint ad ipsa unica. Sit jam in recta $\overline{Z}$ et puncta ejus duo L . M in plano, erit Z . L . M unic., sed L . A . B . C unic. et M . A . B . C unic., ergo pro L et M substituendo ea, per quae determinantur, fiet Z ad A . B . C . A . B . C unic., id est Z ad A . B . C unic.; nam hic nihil facit reduplicatio. Unde constat, rectam cujus duo puncta sunt in plano, cadere in planum.

(6) Sed tandem superiori rectae definitioni ad Euclideas demonstrationes accommodatae, haec respondet nostra definitio plani, ut sit sectio solidi utrinque habens se eodem modo; ut si pomum secem in duo frusta, ut extremum novum unius segmenti non possit distingui ab extremo novo alterius segmenti, sectio erit planum. Sin distingui possint, tunc unus terminus vocatur *convexus seu gibbus*, alter, in quem planum cadit, *concavus*.

(7) Habet et hic locum calculus. Esto solidum infinitum seu quantum satis productum, sectum in duo segmenta $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, et secans sit $\overline{Z}$, ita ut omne Z sit X, et omne Z sit Y; si jam sectio sit planum, oportet esse $\overline{X}.\overline{Z} \simeq \overline{Y}.\overline{Z}$. Et omnia locum habebunt in plano secante solidum, ut supra in recta secante planum.

(8) Ex his patet etiam, solidum, planum et rectam esse magnitudines intus uniformes, ita ut nullum discrimen offeratur, cum termini non attinguntur. Cum enim solidum sit intus uniforme ex natura profunditatis et sectione ejus per planum nulla oriatur diversificatio, etiam planum erit intus uniforme. Eodem modo et plani sectio, quae nullam diversificationem habet, nempe per rectam,

intus uniformis erit, quanquam rectae etiam termini nullam offerant varietatem, cum sint puncta; unde fit etiam, ut partes rectae sint similes inter se aut toti. At plani et solidi terminos multum varietatis habere posse patet, cum sit magnitudines; vid. def. 2. § 1. et def. 4. § 1. Itaque etsi uniformia sint omnia, cum nulla terminorum ratio habetur, in plano tamen vel solido partes inter se similes non sunt, nisi termini sint similes. Illud autem solido, plano, rectae commune est, ut congrua sint ommino, quorum termini prorsus congrui sunt.

VIII. *Planus Angulus* est duarum linearum in plano se mutuo tangentium et non in directum jacentium alterius ad alteram inclinatio.

(1) Lineae intelliguntur in plano ductae, sibique occurrentes. Nam hic *tangentes* idem significant quod *obtingentes,* non id quod appellare solemus contactum. Lineae *in directum* jacentes non tantum possunt esse duae rectae unam constituentes, sed etiam duo arcus circuli aut alii, v. g. cum duo arcus circuli eundem arcum componunt seu cum constituunt unam circularem lineam continuatam. Porro eadem linea continuatur a duabus partibus, cum utraque pars in puncto communi eandem habet rectam tangentem, eundem circulum osculantem, aliasque etiam communes lineas plus quam osculantes; de quo alibi. Sed tales esse intelligi potest ex aliqua proprietate vel generatione communi quae ambigua sit, quae non det modum eandem lineam continuandi bis vel saepius.

(2) Quid sit inclinatio linearum in Angulo, jam nonnihil attigimus ad def. 2. § 2. Sed hoc loco considerandum est, cum Angulo quantitas tribuitur, opus esse aliqua ejus mensura, quae quidem pro angulo plano rectilineo habetur in circuli circumferentia, nempe Anguli (fig. 84) BAC, CAD, BAD sunt ut arcus circumferentiae in eodem plano centro A descriptae rectas AB, AC, AD secantis, seu ut arcus BC, BD, CD. Cumque arcus sint inter se ut rectae iis aequales seu in quas extendi possunt, erunt anguli rectilinei inter se ut rectae. Sed in curvis inclinatio seu directio rectae, tangentis curvam, habetur pro directione curvae; ex gr. arcus circuli ABC (fig. 85) in puncto C habet directionem, quam recta tangens DCE; quam in rem curvam concipimus ut polygonum velut MLHCNO (fig. 86), cujus latera sunt portiones rectarum tangentium. Ex. gr. CH erit portio tangentis DE, sed eae portio-

nes in polygonis veris designabiles, in ipsa curva una cum polygono evanescunt in punctum tangenti cum curva commune. Atque hoc sensu angulus, quem vocant semicirculi ABCR (fig. 85), seu angulus arcus circuli ABC ad rectam CR curvae perpendicularem seu ad radium, idem est cum angulo DCR aut ECR, quem facit recta CE vel DC ad rectam RC; et sic angulus contactus DCBA quantitatem non habet, alioqui ejus quantitas foret differentia inter quantitates angulorum DCR et ABCR: quantitatem, inquam, non habet quae per mensuram anguli rectilinei aestimari possit. Si qua vero est ratio aestimandi angulos contactus comparandique inter se, oritur ex diverso plane principio et ad aliam plane mensuram refertur. Si quis vero ex eo saltem angulum contactus contendat esse quantitatem, et quidem minorem quovis rectilineo ut FCD, quia DCB cadit intra DCF, is crassius loquitur, et recurrit ad quantitatis genus imperfectum, quod nullam habet mensuram continuam, ubi etiam non habet locum ratio vel proportionalitas. Neque enim assignari recta potest, quae sit ad rectam, ut est angulus contingentiae DCB ad angulum contingentiae DCG, quod in Angulis rectilineis fieri posse jam ostendimus. Porro Angulum contactus non habere quantitatem mediam inter angulum rectilineum nullum et aliquem ut FCD, ex eo patet, quod movendo rectam FC circa punctum C, donec recta FC incidat in rectam DC, seu angulus evanescat, patet per angulos omnes medios transiri inter Angulum nullum, cum FC incidit in DC, et rectilineum FCD, quoniam continuus est transitus, ergo necesse est angulum contingentiae non esse medium quantitate inter angulum nullum et aliquem rectilineum. Ac proinde plane est diversi generis, et respectu anguli rectilinei ne quidem ut infinite parvus considerari potest, qui utique inter nullum et assignabilem collocatur. Itaque hac in re Peletario contra Clavium assentior; et Euclides cum angulum contactus dixit minorem quovis rectilineo, locutus est paulo laxius, per minorem intelligens, cujus initia intra prioris spatium cadunt. Non autem ideo perfectam quantitatem angulo contactus respectu rectilinei tribuisse censeri debet. Atque haec est conciliatio Archimedis et Euclidis, quos summus Vir, Franciscus Vieta, sibi opposuisse visus est, et valde peccavit Clavius, cum hoc Axioma negavit, quo affirmatur, quod transit ab uno extremo ad aliud et quidem per omnia intermedia, debere transire per aequale, eaque ratione Thomae Hobbesio occasionem dedit Geometris insultandi. Itaque valde notanda est haec distinctio inter quantitatem vel aestimationem perfectam seu Geometricam, et imperfectam seu popularem, quam hoc loco secutus est Euclides, cum Angulum contactus quovis rectilineo minorem dixit.

(3) Interim aliqua quantitas ascribi potest curvaturae, et licebit eam aestimare ex ipsa magnitudine circumferentiarum, et quod eodem redit radiorum circuli; sunt enim circumferentiae circulares radiis proportionales. Sint circuli aliquot ita collocati ut minor majorem intus tangat, omnes in eodem puncto, cadantque adeo centra in eandem rectam; si jam circuli sint descripti radiis (fig. 87) AD, BD, CD etc., dici potest curvaturas circulorum esse reciproce ut radios, seu curvatura circuli ex centro A erit ad curvaturam circuli ex centro B, ut 1 : AD ad 1 : BD seu ut BD ad AD. Inde cum recta EDF infinities producta fingi possit circumferentia infiniti radii, erit ejus curvatura infinite parva, revera nulla.

(4) Hinc tandem etiam nanciscimur mensuram ipsorum Angulorum contingentiae, sed quos faciunt circuli inter se, nempe per differentias mensurarum, quas curvaturis assignavimus.

Curvatura circuli			
descripti per D centro	A	B	C
mensuratur per radium	AD	BD	CD
Angulus Circulorum qualis	GDH	HDI	GDI
mensuratur differentia radiorum	—AD + BD	—BD + CD	—AD + CD

idque calculo sic formatur: Angul. GDI = Ang. GDH + HDI, id vero succedit mensuris substitutis, nam est —AD + CD = —AD + BD — BD + CD, sed angulus contingentiae quem recta ED facit ad aliquem circulorum, est infinitus, cum recta fingatur esse circulus descriptus radio infinito, cujus curvatura sit infinite parva. Unde quod certa aliqua consideratione pro nihilo habetur, alia habetur pro infinito.

(5) Hinc etiam habemus mensuras tum directionis, tum et curvaturae caeterarum linearum. Nam curvae cujusque ea est directio in puncto quocunque, quae rectae in eo puncto contingentis, habentque odeo eandem directionem lineae quae se contingunt. Sed Lineae curvatura aestimanda est circulo tangente non quovis (nam infiniti sunt Circuli tangentes Curvam in eodem puncto, recta vero non nisi unica), sed eo qui ex circulis maxime ad curvam accedit, et diutissime ei ut sic dicam abrepit, ita ut intra ipsum et curvam alius circulus tangens cadere non possit. Isque est Curvam intus

tangentium maximus, quem olim considerans appellavi osculantem, quia plus quam tangit. Isque hanc habet utilitatem maximam, ut curvae, quam osculatur, tanquam succedaneum substitui possit. Itaque hinc derivavi Focos speculorum aut vitrorum Sphaericorum in Catoptricis et Dioptricis, ut circulus scilicet eum focum habere intelligatur, quem Parabola, Hyperbola vel Ellipsis, quam ille osculatur. Cui observationi postea David Gregorius opusculum synopticum hujus argumenti inaedificavit. Ac vel inde etiam merito ut recta ad determinandam curvae directionem, ita circulus ad determinandam ejus curvaturam adhibetur. Ut enim rectae cujuscunque ubique eadem est directio, ita circuli ejusdem ubique eadem est curvatura. Circulus autem circulum osculari non potest, semperque inter circulos binos, quorum unus ab altero intus tangitur, velut HD potest sumi medius, quia centrum inter horum centra A et C medium sumi potest. Sed de Circulis Osculantibus plura, dicta sunt a nobis et amicis, tum in Actis Eruditorum Lipsiensibus tum in variis scriptis Analyseos infinitesimalis.

IX. Cum quae Angulum continent lineae Rectae fuerint, *Rectilineus* ille *Angulus* appellatur.

(1) Intelligit Rectilineum planum; suo tamen loco demonstrabitur, omnem angulum rectilineum esse planum.

X. Cum linea, super rectam consistens lineam, eos qui sunt deinceps angulos aequales inter se fecerit, *rectus* est uterque aequalium angulorum. Et quae insistit recta linea, *Perpendicularis* vocatur ejus cui insistit.

(1) Explicandum erat, unde *Angulus* alteri aequalis aut eo major aut minor haberi debeat. Ea autem mens Euclidis esse videtur, ut si angulus intra angulum cadit, ille *minor*, hic *major* dicatur, aequalis vero, qui congruens est aut ex congruis componitur, atque hoc quidem assumendo lineas angulum facientes quantumlibet parvas. Porro angulus intra angulum cadit, si recta, minorem faciens angulum, cadat inter spatium interceptum facientibus majorem. Et componitur angulus major, quem faciunt duae lineae extremae, ex angulis duobus minoribus, quos facit intermedia cum duabus extremis. Sed ut jam notavi, haec definitio non sufficit ad quantitates perfectas seu rationes sive proportiones determinandas; in angulo tamen rectilineo, ubi mensura certa aliunde haberi potest, nihil incommodi ex ea nascitur.

(2) Rectas sibi mutuo esse perpendiculares, ex eo patet, quod

suo loco ostendetur angulos oppositos sibi aequales esse, nam quia (fig. 88) ABC=CBD ex def. anguli recti, et CBD = ABE, quia sunt oppositi, erunt et ABC et ABE aequales, qui cum sibi sint deinceps, erunt recti.

XI. *Obtusus* Angulus est qui recto major est.

XII. *Acutus* vero qui minor est recto.

Itaque Analysis adhibetur obtusi in rectum et acutum illum, quo rectum excedit. Hinc Tabulae Sinuum solos Angulos acutos exhibent.

XIII. *Terminus* est quod alicujus extremum est.

Haec quoque definitio Euclidis ingenio digna non est, cum nulla hic sit notionis Analysis, sed tantum synonymum definito substituatur. Definivimus autem Terminum supra Artic. 4, cum primum ejus mentio fieret.

XIV. *Figura* est quae sub aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur.

Animus Euclidi est, sub figuris comprehendere superficies et corpora, quae undique terminantur, lineas vero non item. Sed definitio nonnihil habet difficultatis; dicet enim aliquis, etiam lineam suis terminis, id est punctis, comprehendi. Responderi potest cum Clavio pro Euclide, includi quidem, sed non comprehendi, nam comprehensionis vocabulo designari terminum ambientem sive in se redeuntem; sed hoc quoque non sufficit, an enim superficies conica truncata (fig. 89) non erit figura, licet termini ejus, nempe Circuli ABC et DEF, non cohaereant? Itaque praestabit *figuram* definire magnitudinem terminatam, latitudine praeditam, postquam scilicet definivimus supra (defin. 2. § 1.) quid sit latitudo; porro etiam solida latitudinem habent, cum ipsa eorum sectio sit latitudine praedita.

XV. *Circulus* est Figura plana, sub una linea comprehensa, quae *Peripheria* appellatur, ad quam ab uno puncto eorum, quae intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectae lineae inter se sunt aequales.

XVI. Hoc vero punctum *Centrum Circuli* appellatur.

(1) Poterat Euclides ut peripheriae, ita et Centri definitionem definitioni circuli inserere, poteratque addi, rectas illas *Radios* dici.

(2) Peripheriam esse unam Lineam, pleonasmus est in definiendo, sufficit enim radios omnes ad terminum figurae esse aequales.

Terminum autem figurae circularis unam esse lineam, consequitur ex uniformitate.

(3) Poterat etiam Circulum definire ad eum modum, quo definit Sphaeram, ut recta in plano moveatur centro immoto, donec in priorem locum redeat, ita circulum describet, et altero extremo ejus peripheriam.

(4) Sed si haec definitio per motum Euclidis adhibeatur, supponitur aliquid tacite, quod assumendum foret vel demonstrandum expresse, Rectam ita moveri posse, ut semper maneat intra idem planum; itaque Euclides maluit definitioni circuli inserere, ut sit figura in plano descripta; in sphaera autem describenda haec difficultas aberat. Praeterea ad generationem hanc peripheriae vel opus est substerni radio planum, vel certe binas rectas aut plures auxiliares per centrum non transeuntes, quas recta centro affixa inter movendum radat, et sufficiunt binae rectae auxiliares inter se angulum facientes, modo radius utrinque sit productus quantum opus.

(5) Datur autem alia generatio peripheriae, quae plano aut succedaneis loco plani rectis non indiget, quam attigimus supra ad definit. 4. § 3. Nempe si magnitudo quaevis moveatur duobus punctis immotis, punctum quodvis motum describet propriam peripheriam. Oportet autem magnitudinem illam non esse rectam, nam recta duobus punctis quiescentibus moveri non potest. De caetero nil refert, sitne linea, superficies, an planum. Ita si linea ABCD (fig. 90), sive plana sive in unum planum non cadens, moveatur punctis A et D quiescentibus, punctum B describet peripheriam B(B)B, et punctum C peripheriam C(C)C, dum scilicet linea mobilis gyrando circa Axem AD transit ex ABCD in A(B)(C)D, atque inde continuato motu (non rediens per priora vestigia) restituitur in ABCD. Itaque si sit Y.A.D constans, seu $Y.A.D \simeq E.A.D$, erit $\overline{Y}$ *peripheria*, et recta per A, D axis, et $\overline{Y}.AD.$ constans. Hinc infra calculo ostendemus, quomodo hac tam Sphaeram quam Circulum exprimendi ratione ex ipso *Calculo situs* consequatur, duarum sphaericarum superficierum intersectionem esse Circulum. *Intersectionem* appellamus mutuam sectionem.

XVII. *Diameter Circuli* est recta per Centrum ducta et ex utraque parte in peripheriam terminata, quae circulum bifariam secat.

(1) Rectam in plano circuli per centrum ductam utrinque in

peripheriam incidere, assumitur hoc loco. Et satis quidem manifestum videtur; cum tamen alia non minus manifesta demonstrentur, intererit ad perfectionem Analyseos, hoc quoque sine demonstratione non relinqui. Assumendum autem erit, rectam quamvis produci posse utrinque; addo autem: in eodem plano, quod fortasse ad postulatum Euclidis addi aut certe demonstrari debuisset, quia passim ab eo tacite assumitur. Sequitur autem ex nostra rectae definitione, defin. 4. § 4, cum ipsa recta nihil aliud sit, quam quaedam sectio plani indefiniti. Unde et patet, rectam produc posse ad distantiam quantamcunque, seu ita ut magnitudo data quantacunque, unum ejus punctum attingens, aliquod ejus punctum attingere non possit. Et sequitur hoc facile ex nostris rectae definitionibus quibuslibet. Hinc cum circulus sit finitus, recta autem produci possit ad distantiam quantamvis, utique partim intra partim extra circulum in plano cadet. Porro sequitur ex natura continuitatis, omne continuum, quod est partim intra partim extra figuram, cadere in ejus terminum. Nam *continui* duae partes quaevis totum aequantes habent aliquid commune, etsi partem communem non habeant. Sint ergo duae partes rectae, una intra circulum, altera extra circulum. Hae habent punctum commune. Id punctum etiam commune est tum circulo, quia est in parte intra circulum cadente, tum parti plani rectam continentis extra circulum jacenti, quia est in parte extra circulum jacente. Quicquid autem duabus plani hujus partibus est commune, id in communi earum sectione est, nempe in Peripheria. Ergo punctum rectae in unam partem productae cadit in peripheriam. Eadem ratiocinatio est, si ab altera parte producatur; itaque bis peripheriae occurrit. Neque enim duo occursus puncta coincidere possunt, alioqui recta utrinque producta se ipsam secaret, cum tamen sectio plani uniformiter progrediatur ad distantiam quamcunque. Atque haec ratiocinatio locum habet non tantum de recta per centrum, sed etiam de quavis recta intra circulum cadente, ut scilicet *Recta intra Circulum cadens, producta utrinque, si opus, circulo bis occurrat.* Itaque locum etiam habebit de ea, quae transit per centrum; atque adeo diameter circuli datur. Datur, inquam, in regione aeternarum veritatum seu possibilitatum, vel quod eodem redit, diametri notio vera est. Haec conclusio generalis enuntiari potest de quavis figura plana, in quam recta cadit, imo de omni plano vel solido terminato, seu de omni figura intra sibi simili, nempe *recta, quae est intra planum terminatum vel*

intra solidum terminatum, utrinque producta, ambitum ejus in duobus punctis secat. Sed de quavis superficie terminata hoc verum non est.

(2) Operae autem pretium erit, hanc demonstrationem *Calculo situs* nonnihil accommodare, ut ei paulatim assuescamus. Planum per peripheriam circuli dividitur in duas partes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, unam X circulum, alteram $\overline{Y}$ intra circulum. Peripheria autem erit $\overline{X \text{ et } Y}$ seu locus omnium punctorum, quae simul sunt X et Y. Recta autem ab uno termino producta sit $\overline{Z}$, ejus una pars, *quae intra*, circulum, est $\overline{Z \text{ et } X}$, quae extra circulum, est $\overline{Z \text{ et } Y}$. Punctum ergo utrique commune (ob naturam continuitatis) est Z et X et Y; ergo est X et Y; ergo est in $\overline{X \text{ et } Y}$ seu in peripheria. Idem est de altera productione.

(3) Sed alius est multo major in definitione Euclidaea defectus, et qui non tam facile suppleri potest, vitium nempe obreptionis, seu pleonasmus obreptitius. Suffecerat ad definitionem diametri circuli, ut recta esse diceretur per centrum transiens, utrinque terminata in peripheriam; itaque pleonasmus est, quod additur, hanc rectam bisecare circulum in duas partes aequales, nam sequitur ex jam dicto. Inest etiam vitium obreptionis, quia hoc demonstrari merebatur, nec assumi debebat tanquam contentum in definitione. Atque hoc etiam agnovit Proclus, et demonstrationem affert, sane non spernendam. Quae si Thaletis Melesii est, ut ipse affirmat, oportet Geometriam (certe artem demonstrandi Geometricam) jam Thaletis aevo non mediocriter provectam fuisse. Sed ipsam demonstrationem magni ob ea quae discemus momenti considerare e re erit.

(4) Sit circuli centrum C (fig. 91), diameter AB, segmenta circuli per diametrum ADBA, AEBA. Ponantur esse inaequalia et segmentum quod dicetur minus, quale ponatur esse ADBA, transferatur in plani partem, in qua est segmentum alterum, constituatque A(D)BA; id autem concipi potest fieri, dum ADBA gyratur circa axem AB, donec cadat in alteram plani partem. Quodsi ergo A(D)BA congruat ipsi AEBA, aequalia erunt segmenta, quod volumus. Sin ADBA, atque adeo et A(D)BA sit minus quam AEBA, oportet aliquod arcus ADB punctum, ut (D), cadere intra AEBA. Nam si tota cadat extra AEBA, ipsum AEBA cadet intra A(D)BA, et ADBA foret majus, contra hyp. Jungatur C(D) et producta perve-

niet ad punctum ipsius arcus AEB, per §. praeced. quod ponatur esse E. Est autem tam CE quam CD radius seu recta ex centro ad peripheriam, ergo sunt aequales inter se, pars toti, quod est absurdum.

(5) In hac demonstratione, pulchra sane, notandum est aliquid desiderari. Nempe sciendum est, tacite supponi nostras rectae definitiones, vel proprietates reciprocas allatas ad defin. 4. § 3 et 4, quae non subintelligi, sed diserte assumi debebant ad demonstrationis perfectionem. Nam ut constet quod gyrari possit ADBA circa immotam rectam AB, assumenda erat haec definitio, vel demonstranda haec proprietas rectae, quam dedimus § 3, quod mota magnitudine ADBA, possit recta AB esse immota. Deinde assumitur (etiamsi omittatur gyratio) plano per rectam AB secto, ei quod est in uno segmento, ut ipsi ADBA, congruum et congruenter ad rectam positum A(D)BA posse constitui in altero segmento, quia recta ita secat planum, ut utrinque se habeat eodem modo, quae est definitio nostra exposita ad def. 4. § 4. Unde cum hinc pateat, gyratione careri posse, at segmentorum congruentia ad rectam perficiendam demonstratione assumti in hac definitione et passim deinde ab Euclide adhibiti careri facile non posse; itaque hanc Rectae definitionem Euclidaeis demonstrationibus perficiendis accommodatissimam censeo.

(5) Etiam calculi situs aliquid hic tentemus. Plani segmentum, in quo ADBA, sit $\overline{X}$, in quo AEBA, sit $\overline{Y}$, AB . $\overline{X} \backsimeq$ AB . $\overline{Y}$. Hinc quia ADBA est in $\overline{X}$, ergo in $\overline{Y}$ poni potest A(D)BA $\backsimeq$ ADBA (thesis a). Si jam A(D)BA $\urcorner$ AEBA; ergo quoddam (D) est in AEBA (ex natura minoris). Jungatur C(D) et (per § 3 hic) producatur in CE, sed C(D) = CD per thes. a, et CD = CE ob def. circuli; ergo C(D) = CE, pars toti. Q. E. Abs.

(6) Idem demonstrabitur paulo aliter et directius et paucioribus assumtis hoc modo: Iisdem quae ante positis, sit portio circuli ADBA, posito AB esse diametrum. Ea existat in $\overline{X}$, parta segmento plani per rectam; quia autem ex natura rectae AB . $\overline{X} \backsimeq$ AB . $\overline{Y}$, potest sumi in X AEBA $\backsimeq$ ADBA (thesis b). Jam CD est constans ex hyp. et CE = CD per thes. b; ergo et CE est constans. Jam omne punctum ambitus totius ADB (+) AEB est D vel E ex construct. Ergo omnis recta ex C ad peripheriam est CD vel CE, ergo omnis recta a C ad peripheriam est constans. Itaque ADBA (+) AEBA est circulus, qui cum secetur a recta AB in partes

ADBA et AEBA, sequitur (per thes. b) a recta per centrum bifariam secari Circulum. Q. E. D.

(7) Caeterum in his supponitur, duas figuras planas congruere, quarum termini congruunt. Et congruentibus terminis totis seu ambitibus ADB (+) BA et AEB (+) BA, congruere ipsa plana ADBA et AEBA. Idem verum est de solido quovis, et ut verbo dicam, de omni figura intus simili. Hae enim solis terminis distingui possunt. Tale autem esse planum, sequitur ex nostra definitione, uti jam supra notavimus def. 7. § 8. Cum enim solidum sit intus uniforme, et planum sit sectio utrinque se habens eodem modo, nihil est in ejus natura, unde intus discrimen oriatur et unus locus ab alio discerni possit, quamdiu ut indefinitum consideratur. Itaque a solis terminis discrimen oriri potest.

(8) Sunt et aliae superficies intus uniformes, nempe sphaerica et cylindrica, et praeter rectam lineae circularis et helicalis cylindrica. Et a Gemino, antiquo Geometra, demonstratum fuisse legi, non dari plures. Porro hae Magnitudines solido demto id habent, ut pars vel parti congruum totum aut reliquas partes *lambere*, seu congruendo super iis moveri possit, quod et in recta et plano verum est. Sed tamen in illis verum non est, quod in recta, solido et plano, ut partes similium terminorum sint inter se similes.

XVIII. *Semicirculus* vero est figura, quae continetur sub diametro et sub ea linea, quae de circuli peripheria aufertur.

Hic Clavius in annotationibus conversam propositionis defin. praeced. art. 3. seqq. demonstratae demonstrare aggreditur. Demonstratum est illic, omnem rectam per centrum bisecare circulum. Hujus conversa est, omnem rectam, bisecantem circulum, transire per centrum seu solam rectam per centrum bisecare circulum, vel rectam non per centrum, quae circulum secat, secare circulum in partes inaequales, eamque esse majorem, in qua est centrum. Utitur autem eodem artificio, quo usum Thaletem ferunt, indigetque eodem supplemento; sed ut demonstret, bina segmenta non esse aequalia, ostendit tantum, ea non esse congrua, quod non sufficit. Praeterea utitur perpendicularis ductu, ut verear ne circulum committat. Nam infra utitur segmentorum circularium inaequalitate ad demonstrandum, duas rectas non comprehendere spatium, quo tamen pronuntiato ad demonstranda, quae de perpendicularibus habet Euclides, eget. Sit DE (fig. 92) recta circulum secans, non transiens per centrum C. Ex alterutro ejus extremo D ducatur per C diameter DB, necesse est punctum E, cum non cadet in B (alioqui duae rectae DB et DE se bis secarent) cadere alibi in peripheriam, adeoque in alterutram semiperipheriam, quae sit DEB, et proinde rectam DE totam cadere in semicirculum DEBD, alioqui si partim in hunc partim in alterum semicirculum caderet, communem eorum terminum DB alicubi in circulo secaret, atque ita iterum eandem rectam DB secaret recta DE bis. Itaque portio per DE abscissa DFED pars est semicirculi DEBD, quia DFE pars est semiperipheriae DEB, et DE cadit in DEBD. Ergo totus ambitus ejus DFED cadit in DEBD, non vicissim; itaque DEBD, et pars ipsius DFED eundem ambitum habent, et plana eundem ambitum seu eosdem terminos habentia coincidunt. Itaque DFED pars est ipsius DEBD, adeoque minor. Posuimus autem in ipsa propositione rectam in circulum cadere, seu eam secare. Alioqui si posuissemus solum, rectam peripheriae occurrere in duobus punctis nec transire per centrum, demonstrandum prius fuisset, quod recta, quae transit per duo puncta peripheriae, cadat intra circulum, quod Euclides demum demonstrat lib. 3. prop. 2, quanquam hoc non indigeat, nisi superpositione et natura angulorum.

XIX. *Rectilineae* figurae sunt quae sub rectis lineis continentur. XX. *Trilaterae* quae sub tribus (quae et *Triangula* appellantur), XXI. *Quadrilaterae* quae sub quatuor, XXII. *multilaterae* quae sub pluribus.

(1) Planae intelliguntur, ut angulos rectilineos non nisi planos supra intellexit. Et hoc in libris prioribus ubique Euclides supponit, cum in libro undecimo demum demonstrare aggrediatur, duas rectas esse in eodem plano, item triangulum esse in eodem plano.

XXIII. XXIV. XXV. XXVI. XXVII. XXVIII. definiuntur *Triangula aequilaterum, isosceles, scalenum, rectangulum, amblygonium, oxygonium.*

XXIX. XXX. XXXI. XXXII. XXXIII. definiuntur figurae quadrilaterae: *Quadratum, Heteromeces, Rhombus, Rhomboeides, Trapezium.*

His definitionibus a 23 ad 33 aliquid annotare operae pretium non est.

XXXIV. *Parallelae rectae* lineae sunt, quae cum in eodem sint plano, ex utraque parte in infinitum productae in neutram sibi mutuo incident.

(1) Haec definitio videtur parallelas magis ex proprietate remotiore, quam natura apertiore describere, et dubitare poterit

aliquis an dentur, seu an non omnes rectae in eodem plano tandem conveniant. Demonstratio autem, quae ostendet tales rectas dari posse, naturam earum aperiet ex aliquo priore, de cujus possibilitate dubitari non possit.

(2) Euclidem haec definitio coëgit assumere Axioma, quod in Clavii editione est 13mum, sed quod Veteres jam fassi sunt demonstratione indigere, nec bene locum inter Axiomata tueri.

(3) *Parallelae* possunt definiri rectae, quae se invicem ubique habent eodem modo. Tales notiones possibilitatem suam secum ferunt, nam cum spatium sit ubique uniforme, et recta non minus, manifestum est, punctum, quem situm ad rectam aliquam habet, eundem posse repetere, atque ita in motu eundem posse servare, atque eo vestigium motus seu lineam, quam describat, semper se eodem modo ad eandem rectam habere. Dupliciter autem punctum in motu existens situm ad rectam servare potest, tum eundem servet ad eadam puncta rectae, ut cum punctum circa axem gyratur, tum etiam cum variat situm ad puncta, sed eodem modo se habet ad nova, adeoque situm ad rectam servat, etsi ad puncta non servet.

(4) Posset parallela ad datam sic determinari. Ex punctis A et B (fig. 93), in recta sumtis, determinetur punctum C, et ex punctis L et M, eodem modo sitis inter se, (posita $AB = LM$) determinetur eodem modo punctum N, puncta C et N eodem modo se habebunt ad rectam indefinitam per A, B; L, M. Cum ut A, B, ita sei habeant in recta et L, M, itaque C et N sunt in parallela ad rectam, et quidem erunt etiam in recta, quia recta determinata, transiens per C et N, eodem modo etiam se ad rectam ubique habeat. Sed eodem modo determinata quaevis alia puncta, quotcunque aliis ut A, B vel L, M assumtis, dabunt puncta in parallelam cadentia, quae quidem omnia cadere in rectam, etiam ex eo intelligi potest, quia ex C et N recta determinatur.

(5) Modi determinandi varii intelligi possunt. Ex. gr. si plani considerationem seponamus, potest concipi circa puncta A et B describi sphaeras, quarum superficies sese secent. Sectio duarum superficierum sphaericarum erit circulus. Hujus centrum potest esse punctum C. Sed si planum adhibeamus, possumus concipere in plano describi circa A et B circulos, quorum intersectio ab uno latere rectae est in puncto C. Eodem modo L et M ab eodem latere dabunt punctum N.

(6) Sed quia elegimus, rectam considerare ut plani sectionem,