in superficiei productione vel resolutione paulo ante indicavimus, multo magis in solido locum habere manifestum est. Denique dimensionem aliquam altiorem solido seu tractum ipsius solidi motu tali descriptum, ut puncta ejus sibi ubique non succedant, reperiri non posse, suo loco demonstrandum est.

(22) Porro tractus ipsi seu loca punctorum quorundam indefinitorum determinantur punctis quibusdam certis, itemque Legibus quibusdam, secundum quas ex paucis illis punctis certis caetera puncta indefinita ordine in considerationem venire, et tractus ipsi generari sive describi possint. Quod antequam exponamus, signa quaedam explicabimus, quibus in sequentibus utendum erit. Primum itaque fieri potest, ut duo vel plura nomina in speciem diversa non sint revera nisi unius rei sive loci, id est puncti vel lineae alteriusve tractus, atque ita *eadem esse* sive *coincidere* dicentur. Ita (fig. 39) si sint duae lineae AB et CD, sintque puncta A et C unum idemque, hoc ita designabimus: *A ∞ C*, id est A et C coincidunt. Hoc maxime usum habebit in designandis punctis aliisque extremis communibus diversorum Tractuum. Idem enim punctum sive extremum suas denominationes habebit, tam secundum unum tractum, quam secundum alterum. Quod si dicatur (fig. 40) ***A.B ∞ C.D***, sensus erit simul esse A ∞ C et B ∞ D, idemque est in pluribus; ab utraque enim enunciationis parte idem ordo est observandus.

(23) Quodsi duo non quidem coincidant, id est non quidem simul eundem locum occupent, possint tamen sibi applicari, et sine ulla in ipsis per se spectatis mutatione facta alterum in alterius locum substitui queat, tunc duo illa dicentur esse *congrua*, ut A.B et C.D in fig. 39; itaque fiet: ***A.B 8 C.D***; item A.B 8 C.D in fig. 40, id est servato situ inter A et B, item servato situ inter C et D, nihilominus C.D applicari poterit ipsi A.B, id est simul applicari poterit C ipsi A et D ipsi B.

(24) Si duo extensa non quidem congrua sint, possint tamen congrua reddi sine ulla mutatione molis sive *quantitatis*, id est retentis omnibus iisdem punctis, facta tantum quadam si opus est transmutatione sive transpositione partium vel punctorum; tunc dicentur esse *aequalia*. Ita in fig. 41 Quadratum ABCD et Triangulum isosceles EFG basin habens EG lateri AB quadrati duplam, aequalia sunt: nam transferatur FHG in EGF, quia EGF 8 FHG, fiet EFG aequ. EHFG; jam EHFG 8 ABCD, ergo EFG aequ. ABCD.

Hinc generalius, si a ɜ b et b ɜ d, erit a + b ⊓ (sive aequ.) c + d; imo amplius: si a 8 c, b 8 f, c 8 g, d 8 h, fiet a + b — c + d ⊓ e + f — g + h; sive si duae fiant summae ex quibusdam partibus uno eodemque modo addendo vel subtrahendo, partesque unius sint congruae partibus alterius eodem modo ad totum constituendum concurrentibus, quaelibet unius summae uni alterius summae sibi ordine respondenti; tunc duae summae quae inde fient, non quidem semper congruae erunt, erunt tamen semper aequales. Atque ita argumentatio a congruis ad aequalia ipsa aequalium definitione constituitur; sunt quidem alias *aequalia*, quorum eadem est magnitudo. Verum ipsa partium congruentium cuidam rei sive mensurae multitudo est magnitudo, ut si sint in fig. 42 duo magnitudinem habentia a et b, et detur res tertia c, quae sit bis a + ter b, patet ejus magnitudinem multitudine partium tum ipsi a tum ipsi b congruentium exprimi, itaque quae congrua reddi possunt nullo addito vel detracto, utique aequalia esse necesse est.

(25) Verum ut rem istam altius repetamus, explicandum est, quid sit pars et totum, quid homogeneum, quid magnitudo, quid ratio. *Pars* nihil aliud est quam requisitum totius diversum (seu ita ut alterum de altero praedicari nequeat) immediatum, in recto cum correquisitis. Ita AB (fig. 43) requisitum est ipsius AC, id est si non esset AB, neque foret AC; diversum quoque est, neque enim AC est AB; alioqui enim rationalis est requisitum hominis, sed quia homo est rationalis, ideo rationalis (qui hominis requisitum est) et homo idem est, etsi enim expressione differant, re tamen conveniunt. Pars immediatum est requisitum, neque enim connexio inter AB et BC pendet a quadam consequentia sive connexione causarum, sed ipsa per se patet, ex hypothesi assumti totius. Est autem in recto cum correquisitis, semper enim convenire debent secundum certum quendam considerandi modum, nam et quae ut Entia tantum, imo et ut cogitabilia spectamus, verbi gratia DEUM, hominem, virtutem, possumus considerare velut partes unius totius ex ipsis compositi. Excluduntur ergo requisita immediata quidem et diversa, ut rationalitas in abstracto, quae requisitum est hominis immediatum diversum; neque enim nec homo est rationalitas, attamen non hic spectatur ut conveniens cum homine, sed ut attributum: alioqui sane negari non potest, etiam ex his duobus: homo et rationalitas, fingi posse unum totum, cujus hae partes. At rationalitas hominis pars non erit, requiritur enim

ad hominem in obliquo, seu non convenienti quadam ratione cum aliis, quae ad hominem praeterea requiruntur. Sed haec sunt magis metaphysica nec nisi in eorum gratiam adducuntur, qui notionum intima intelligere desiderant. Simplicius ita definiemus: *Partes* sunt quae requiruntur ad unum quatenus cum eo conveniunt.

(26) *Numerus* est, cujus ad unitatem relatio est quae inter partem et totum vel totum et partem, quare fractos etiam et surdos comprehendo.

(27) *Magnitudo* Rei distincte cognita est numerus (vel compositum ex numeris) partium rei cuidam certae (quae pro mensura assumitur) congruentium. Ut si sciam esse lineam, quae bis aequetur lateri, ter aequetur diagonali cujusdam quadrati certi mihique satis cogniti, ut ad ipsum cum lubet recurrere possim, ejus lineae magnitudo mihi cognita esse dicetur, quae erit binarius partium lateri congruentium, ternarius partium diagonali congruentium. Diversis autem licet assumtis mensuris, quibus eadem res diversimode exprimitur, tamen semper eadem prodit magnitudo, quia ipsis mensuris iterum resolutis ad idem denique semper devenitur, adeoque mensurae diversae illum ipsum numerum eundem resolutione prodeuntem jam involvunt. Quemadmodum unus idemque est numerus tres quartae et sex octavae, si quartam iterum in duas partes resolvas. Atque talis est Magnitudo distincte cognita. Alioquin *Magnitudo* est attributum rei, per quod cognosci potest, utrum aliqua res proposita sit illius pars, vel aliud homogeneum ad rem pertinens et quidem tale ut maneat, licet partium habitudo inter se mutetur. Vel etiam Magnitudo est attributum, quod iisdem manentibus homogeneis ad rem pertinentibus aut substitutis congruis, manet idem. Homogenea autem ad rem aliquam pertinentia intelligo non partes solum, sed et extrema atque minima sive puncta Nam puncti repetitione quadam continua sive motu fit linea. Saepe autem res ita transmutantur, ut ne unica quidem pars figurae posterioris, prioris parti congruat. Aliter Magnitudinem infra definio, ut sit id, quo duae res similes discerni possunt, sive quod in rebus sola comperceptione discernitur. Sed omnia haec eodem recidunt.

(28) *Ratio ipsius A ad B* nihil aliud est quam numerus, quo exprimitur magnitudo ipsius A, si magnitudo ipsius B ponatur esse unitas. Unde patet, Magnitudinem a ratione differre ut numerum concretum a numero abstracto; est enim magnitudo numerus rerum, nempe partium, ratio vero est numerus unitatum.

Patet etiam rei magnitudinem eandem manere, quacunque assumta mensura per quam eam exprimere volumus; rationem vero aliam atque aliam fieri pro alia atque alia mensura assumta. Patet etiam (ex definitione divisionis) si numerus magnitudinem exprimens ipsius A et alius numerus magnitudinem exprimens ipsius B (modo utrobique eadem mensura seu unitas adhibita sit) dividatur, provenire numerum qui est ratio unius ad alterum.

(29) *Aequalia* sunt quorum eadem est magnitudo, seu quae nullo amisso vel accepto congrua reddi possunt. *Minus* dicitur quod alterius parti aequale est, id vero quod partem habet alteri aequalem, dicitur *Majus.* Hinc pars minor toto, quia parti ipsius, nempe sibi, aequalis est. Signis autem his utemur:

$a \sqcap b$ a aequ. b

$a \ulcorner b$ a maj. quam b

$a \urcorner b$ a min. quam b

Si pars unius alteri toti aequalis est, reliquae partis in majore magnitudo dicitur *differentia.* Magnitudo autem totius est *summa* magnitudinum partium, vel aliorum partibus ejus aequalium.

(30) Si duo sint homogenea (sive si in uno partes assumi possint utcunque partibus alterius aequales, et idem fieri semper possit et in residuis) neque differentia ulla sit inter ipsa, id est si neque a sit majus quam b, neque b majus quam a, necesse est esse aequalia. Transmutentur enim ut congruant quoad licet, utique aut in uno eorum supererit aliquid, aut congruent, adeoque erunt aequalia. Itaque in his consequentia haec valebit:

$$a \text{ non } \ulcorner b. \quad a \text{ non } \urcorner b. \quad \text{Ergo } a \sqcap b.$$

(31) *Similia* sunt quae singula per se considerata discerni non possunt, velut duo triangula aequilatera (in fig. 44), nullum enim attributum, nullam proprietatem in uno possumus invenire, quam non etiam possimus reperire in altero; et unum ex ipsis appellando a, alterum b, *similitudinem* ita notabimus: $a \sim b$. Si tamen simul percipiantur, statim discrimen apparet, unum alio esse majus. Idem fieri potest, etsi non simul percipiantur, modo aliquod velut medium assumatur sive mensura quae primum applicetur uni, aut aliquo in ipso, notatoque quomodo prius vel pars ejus cum mensura vel ejus parte congruat, postea eadem mensura etiam applicetur alteri. Itaque dicere soleo, *similia* non discerni nisi per comperceptionem. At, inquies, ego etsi successive videam duo Triangula aequilatera inaequalia, ea nihilominus probe discerno.

Sed sciendum est', me hoc loco loqui de intelligentia, ut nimirum mens aliquid notare possit in uno, quod non procedat in altero, non de sensu et imaginatione. Ratio autem, cur oculi duas res similes, sed inaequales discernant, manifesta est; nam supersunt nobis rerum prius perceptarum imagines, quae rei nove perceptae imaginibus applicatae discrimen ipsa comperceptione harum duarum imaginum ostendunt. Et ipse fundus oculi, cujus partem majorem minoremque occupat imago, mensurae cujusdam officium facit. Denique alias res semper simul percipere solemus, quas etiam cum prioribus percepimus, unde rem novissime perceptam ad eas referendo, ut priorem ad easdem retulimus, discrimen non difficulter notamus. Si vero fingeremus, DEUM omnia in nobis ac circa nos in aliquo cubiculo apparentia proportione eadem servata minuere, omnia eodem modo apparerent neque a nobis prior status a posteriore posset discerni, nisi sphaera rerum proportionaliter imminutarum, cubiculo scilicet nostro egrederemur; tunc enim comperceptione illa cum rebus non imminutis oblata discrimen appareret. Hinc manifestum est etiam, *Magnitudinem* esse illud ipsum quod in rebus distingui potest sola comperceptione, id est applicatione vel immediata, sive congruentia actuali sive coincidentia, vel mediata, nempe interventu mensurae, quae nunc uni nunc alteri applicatur, unde sufficit res esse congruas, id est actu congruere posse.

(32) Ex his autem intelligi potest, similia et aequalia simul esse congrua. Et quia similitudinem hoc signo notare placet: $\sim$ nempe $a \sim b$, id est a est simile ipsi b, vid. fig. **44**, hinc consequentia erit talis:

$$a \sim b \text{ et } a \sqcap b, \text{ ergo } a \between b.$$

(33) Sunt et aliae consequentiae:

$$a \between b, \text{ ergo } a \sqcap b.$$
$$a \between b, \text{ ergo } a \sim b.$$
$$a \infty b, \text{ ergo } a \between b$$
$$\ldots\ldots\ldots\ a \sqcap b$$
$$\ldots\ldots\ldots\ a \sim b$$

(34) Nam quae reapse coincidunt, utique congrua sunt; quae congrua sunt, utique similia, item aequalia sunt. Hinc videmus, tres esse modos ac velut gradus res extensione praeditas neque alias qualitatibus diversas discernendi. Maximus ille est, ut sint dissimiles; ita enim singulae per se spectatae ipsa proprietatum quae in ipsis observantur diversitate facile discernuntur: ita triangulum isosceles facile discernitur a scaleno, etsi non simul videantur. Si quis enim me jubeat videre, an triangulum quod offertur sit isosceles an scalenum, nihil forinsecus assumere necesse habeo, sed sola latera ejus comparo inter se. At vero si jubear ex duobus Triangulis aequilateris eligere majus, collatione Triangulorum cum aliis opus habeo, sive comperceptione, ut explicui, neque notam aliquam discriminis in singulis spectabilem assignare possum. Si vero duae res non tantum sint similes, sed et aequales, id est si sint congruae, etiam simul perceptas non discernere possum, nisi loco, id est nisi adhuc aliud assumam extra ipsas, et observem ipsas diversum habere situm ad tertium assumtum. Denique si ambo simul in eodem sint loco, jam nihil habere me amplius quo discriminentur. Atque haec est vera cogitationum quam de his rebus habemus Analysis, cujus ignoratio fecit, ut characteristica geometriae vera hactenus non sit constituta. Ex his denique intelligitur, ut magnitudo aestimatur, dum res congruere aut ad congruitatem reduci posse intelliguntur, ita rationem aestimari similitudine, seu dum res ad similitudinem reducuntur; tunc enim omnia fieri necesse est proportionalia.

(35) Ex his explicationibus coincidentium, congruorum, aequalium ac similium consequentiae quaedam duci possunt. Nempe quae sunt eidem aequalia, similia, congrua, coincidentia, sunt etiam inter se, ideoque

$$\begin{array}{lll} a \infty b \text{ et} & b \infty c, \text{ ergo} & a \infty c \\ a \between b & b \between c & a \between c \\ a \sim b & b \sim c & a \sim c \\ a \sqcap b & b \sqcap c & a \sqcap c \end{array}$$

Non tamen consequentia haec valet:

$$a \text{ non} \infty\, b \text{ et } b \text{ non} \infty\, c, \text{ ergo } a \text{ non} \infty\, c,$$

prorsus ut in Logica ex puris negativis nihil sequitur.

(36) Si coincidentibus sive iisdem ascribas coincidentia, prodeunt coincidentia, ut

$$a \infty c \text{ et } b \infty d, \text{ ergo } a . b \infty c . d.$$

Sed in congruis hoc non sequitur, exempli causa si A.B.C.D sint puncta, semper verum est esse $A \between C$, et $B \between D$; quodlibet enim punctum cuilibet congruum est, sed non ideo dici potest $A.B \between C.D$, id est simul congruere posse A ipsi C et B ipsi D, servato nimirum tum situ A.B, tum situ C.D. Quanquam viceversa ex positis A . B 8 C . D sequatur A 8 C et B 8 D ex significatione characterum nostrorum, idque etiam verum est, licet A.B.C.D non sint puncta, sed magnitudines. At si congrua sibi ascribantur, inde oriuntur aequalia, ita:

a + b — c ⊓ d + e — f, posito esse a 8 d, et b 8 e, et c 8 f, quia congrua semper aequalia sunt.

(37) Verum si congrua congruis similiter addantur adimanturque, fient congrua. Cujus rei ratio est, quia si congrua congruis similiter addantur, similia similibus similiter addentur (quia congrua sunt similia), ergo fient similia, fiunt autem etiam aequalia (nam congrua congruis addita faciunt aequalia); jam similia et aequalia sunt congrua, ergo *si congrua congruis similiter addantur, fient congrua.* Idem est, si adimantur.

(38) An autem similiter aliqua tractentur, intelligi potest ex characteristicis nostris modoque unumquodque describendi aut determinandi, in quo si sigillatim nullum discrimen notari potest, utique semper omnia similia prodire necesse est. Illud quoque notandum est, *si qua sint similia secundum unum determinandi* (distincte cognoscendi, describendi) *modum, eadem fore similia etiam secundum alium modum.* Nam unusquisque determinandi modus totam rei naturam involvit.

(39) Axiomata autem illa, quibus Euclides utitur, si aequalibus addas aequalia, fient aequalia, aliaque id genus, facile ex eo demonstrantur, quod aequalium eadem est magnitudo, id est quod substitui sibi possunt salva magnitudine. Nam sint *a ⊓ c et b ⊓ d, fiet a + b ⊓ c + d,* nam si scribatur a + b et in locum ipsorum a, b substituantur aequalia c, d, ea substitutio fiet salva magnitudine, ac proinde eorum quae prodibunt + c + d eadem erit magnitudo quae priorum + a + b. Sed haec ad calculum Algebraicum potius pertinent, satisque explicata habentur, itaque regulis magnitudinum ac rationum atque proportionum non immorabor; sed ea maxime explicare nitar, quae situm involvunt.

(40) Redeo nunc ad ea quae §. 22 interrupta sunt, et primum de punctis, inde de tractibus agam. Omne punctum puncto congruum adeoque aequale (si ita loqui licet), et simile est:

A 8 B, A ⊓ B, A ∾ B.

(41) *A . B 8 C . D* significat, simul esse A 8 C et B 8 D, manente situ A . B et C . D (fig. 40).

(42) *A . B 8 B . A* est Propositio cujus est sensus, positis

duobus punctis A . B ac situm eundem inter se retinentibus, posse loca eorum permutari, seu poni A in locum B, et contra (fig. 45). Quod ex eo manifestum est, quia relatio situs quam habent ad ambo eodem modo pertinet, nec nisi externis assumtis discrimen ullum notari potest facta permutatione.

(44) *Si A . B 8 D . E, et B . C 8 E . F, et A . C 8 D . F, erit A . B . C 8 D . E . F* (fig. 47). Nam nihil aliud significat A . B 8 D . E, quam simul esse A 8 D et B 8 E, situ A . B et D . E servato; eodem modo ex B . C 8 E . F sequitur B 8 E et C 8 F, situ B . C et E . F servato; et ex A . C 8 D . E sequitur A 8 D et C 8 F, situ A . C et D . E servato. Habemus ergo simul A . B . C 8 D . E . F, servato situ A . B et B . C et A . C, itemque servato situ D . E et E . F et D . F, cum alias ex solis A . B 8 D . E et B . C 8 E . F sequatur quidem simul A 8 D et B 8 E et C 8 F, sed servatis tantum sitibus A . B et B . C, item D . E et E . F, non vero exprimetur servari et situs A . C et D . F, nisi addatur A . C 8 D . F.

Hinc jam principium habemus ratiocinationem ad plura etiam puncta producendi.

(43) *A . B 8 X . Y* est Propositio significans, datis duobus punctis A et B posse reperiri alia duo X et Y, quae eundem inter se situm habeant quem illa duo, sive ut haec simul illis duobus servato situ utrobique congruere possint. Quod ex eo demonstratur, quia L . M moveri possunt servato situ inter se, eaque respondere poterunt primum ipsis A : B, deinde ipsis X . Y, nempe $_3L$. $_3M$ 8 $_6L$. $_6M$; sit A ∞ $_3L$, B ∞ $_3M$, X ∞ $_6L$, Y ∞ $_6M$, fiet A . B 8 X . Y. Nihil autem prohibet esse X ∞ A: unde fiet *A . B 8 A . Y*; potest etiam esse X ∞ C datae, unde A . B 8 C . Y.

(45) *Si sit A . B 8 B . C 8 A . C, erit A . B . C 8 B . A . C,* vel alio ordine quocunque (fig. 48). Nam si congruentibus A . B et (B) . (A) ascribas congruentia C et (C) congruenti modo, quia A . C 8 (B) . (C) et B . C 8 (A) . (C), fient congruentia A . B . C 8 (B) (A) (C) sive A . B . C 8 B . A . C per praecedentem; parentheses enim tantum confusionis ex repetitione vitandae causa ascripsi. Hinc patet, quid sit congruenti modo ascribi, cum scilicet omnes combinationes ab una parte enuntiationis sunt congruentes omnibus ab altera parte. Unde patet, *si A . B 8 B . C 8 A . C, fore A . B . C 8 A . C . B 8 B . C . A 8 B . A . C 8 C . A . B 8 C . B . A.*

(46) *Si A . B . C 8 A . C . B, sequitur (tantum) A . B 8 A . C* (fig. 49) [sive triangulum esse isosceles], nam sequitur:

A.B.C, A.B 8 A.C, B.C 8 C.B, A.C 8 A.B
A.C.B

ex quibus B.C 8 C.B per se patet; reliqua duo A.B. 8 A.C et A.C 8 A.B eodem recidunt; hoc unum ergo inde duximus A.B 8 A.C.

(47) *Si A.B.C 8 B.C.A, sequitur A.B 8 B.C 8 A.C,* [seu triangulum esse aequilaterum]. Nam fit A.B 8 B.C, B.C 8 C.A.

(48) *Si A.B.C 8 A.C.B et B.C.A 8 B.A.C, fiet A.B 8 B.C 8 A.C.* Nam ob A.B.C 8 A.C.B fit A.B 8 A.C, eodemque modo ob B.C.A 8 B.A.C fit B.C 8 B.A sive A.B 8 B.C.

[Itaque quandocunque in transposito punctorum ordine unum ex tribus eundem in utroque ordine locum servat, situsque posterior priori congruus est, inde tantum probari potest Triangulum esse isosceles, sed si nullum ex punctis servat locum, et nihilominus situs posterior priori congruit, Triangulum est aequilaterum].

(49) *Si sit A.B 8 B.C 8 C.D 8 D.A et A.C 8 B.D, erit A.B.C.D 8 B.C.D.A 8 C.D.A.B 8 D.A.B.C 8 D.C.B.A 8 A.D.C.B 8 B.A.D.C 8 C.B.A.D* (fig. 50).

Hoc ex praecedentibus facile demonstratur, multaque alia hujusmodi, quae sufficiet demonstrari, cum ipsis indigebimus. Nunc satis habebimus principium dedisse inveniendi haec solo calculo, sine inspectione figurae.

(50) Si tria puncta A.B.C (fig. 51) dicantur esse *sita in directum*, tunc posito A.B.C 8 A.B.Y, erit C ∞ Y. Haec Propositio est definitio punctorum, quae in directum sita dicuntur. Nimirum inspiciatur fig. 51, ubi C aliquem situm habet ad A et B; sumatur jam aliquod punctum Y eundem ad A.B situm habens; id si diversum ab ipso C, assumi potest puncta A.B.C non sunt in directum sita, si vero necessario cum ipso C coincidit, in directum sita dicentur.

(51) Datis punctis duobus semper assumi potest tertium, quod cum illis sit in directum, sive si A.B.Y 8 A.B.X, erit Y ∞ X.

Nam datis punctis duobus A.B semper assumi potest tertium Y, quod servato ad ipsa situ moveri potest ipsis immotis. Sed via, quam motu suo describit, potest esse semper minor ac minor, prout aliter atque aliter assumitur punctum Y, adeoque tandem sumi poterit tale, ut spatium motus evanescat, et tunc tria puncta erunt in directum. Melius forte sic enuntiabimus: A.B.$_3$Y 8 A.B.$_6$Y, erit $_3$Y ∞ $_6$Y, id est aliquod assignari posse Y, quod servato situ ad A.B moveri seu locum mutare nequeat. Aliter ista videor demonstrare posse hoc modo: Sit aliquod extensum, quod moveatur servato punctorum ejus situ inter se et duobus in eo sumtis punctis immotis. Nam si quis id neget moveri posse, eo ipso fatetur, puncta ejus servato ad puncta duo sumta situ moveri nequire, et adeo cum eo sita esse in directum per definitionem. Sed nulla ratio est, cur puncta illa A.B immota durante eodem motu sumi possint haec sola, et non alia etiam, sive nulla ratio est, cur puncta extensi, quod his duobus immotis movetur, servent situm ad haec duo solum immota, et non etiam ad alia, nam situs, quem ipsa A.B inter se obtinent, nihil ad rem facit; itaque potuisset sumi aliquod Y loco ipsius B alium obtinens situm ad A quam ipsum B obtinet. Verum quaecunque sumi possunt ut immota, ea manente eodem extensi motu sunt immota. Et quia sumtis duobus A.B immotis motus extensi est determinatus, seu determinatum est, quaenam puncta ejus moveantur aut non moveantur; hinc duobus punctis sumtis immotis, determinata sunt alia plura, quae servato ad ipsa situ moveri non possunt, seu quae cum ipsis jacent in directum.

(52) *Si sit E.A.B 8 F.A.B, et E.B.C 8 F.B.C, erit E.A.C 8 F.A.C,* vid. fig. 52.

Nam per E.A.B 8 F.A.B erit E.A 8 F.A,
et per E.B.C 8 F.B.C erit E.C 8 F.C.
Jam si sit E.A 8 F.A et E.C 8 F.C, erit

E.A C 8 F.A.C per prop. 44. (est enim
E.A 8 F.A. et E.C 8 F.C et A.C 8 A.C);

ergo si sit E.A.B 8 F.A.B et E.B.C 8 F.B.C, erit E.A.C 8 F.A.C. Quod erat demon.

(53) *Hinc etiam erit E.A.B.C 8 F.A.B.C, posito E.A.B 8 F.A.B et E.B.C 8 F.B.C.* Nam etiam E.A.C 8 F.A.C per praeced.; habemus ergo: E.A.B 8 F.A.B

et E.A.C ♉ F.A.C et E.B.C ♉ F.B.C et A.B.C ♉ A.B.C, id est habemus omnia, quae ex hoc: E.A.B.C ♉ F.A.B.C duci possunt; ergo habemus etiam E.A.B.C ♉ F.A.B.C [est egregius modus regrediendi, nimirum ex consequentibus omnibus totam naturam antecedentis exhaurientibus ad antecedens.]

(54) *Si sit E.A ♉ F.A, E.B ♉ F.B, E.C ♉ F.C, erit* $E.\overline{\overset{\frown}{A}.\overset{\frown}{B}.C}$ ♉ $F.\overline{\overset{\frown}{A}.\overset{\frown}{B}.C}$; nam quae supersunt combinationes utrinque comparandae A.B et B.C et A.C, utrobique coincidunt.

(55) *A.B.X ♉ A.B.Y* seu datis duobus punctis A.B, inveniri possunt duo alia X.Y, ita ut X et Y eodem modo se habeant ad A.B, vid. fig. 53. Potest enim reperiri A.X ♉ A.Y, et B.Z ♉ B.V per prop. 43. Ponatur Z ∞ X (hoc enim fieri potest per prop. 43, seu Z potest esse data seu jam assumta X, quia A.B ♉ A.V) itemque ponatur A.X ♉ B.X. (nam et in A.X ♉ A.Y potest X esse data, quia datur A.C ♉ A.Y per prop. 43), erit V.B (♉ B.Z ♉ B.X ♉ A.X) ♉ A.Y; ergo V.B.X ♉ Y.A.X ♉ X.B.V, in quo omnia hactenus determinata continentur. Ergo potest poni V ∞ Y, nihil enim in hactenus determinatis obstat, fiet

Y.B.X ♉ Y.A.X; ergo Y.B ♉ Y.A, B.X ♉ A.X.

Rursus Y.B.X ♉ X.B.Y, ergo Y.B ♉ X.B.

Ergo fit: Y.B ♉ X.B ♉ Y.A ♉ A.X; ergo A.B.X ♉ A.B.Y.

(56) Si tria puncta E.F.G sumta distributive eodem modo se habeant ad tria puncta A.B.C sumta collective, erunt tria priora in eodem arcu circuli, tria posteriora in eadem recta seu jacebunt in directum.

Hanc propositionem annotare placuit; ratio patebit ex sequentibus.

(57) Si sit E.A.B.C ♉ F.A.B.C ♉ G.A.B.C, et sit E non ∞ F, E non ∞ G, F non ∞ G, dicentur *puncta quotcunque A.B.C. sita esse in directum* seu esse in eadem recta (fig. 54).

(58) Omisso licet puncto C, si sit: E.A.B ♉ F.A.B ♉ G.A.B, erunt puncta E.F.G in *eodem plano.*

(59) Iisdem positis erunt puncta E.F.G in eodem *arcu circuli.*

(60) Inter duo quaevis congrua assumi possunt infinita alia congrua, nam unum in locum alterius servata forma sua transire non posset, nisi per congrua.

(61) Hinc a quolibet puncto ad quodlibet punctum duci potest linea. Nam punctum puncto congruum est.

(62) Hinc et a quolibet puncto per quodlibet punctum duci potest linea.

(63) Linea duci potest, quae transeat per puncta quotcunque data.

(64) Eodem modo ostendetur, per lineas quotcunque datas transire posse superficiem. Nam si congruae sunt, patet lineam generantem successive in omnibus esse posse. Si congruae non sunt, patet lineam generantem, durante motu, ita augeri, minui et transformari posse, ut dum illuc venit, congrua fiat.

(65) Unumquodque in spatio positum potest servata forma sua, seu cuilibet in spatio existenti infinita alia congrua assignari possunt.

(66) Unumquodque servata forma sua moveri potest infinitis modis.

(67) Unumquodque ita moveri potest servata forma sua, ut incidat in punctum datum. Generalius: unumquodque servata forma sua ita moveri potest, ut incidat in aliud, cui congruum in ipso designari potest. Nam congruum unum transferri potest in locum alterius, nec quicquam prohibet id, in quo congruum illud est quod transferri debet, simul cum ipso transferri, quia ratio separationis nulla est: et quod uni congruorum aptari potest, poterit et alteri congruorum similiter aptari.

(68) A ♉ B, id est assumto puncto quodlibet aliud congruum est.

(69) A.B ♉ B.A, ut supra.

(70) A.B ♉ X.Y; eodem modo A.B.C ♉ X.Y.Z, et A.B.C.D ♉ X.Y.Z.Ω, et ita porro. Hoc enim nihil aliud est, quam quotcunque puncta posse moveri servato situ inter se; situm autem eorum inter se servari intelligi potest, si ponatur esse extrema lineae cujusdam rigidae qualiscunque.

(71) A.B ♉ C.X, A.B.C ♉ D.X.Y etc. Hoc enim nihil aliud est, quam quotcunque puncta, ut A.B.C, posse moveri servato situ inter se, ita ut unum ex ipsis A incidat in punctum

aliquod datum D, reliquis duobus B.C in alia quaecunque X.Y incidentibus.

(72) Si A.B.C non 8 A.B.Y, nisi C ∞ Y, tunc puncta A.B.C dicuntur *sita in directum* (vid. fig. 51) seu *C erit situm in directum cum ipsis A.B*, si unicum sit quod eum situm ad A.B habeat. An autem talis punctorum situs reperiatur, postea inquirendum erit. Linea autem, cujus omnia puncta sita sunt in directum, dicetur *recta*. Sit enim A.B.$_zY$ 8 A.B.$_zX$, atque ideo $_zY$ ∞ $_zX$, erit $\overline{zY}$ (∞ $\overline{zX}$) *Linea recta*, id est, si punctum Y ita moveatur, ut situm semper ad puncta A.B servet, qui ipsi uni competere possit, sive determinatum minimeque varium ac vagum, describi ab eo lineam rectam.

(73) Si A.B.C 8 A.B.D, erit 8 A.B.$_zY$, vid. fig. 55. Nam erit C ∞ $_3Y$ et D ∞ $_6Y$, nempe C et D erunt loca ipsius Y moti ita ut servet situm eundem ad A.B, inter quae necessario erunt indefinita, nempe designanda per $_zY$. Linea autem $\overline{zY}$ vocetur *circularis*. Notandum autem, hanc Lineae circularis descriptionem ea priorem esse, quam dedit Euclides; Euclidea enim indiget recta et plano. A nostra procedit, qualiscunque assumatur rigida linea, modo in ea duo sumantur puncta, quibus immotis ipsa linea vel saltem aliquod ejus punctum moveatur; hoc enim punctum ad puncta duo assumta eundem servabit situm, cum omnia sint in linea rigida. Id ergo punctum describet lineam circularem per hanc definitionem nostram. Si quis vero neget, in Linea rigida tale punctum inveniri posse, quod datis duobus immotis moveatur, necesse erit per definitionem praecedentem prop. 72. omnia Lineae rigidae puncta in directum esse sita, sive necesse erit dari Lineam rectam. Alterutrum ergo hoc modo admittere necesse est, lineam rectam possibilem esse, vel circularem. Altera autem admissa, alteram postea inde ducemus. Hic obiter notandum, quia, ut suo loco patebit, per tria quaelibet data puncta transire potest arcus circularis, hinc tribus datis punctis inveniri unum posse, quod ad tria illa eodem se habeat modo, nempe X.C 8 X.D 8 X.E, idque saepius fieri posse seu diversa reperiri posse X pro iisdem C.D.E, omniaque X in unam rectam cadere, quae transeat per circuli centrum, sitque ad planum ejus ad angulos rectos.

(74) Sit Linea quaelibet $\overline{zY}$, vid. fig. 55, in ea poterunt sumi quotcunque puncta $_3Y$.$_6Y$.$_9Y$.$_{12}Y$ etc. ita ut sit

$_3Y$.$_6Y$ 8 $_6Y$.$_9Y$ 8 $_9Y$.$_{12}Y$ etc. Nam generaliter, si qua sit linea satis parva, cujus unum extremum sit in alia linea, poterit prior ita moveri, extremo ejus duabus lineis communi immoto, ut altero quoque extremo posteriori lineae occurrat, itaque hoc motu partem unam abscindet, jamque novo puncto invento immoto manente rursus aliam, et ita porro. Sed jam observo, ne id quidem necesse esse, et sufficere Unam lineam eidem lineae suis extremis applicari saepius quomodocunque, ita ut plures ejusdem lineae partes assignentur, quarum extrema aliorum extremis sint congrua, ut in fig. 56 linea rigida LM suis extremis L et M ipsi lineae $\overline{zY}$ aliquoties in $_1Y$.$_2Y$ et $_3Y$.$_4Y$ et $_5Y$.$_6Y$, quae coincident ipsis $_1L$.$_1M$ et $_2L$.$_2M$ et $_3L$.$_3M$, nam si semel L.M ipsi $\overline{zY}$ applicari possit, infinitis modis applicari potest, si posteriores applicationibus quantumvis parum distent. Jam ex L et M educantur duae lineae congruae eodem modo se habentes, ea quae ex L educitur ad L, quo illa quae ex M educitur ad M, quae sibi occurrant in X, sitque $_1LX$ $_1M$ 8 $_2LX$ $_2M$, et ita porro, id est quae ex $_1L$ et $_1M$ educuntur, eousque producantur ut non ante sibi occurrant, quam ubi ex $_2L$, $_2M$ eodem modo eductae sibi occurrunt. Unde patet, puncta X eodem modo se habere ad omnia Y assignata, et si quidem linea talis est, ut ejusmodi punctum habeat, quod ad omnia ejus puncta eodem sit modo, id hoc modo inveniri. Si autem circularis sit linea, ut hoc loco, sufficit punctum aliquod ad tria lineae circularis puncta se eodem modo habens inveniri, id enim eodem modo se habebit ad alia omnia. Cujus rei ratio est, quia ex tribus punctis datis C.D.E, vid. fig. 55, posito esse C.D 8 D.E, methodo paulo ante dicta ad fig. 56, punctum aliquod certum determinari, ac proinde aliis tribus punctis quibuslibet in circulo assumtis, prioribus tribus congruentibus, eodem modo lineas concurrentes congruas ducendo, necesse esse deveniri semper ad idem X. Hinc cum ex tribus datis punctis D.C.E modo diverso inveniri possint puncta X, prout lineae congruentes aliter atque aliter ducuntur, seu citius tardiusque convergunt, patet etiam alia utique inveniri posse puncta X, eaque omnia in unam lineam cadere.

(75) Sed eadem sine circulo simplicius consequi possumus. Sint tria puncta A.B.C (fig. 57), ita ut sit A.B 8 B.C 8 A.C, inveniantur que puncta X, ita ut sit A.X 8 B.X 8 C.X, idque quoties libet, sive quod idem est, moveatur punctum X, ita ut

quivis ejus locus, ut ${}_{z}X$, eodem modo se habeat ad A.B.C, id est ut sit A.${}_{3}$X 8 B.${}_{3}$X 8 C.${}_{3}$X, tunc puncta ${}_{z}X$ erunt in directum posita, sive $\overline{Z}$X erit linea recta. Atque ita apparet, quid velit Euclides, cum ait, Lineam rectam ex aequo sua interjacere puncta, id est non subsultare in ullam partem, seu non aliter ad punctum A quam B vel C durante motu se habere. Hinc autem modus quoque habetur puncta X rectae $\overline{Z}$X inveniendi. Nimirum si ex A linea educatur quaecunque eodem modo se habens ad B et C, itemque alia per B priori congruens et congruenter posita, id est, ut punctum hujus puncto illius respondens eodem modo se habeat ad B.A.C, ut punctum illius ad A.B.C, eaeque lineae producantur, donec sibi occurrant, occurrent sibi necessario in puncto X, quod se habet eodem modo ad A.B.C. Et si per punctum C etiam talis linea ducta fuisset congrua congruenterque prioribus, ea ipsis occurrisset in puncto eodem X. Hinc autem quotvis ejusmodi puncta inveniri possunt adeoque et Linea recta describi poterit per puncta.

(76) Resumamus aliqua: A puncto quolibet ad quodlibet ducta intelligi potest linea, eaque rigida.

(77) A.B significat situm ipsorum A et B inter se, id est tractum aliquem rigidum per A et B, quem tractum nobis sufficit esse lineam. Ita A.B.C significat tractum alium rigidum per A.B.C.

(78) Quicquid in spatio ponitur, id moveri potest, sive punctum sit sive linea, sive alius tractus, sive cuilibet in extenso assignari potest aliud congruum. Hinc A8X, A.B8X.Y, A.B.C8X.Y.Z, vel A.B.C8$\omega\overline{\text{X.Y.Z}}$.

(79) Datis duobus diversis in extenso poni potest unum quiescere, alterum moveri.

(80) Si aliquod eorum, quae sunt in tractu rigido, moventur, ipse tractus rigidus movetur.

(81) Omnis tractus ita moveri potest, ut punctum ejus datum incidat in aliud datum, A.B.C 8 D.X.Y.

(82) Omnis tractus moveri potest uno ejus puncto manente immoto, A.B.C8A.X.Y.

(83) *Recta* est tractus qui moveri non potest, duobus punctis in eo quiescentibus, sive si quidam tractus moveatur duobus punctis manentibus immotis, si alia praeterea in eo puncta ponantur manere quiescentia, omnia ea puncta dicentur in directum sita, sive cadere in tractum, qui dicitur recta, seu si A.B.C 8 A.B.Y (fig. 58), necesse est esse C ∞ Y, hoc est si punctum aliquod reperiatur C

situm in directum cum punctis A.B, non potest tractus A.B.C (vel A.C.B) ita moveri manentibus A.B immotis, ut C transferatur in Y, atque ita congruat tractus A.B.Y priori A.B.C, sive quod idem est, non potest praeter punctum C aliud adhuc reperiri Y, quod ad puncta fixa A.B eundem quem ipsum C situm habeat, sed necesse est, si tale quod Y assumatur, ipsum ipsi C coincidere seu esse Y ∞ C. Unde dici potest, punctum C sui ad puncta A.B situs esse exemplum unicum. Et punctum, quod ita moveatur, ut ad duo puncta fixa situm servet in sua specie unicum, movebitur in recta. Nempe si sit A.B.Y 8 A.B.X, sitque ideo Y ∞ X, erit $\overline{\omega}$X (∞ $\overline{\omega}$Y) linea recta. An autem dentur hujusmodi puncta in directum sita, et an tractum componant, et utrum tractus ille linea sit, non sumendum, sed demonstrandum est. Via autem puncti ita moti utique *linea recta* erit, quae quidem si per omnia puncta hujusmodi transit, utique locus omnium punctorum duobus punctis in directum sumtorum, non alius tractus quam linea erit.

(84) Si duobus in tractu A.C.B punctis A.B manentibus immotis moveatur ipse tractus, linea, quam punctum ejus motum C describet, dicetur *circularis*. An autem possit tractus aliquis moveri duobus punctis manentibus immotis, etiam non sumendum, sed demonstratione definiendum est. A.C.B 8 A.Y.B (fig. 59), dicetur $\overline{\omega}$Y linea *circularis*, et si sint quotcunque puncta C.D.E.F, sitque A.B.C 8 A.B.D 8 A.B.E 8 A.B.F, dicentur esse in una eademque circulari. Haec definitio lineae circularis non praesupponit dari rectam et planum, quod facit Euclidis definitio.

(85) Locus omnium punctorum, quae eodem modo se habent ad A, quemadmodum ad B, appellabitur *planum*. Sive si sit A.Y 8 B.Y, erit $\overline{Y}$ *planum*.

(86) Hinc si sit A.C.B 8 A.Y.B, sitque A.C 8 C.B (adeoque et A.Y 8 B.Y), erit Linea $\overline{\omega\, Y}$ circularis in plano. An autem omnis circularis sit in plano, postea definiendum est.

(87) Si sint A.B 8 B.C 8 A.C, sitque A.Y8B.Y8C.Y, erit $\overline{\omega\, Y}$ Linea recta.

(88) Si sit A.Y 8 A.(Y), erit $\overline{Y}$ superficies *sphaerica*.

[8 significat congruitatem, ∞ coincidentiam. Cum dico A.B 8 A.Y, possem quidem dicere distantiam AB aequari distantiae AY, sed quia postea cum tria vel plura adhibentur, ut A.B.C 8 A.B.Y, non hoc tantum volumus triangulum ABC triangulo ABY aequari, sed praeterea simile esse, id est congruere, ideo signo ♉ potius utor.]

(89) Si sit Y ♉ (Y), erit Locus omnium Y seu $\overline{Y}$ extensum absolutum, sive *Spatium*. Nam locus omnium punctorum inter se congruentium est locus omnium punctorum in universum. Omnia enim puncta congrua sunt.

(90) Idem est si sit Y ♉ A; nam (ex characterum significatione) si Y ♉ A, erit (Y) ♉ A, ergo Y ♉ (Y). Nimirum locus omnium punctorum Y dato puncto A congruorum utique est etiam spatium ipsum interminatum, omnia enim puncta cuilibet dato congruunt.

(91) Proximum est: A.Y ♉ A.(Y), locus omnium Y seu $\overline{Y}$ dicatur *Sphaerica*, quae est locus omnium punctorum ejusdem ad datum punctum situs existentium. Datum autem punctum dicitur *Centrum*.

(92) Idem est si sit A.B ♉ A.Y. Nam ideo erit et A.B ♉ A.(Y) ac proinde A.Y ♉ A.Y, ubi nota, ipsum B esse ex numerorum Y seu esse ${}_6Y$. Si enim Y omnia puncta comprehendit, quae eum habent situm ad A, quem B habet, utique ipsum B comprehendet, quod eum utique situm ad A habet quem habet. Sphaerica est locus omnium punctorum dati ad punctum datum situs (id est dati puncti situi congrui situs) existentium.

(93) Si sit A.Y ♉ B.Y, locus omnium Y seu $\overline{Y}$ dicatur *planum*, sive locus punctorum ut Y, quorum unumquodque ad unum ex duobus datis punctis A eodem modo situm est, quemadmodum ad alterum B, est *planum*. Notandum est, Loci expressionem in aliam converti non posse, in qua simul sint Y et (Y).

(94) Si sit A.B ♉ C.Y, erit $\overline{Y}$ *sphaerica*. Nam erit A.B ♉ C.Y. ♉ C.${}_dY$; sit ${}_dY \infty$ D, fiet C.D ♉ C.Y, adeoque locus erit sphaerica per prop. 91.

(95) Y et (Y) significant quodcunque punctum loci alicujus, et quodcunque aliud praeter prius ${}_zY$ significat quodlibet punctum loci seu omnia loci puncta distributive. Idem etiam significat Y absolute positum. ${}_dY$ significat unum aliquod peculiare punctum loci. $\overline{Y}$ significat omnia puncta loci collective, seu totum locum. Si locus sit linea, hoc ita significo $\overline{\omega Y}$; si sit superficies, ita: $\overline{\omega\psi Y}$; si solidum, ita: $\overline{\omega\psi\varphi Y}$.

(96) Si sit A.B.C ♉ A.B.Y (sive si sit A.B.Y ♉ A.B.(Y)), tunc locus omnium Y seu $\overline{Y}$ dicetur *circularis*, id est si plurium

punctorum idem sit situs (vel datus) ad duo data puncta, Locus erit *circularis*.

(97) Si sit A.Y ♉ B.Y ♉ C.Y, tunc Locus omnium Y seu $\overline{Y}$ dicetur *recta*.

(98) Si sit A.B.C.Y ♉ A.B.D.Y, erit $\overline{Y}$ *Planum*, seu si C.D duo puncta eodem modo sint ad tria A.B.Y, erunt haec tria in eodem plano, et si duobus ex his datis A.B quaeratur tertium Y, locus omnium Y erit planum. Ubi patet, ipsa A.B sub Y comprehendi. Demonstrandum est, hunc locum cum altero, qui est prop. 93, coincidere. Hoc ita fiet: C.Y. ♉ D.Y(1) locus est ad planum per prop. 91. Sint ${}_3Y \infty$ A et ${}_7Y \infty$ B, erit C.A ♉ D.A(2) et C.B ♉ D.B(3) Ergo fiet A.B.C.Y ♉ A.B.D.Y.*) Nam 1 patet per se, et 2 per (3), et 3 per (1), et 4 per (2), et 5 per se, et 6 per se.

(99) Si sit A.Y ♉ B.Y ♉ C.Y, locus $\overline{Y}$ erit *punctum*, sive Y satisfaciens non erit nisi unicum, sive erit Y ∞ (Y). Haec propositio demonstranda est.

(100) Habemus ergo loca ad Punctum, ad Rectam, ad Circularem, ad Planum, ad Sphaericam, solis congruentiis mira simplicitate expressa, sed haec partim vera, partim possibilia esse, et cum aliis definitionibus coincidere nostras demonstrandum est.

(101) Si tractus sive extensum quodcunque moveatur uno puncto existente immoto, aliud quodcunque ejus punctum movebitur in Sphaerica. Pono autem ipsum extensum esse rigidum, seu partes situm eundem servare. Habebimus ergo modum inveniendi Sphaericae puncta quotcunque. Potest etiam A.B ♉ A.Y esse data, si tractus transeat per duo puncta A.B. Tractum autem aliquem (sive linea sit sive superficies sive solidum) per duo data puncta ducere, et tractum movere uno puncto immoto, utique in potestate est.

(102) Si per duo data puncta transeant duo tractus congrui

---

*) Leibniz hat A und B, B und C, C und Y, ebenso A und B, B und D, D und Y durch Bogen verbunden und bezeichnet die ersten Verbindungen durch 1, die zweiten durch 2, die dritten durch 3. Ferner hat er A und C, B und Y, ebenso A und D, B und Y durch Bogen verbunden und bezeichnet die ersten Verbindungen durch 4, die letztern durch 5. Endlich hat er noch A und Y auf beiden Seiten durch einen Bogen verbuuden, und nennt die Verbindung 6. Auf auf diese Zahlen bezieht er sich im Folgenden.

congruenter, id est ita ut puncta respondentia in duobus tractibus situs habeant ad duo puncta data, unumquodque ad suum, congruos, moveanturque aut etiam si opus sit crescant congruenter donec sibi occurrant, loca, in quibus puncta eorum respondentia sibi occurrent, erunt puncta plani illius, quod ad duo puncta data eodem modo se in quolibet puncto suo habere definivimus. Posse autem congruenter moveri, posse congrue ac congruenter produci, donec occurrant, postulo.

(103) Si jam Sphaericam Sphaerica aut plano secemus, habebimus circularem; si planum plano, habebimus rectam; si rectam recta, punctum. Ostendendum autem est has sectiones fieri posse, et punctorum Sphaericae et Sphaericae, vel plano et plano, vel plano et Sphaericae communium esse tractum. Si sphaerica planum vel sphaericam tangat, locus etiam est punctum, cum scilicet circularis fit minima seu evanescit.

Beilage.

Data basi, altitudine et angulo ad verticem, invenire triangulum.

Hoc problema esse potest specimen discriminis inter constructiones per figurae considerationem et constructiones per Algebram inventas.

Sit data basis AB (fig. 60), altitudo CF aequalis datae BD, angulusque ad verticem etiam magnitudine datus, nempe aequalis dato E.

Problema per Algebram ita quaeremus: Ex puncto C quaesito demissa intelligatur perpendicularis CF, ipsi AB basi productae si opus, occurrens in F. Similiter ex aliquo extremo baseos A ducatur AG perpendicularis ad latus oppositum BC, si opus productum.

Ipsas	AB,	BD seu CF,	BC,	AC,	BG,	CG,	AG,	BF
vocabimus	b	d	m	n	x	z	v	y

Denique quia ob angulum C datum ratio $\underset{n}{AC}$ ad $\underset{z}{CG}$ data est, hanc ponamus esse eandem quae q ad r; erit z aequ. $\frac{r}{q}n$ (1)

eritque $\underset{n}{AC}$ ad $\underset{v}{AG}$ ut q ad $\sqrt{q^2-r^2}$, sive erit v aequ. $\frac{q}{\sqrt{q^2-r^2}}\,n$ (2).

Porro ob triangula similia BFC, BGA erit $\underset{b}{AB}$ ad $\underset{v}{AG}$ ut $\underset{m}{CB}$ ad $\underset{d}{CF}$, ergo erit v aequ. $\frac{bd}{m}$ (3) et duos valores aequando fiet mn aequ. $\frac{\sqrt{q^2-r^2}}{q}\,bd$ (3).

Porro x + z aequ. m (4), quanquam signa variari possint, prout G cadit intra B et C vel extra in alterutrum latus, quod tamen, ut mox patebit, nullam producit in calculo varietatem. Ob Triangula rectangula erit $\frac{b^2d^2}{m^2}$ aequ. b^2-x^2 (5) et $\frac{b^2d^2}{m^2}$ aequ. n^2-z^2 (6); ergo aequando duos valores fiet b^2-n^2 aequ. x^2-z^2 (7), sive per (4) fiet b^2-n^2 aequ. $\overline{x-z}\,m$ (8), vel $x-z$ aequ. $\frac{b^2-n^2}{m}$ (9). Unde aequationes (4) et (9) sibi invicem addendo, et a se invicem subtrahendo fiet

2x aequ. $+m+\frac{b^2-n^2}{m}$ (10) et 2z aequ. $+m+\frac{-b^2+n^2}{m}$ (11)

sive z aequ. $\frac{m^2-b^2+n^2}{2m}$, quem valorem aequando valori ex aequ. (1)

fiet $m^2+n^2-\frac{2r}{q}mn$ aequ. b^2 (13), unde ob aequ. (3) fiet

$$m^2+n^2-\frac{2r}{q}mn+\frac{2r}{q}mn\pm 2mn \text{ aequ. } b^2\mp\frac{2r\sqrt{q^2-r^2}}{q^2}\,bd$$
$$\pm\frac{2\sqrt{q^2-r^2}}{q}\,bd \quad (14)$$

sive $m+n$ aequ. $\mp\sqrt{b^2\frac{+2r+2q\sqrt{q^2-r^2}}{q^2}bd}$ (15)

et $m-n$ aequ. $\mp\sqrt{b^2+\frac{\overline{2r-2q}\sqrt{q^2-r^2}}{q^2}bd}$ (16)

et quia nihil refert, quaenam sit longitudo ipsius q, modo ratio r ad q sit data, faciamus q aeq. $\sqrt{bd}$ (17) et fiet

$$2m \text{ aequ. } \mp\sqrt{b^2+\overline{2r+2q}\sqrt{q^2-r^2}}\ (\mp)\ \sqrt{b^2+\overline{2r-2q}\sqrt{q^2-r^2}} \quad (18)$$

$$2n \text{ aequ. } \mp\sqrt{b^2+\overline{2r+2q}\sqrt{q^2-r^2}}\ (\pm)\ \sqrt{b^2+\overline{2r-2q}\sqrt{q^2-r^2}} \quad (19)$$

et scribendo per compendium
m aequ. $\mp$ ☉ ($\mp$) ☽ (20) et n aequ. $\mp$ ☉ ($\pm$) ☽ (21)
faciendoque + ☉ + ☽ aequ. ♀ (22) itemque + ☉ — ☽ aequ. ☿ (23), patet fore

vel m aequ. + ☉ et n aequ. + ☽
vel m aequ. + ☽ et n aequ. + ☉
vel m aequ. — ☉ et n aequ. — ☽
vel m aequ. — ☽ et n aequ. — ☉

adeoque aequatio quatuor quidem habebit radices, sed tamen non nisi unicum erit triangulum, quod satisfaciet quaestioni, permutatis tantum laterum significationibus itemque sumendo ab utraque baseos parte. Quatuor itaque Triangula satisfacientia quaestioni super eadem basi positione data collocari possunt, omnia congrua inter se AB_1C, AB_2C, AB_3C, AB_4C (fig. 61). Quod clarius patet rudi exemplo in numeris; sit b basis aequ. 14, altitudo d aequ. $6\frac{1}{2}$, erit q seu $\sqrt{bd}$ aequ. circiter $9\frac{1}{3}$; et r sit $2\frac{1}{2}$, fiet $\sqrt{q^2-r^2}$ aequ. 9, $2r+2q$ aequ. $23\frac{2}{3}$, $\overline{2r+2q}\sqrt{q^2-r^2}$ sit 213, $\sqrt{\overline{2r+2q}\sqrt{q^2-r^2}}$ aequ. $14\frac{1}{2}$ seu $\sqrt{213}$, $2r-2q$ aequ. $-13\frac{2}{3}$, $\overline{2r-2q}\sqrt{q^2-r^2}$ aequ. -123, $\sqrt{\overline{2r-2q}\sqrt{q^2-r^2}}$ aequ. 11 seu $\sqrt{123}$, m + n seu $\sqrt{b^2+\overline{2r+2q}\sqrt{q^2-r^2}}$ aequ. $\mp 20\frac{1}{2}$,

m — n seu $\sqrt{b^2+\overline{2r-2q}\sqrt{q^2-r^2}}$ aequ. ($\mp$) $8\frac{1}{2}$. Hinc jam si

$\mp$	sit +	et	($\mp$)	sit +,	erit m aequ.	$14\frac{1}{2}$	n aequ.	6
$\mp$	+		($\mp$)	—,	m	6	n	$14\frac{1}{2}$
$\mp$	—		($\mp$)	—,	m	$-14\frac{1}{2}$	n	-6
$\mp$	—		($\mp$)	+,	m	-6	n	$-14\frac{1}{2}$

Constructio ipsa ita absolvetur. Basi AB (fig. 62) producta in D, ut sit BD aequalis altitudini, describatur semicirculus circa ABD, cujus peripheriae ex B erecta ad angulos rectos BQ occurrat in Q, erit BQ, q aequ. $\sqrt{bd}$. Ponatur jam angulo ad verticem datus esse aequalis BQR, et ex B in QR demittatur perpendicularis BR, erit RQ, r. Sit recta (fig. 63), in qua hoc ordine designentur puncta P, H, γ, E, W, sitque PH aequ. HW aequ. q + r et HE aequ. q — r. Circa diametrum PE describatur semicircumferentia, cui ex H normaliter erecta occurrat $H\alpha$, quae erit $\sqrt{q^2-r^2}$ seu media proportionalis inter PH (seu q + r) et HE (seu q — r). Porro recta WP producatur ultra P usque ad β, ut fiat $P\beta$ aequ. $H\alpha$ seu $\sqrt{q^2-r^2}$. Et cum ex con-

structione sint PH aequ. q + r, et HE aequ. q — r, erit PE aequ. 2q; unde detrahatur $E\gamma$ aequ. 2r, restabit $P\gamma$ aequ. 2q — 2r. Jam rectis $\beta\gamma$ et βW velut diametris imponantur ad easdem partes semicircumferentiae $\beta\Theta\gamma$, $\beta\delta W$, quae secabunt rectam $P\Theta\delta$ ex P normaliter eductam in punctis Θ et δ, erit $P\Theta$ med. prop. inter βP seu $\sqrt{q^2-r^2}$, et $P\gamma$ seu $2q-2r$, id est erit $P\Theta$ aequ. $\sqrt{\overline{2q-2r}\sqrt{q^2-r^2}}$, et similiter erit $P\delta$ media prop. inter βP seu $\sqrt{q^2-r^2}$ et PW seu $2q+2r$, id est erit $P\delta$ aequ. $\sqrt{\overline{2q+2r}\sqrt{q^2-r^2}}$. Jam ipsa $P\delta$ transferatur in $B\lambda$ sumtam in BQ, si opus producta jungaturque $A\lambda$, quae erit $\sqrt{b^2+\overline{2q+2r}\sqrt{q^2-r^2}}$ aequ. m + n, cujus punctum medium sit π. Rursus basi AB velut diametro imponatur semicircumferentia $A\mu B$, et ejus arcui $A\mu$ subtendatur recta $A\mu$ aequalis ipsi $P\Theta$; jungatur $B\mu$, quae erit $\sqrt{b^2+\overline{2r-2q}\sqrt{q^2-r^2}}$ aequ. m — n. Hujus parti dimidiae sumantur in recta $A\lambda$ aequales $\pi\omega$ versus A et $\pi\xi$ versus λ, eritque $A\xi$ aequ. m et $A\omega$ aequ. n, vel contra, habenturque latera Trianguli quaesita m seu BC et n seu AC. Quod faciendum erat.

Atque haec est constructio, qualem hic Algebra recte ordine tractata offert, satis adhuc commoda prae aliis, quae ex Algebra plerumque prodire solent. Sed ipsa Geometria, quae figuris contemplandis immoratur, primo intuitu exhibet constructionem, qua simplicior ne quidem aptari potest et cui prior comparari indigna est. Nimirum Angulo dato E (fig. 64) subtendatur basis data AB et per tria puncta A, E, B describatur arcus circuli; ex AB educatur normaliter BD ad partes E, quae sit altitudo Trianguli quaesiti data, et per D ducatur parallela ipsi BA secans arcum in punctis C et (C), eruntque Triangula ACB, A(C)B quaesita.

Facile autem praevidere possumus, problema, si per Algebram tractetur, necessario assurgere debere ad gradum quartum; sunt enim quatuor Triangula (etsi omnia congrua inter se), duo ab uno latere rectae AB totidemque ab altero, quae satisfaciunt. At si quis quaereret ipsam C(C), ei nasceretur tantum aequatio quadratica. Denique si quis quaerat RC radium circuli, is difficulter quidem ad aequationem perveniet, sed aequatio non nisi unicam habebit radicem pro omnibus quatuor Triangulis, adeoque hoc modo fiet omnium simplicissima, sed haec omnia tamen ad constructionem nostram recta non ducunt.

II.

Analysin Geometricam propriam eique connexum *calculum situs*, hic attentabimus nonnihil speciminis gratia, ne forte pereat cogitatio, quae aliis quod sciam in mentem non venit, et usus longe alios ab iis dabit, quos Algebra praestat. Sciendum enim est diversae considerationis esse magnitudinem et situm. Magnitudo datur etiam in illis quae situm non habent, ut numerus, proportio, tempus, velocitas, ubicunque scilicet partes existunt, quarum numero seu repetitione aestimatio fieri potest. Itaque eadem est doctrina magnitudinis et numerorum, Algebraque ipsa vel si mavis Logistica, tractans de magnitudine in universum, revera agit de numero incerto vel saltem innominato. Sed situs magnitudini vel partium multitudini formam quandam superaddit, ut in numeris figuratis. Hinc patet. Algebram continere Analysin proprie et per se ad Arithmeticam pertinentem, etsi ad Geometriam et situm transferatur, quatenus linearum et figurarum magnitudines tractantur. Sed tunc necesse est, Algebram multa supponere propria Geometriae vel situs, quae et ipsa resolvi debebant. Analysis igitur nostra resolutionem illam effectui dat nihil amplius assumens aut supponens nec tam magnitudini, quam ipsi per se situi accommodata. Nunc autem ad explicandam rem situs non nisi *congruentia* utemur, sepositis in alium locum *similitudine* et *motu*.

(1) *Congrua* sunt quae sibi substitui possunt in eodem loco, ut ABC et CDA (fig. 65), quod sic designo $ABC \simeq CDA$. Nam $\sim$ mihi est signum similitudinis, et $=$ aequalitatis, unde congruentiae signum compono, quia quae simul et similia et aequalia sunt, ea congrua sunt.

(2) *Eodem modo se habere* hic censentur vel *congruenter*, ea quae in congruis sibi respondent. Exempli causa $AB.ABC \simeq CD.CDA$, nempe AB est ad ABC, ut CD ad CDA; ita et $AB.AC \simeq CD.CA$ et $A.BC \simeq C.DA$, id est punctum A eodem modo se habet ad rectam BC, ut punctum C ad DA. Neque enim hic tantum de ratione aut proportione agitur, sed de relatione quacunque.

(3) *Axioma*: Si determinantia sint congrua, talia erunt etiam determinata, posito scilicet eodem determinandi modo. Exempli gratia si $A.B.C \simeq D.E.F$, etiam circumferentia circuli per A.B.C

congruet circumferentiae circuli per D.E.F, quia datis tribus punctis circumferentia circuli est determinata. Et in universum in calculo congruentiarum substitui possunt determinata pro determinantibus sufficientibus, prorsus ut in vulgari calculo aequalia aequalibus substituuntur. Vid. infra § 26. § 30. § 32.

(4) Ut autem calculus melius intelligatur, notandum est, cum dicitur $A.B.C \simeq D.E.F$, idem esse ac si simul diceretur $A.B \simeq D.E$ et $B.C \simeq E.F$ et $A.C \simeq D.F$, ita ut haec ex illo fieri possint *divellendo*, et illud ex his *conjungendo*. Vid. infra § 26. 27. § 29. § 30. § 31. § 32.

(5) *Terminus communis* est locus qui inest duobus locis, ita ut pars eorum non sit. Sic punctum E est locus, qui inest rectis AE, CE, pars autem est neutrius. Itaque terminus earum communis esse dicetur.

(6) *Sectio* est duarum partium totum constituentium nec partem communem habentium terminus communis totus. Ita AC est terminus communis totus triangulorum ABC, CDA constituentium totum ABCD nec habentium partem communem.

(7) Hoc ita calculo exprimemus, per quem Geometria ad Logicam refertur. Punctum omne in proposito loco existens communi nota vel litera designetur (exempli gratia) X, et ipse locus designetur per $\overline{X}$, lineam super litera ducendo. Si quaevis loci puncta sint Y et Z, loca erunt $\overline{Y}$ vel $\overline{Z}$. Sit ergo totum $\overline{X}$, partes constituentes sint $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$, et sectio sit $\overline{V}$, formari poterunt hae propositiones: Omne Y est X, omne Z est X, quia $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$ *insunt* ipsi $\overline{X}$. Sed et quod non est Y nec Z, id non est X, posito $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$ esse *partes constituentes* seu exhaurientes totum $\overline{X}$. Porro omne V est Y, et omne V est Z, quia $\overline{V}$ est ipsis $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$ *commune*, seu utrique inest. Denique quod est Y et Z simul, id etiam est V, quia $\overline{V}$ est *sectio* seu terminus communis totus, scilicet qui continet quicquid utrique commune est, partem enim (seu aliquid praeter terminum) non habent communem. Hinc omnes Logicae subalternationes, conversiones, oppositiones et consequentiae hic locum interdum cum fructu habent, cum alias a realibus proscriptae fuerint visae, hominum vitio, non propria culpa.

(8) *Coincident* loca $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, si omne X sit Y, et omne Y sit X. Hoc ita designo: $\overline{X} \approxeq Y$.

(9) *Punctum* est locus, in quo nullus alius locus assumi

potest, itaque si in puncto ⊙ assumatur locus ☽, coincidet ☽ ipsi ⊙, et vicissim si ☽ insit in ⊙ et ex hoc solo concludatur coincidere ⊙ et ☽, erit ⊙ punctum.

Spatium absolutum est contrarium puncto; nam in spatio omnis alius locus assumi potest, ut in puncto nullus, ut ita punctum sit simplicissimum in situ, et velut minimum, spatium vero sit diffusissimum et velut maximum.

(10) *Corpus* (mathematicum scilicet) seu *solidum* est locus, in quo plus est quam terminus. Atque hoc scilicet volumus, cum solido tribuimus profunditatem. Contra quicquid in superficie aut linea est, terminus intelligi potest, et commune esse alicui cum alio partem communem cum ipso non habente. Analogia hic etiam est inter punctum et solidum, quod quicquid puncto inest, punctum est; contra cui solidum inest, id solidum est. Item, punctum non potest cuiquam inesse ut pars; at solidum nulli aliter inesse potest quam ut pars.

(11) *Planum* est sectio solidi utrinque eodem modo se habens ad ea, quae solidi terminos non attingunt, seu utrinque eodem modo se habens ad ea, quae fiunt in una parte ut in alia. Si pomum plano secas, duorum segmentorum extrema, quibus cohaerebant, distingui invicem non possunt.

(12) Itaque si solidum interminatum sit, absolute verum est, planum secans utrinque eodem se modo habere. Sin terminatum sit solidum, sufficit terminos in rationes non venire. Et utrinque eodem modo facta etiam ad sectionem se eodem modo habebunt.

(13) *Recta* est sectio plani utrinque eodem modo se habens ad ea, quae terminos plani non attingunt.*)

(14) Sit planum interminatum AA (fig. 66), ejusque sectio BB utrinque se habens eodem modo, erit BB recta interminata.

(15) Sed et si planum sit terminatum CC (fig. 67), quaecunque ejus figura sit, si tamen tegamus terminos ut non appareant, vel rationem eorum nullam habeamus, reperiemus rectam

---

*) Hierbei macht Leibniz die folgende Bemerkung: quid si quis dubitet an planum ita secari possit? an praestat ergo rectam formare sectione duorum planorum?

secantem DD utrinque se eodem modo habere, eaque erit terminata.

(16) Curva vero diversimode se habet utrinque, cum ab uno latere sit concava, ab alio convexa.

Quae sequentur, nunc quidem omnia in plano intelligantur.*)

(17) Si sit recta (fig. 68), in qua puncta A et B, et extra eam punctum C ab uno latere, tunc oportet dari posse aliud D ab altero latere, quod eodem modo se habeat ad A et B, quo C se ad ea habet. Nam alioqui cum puncta haec sint in recta ex hypothesi, unum latus non ita ut alterum ad rectam se haberet, contra rectae definitionem. Dato igitur C.A.B inveniri potest D, ut sit $C.A.B \simeq D.A.B$.

(18) Itaque si detur punctum X suae ad duo puncta A.B relationis unicum, id non poterit esse ab alterutro latere rectae per A.B; alioqui contra hypothesin daretur aliud ei geminum, per praecedentem. Hinc necesse est ut cadat in ipsam rectam, ubi gemina alibi in unum coëunt, cum recta sit utriusque lateris terminus communis.**)

(19) Recta igitur (terminata scilicet) est locus omnium punctorum suae ad duo in ipsa puncta relationis unicorum. Sit $X.A.B \simeq Z.A.B$, atque ideo X coincidat ipsi Z, erit $\overline{X}$ recta (interminata) per A.B.***)

---

*) Necessarium videtur, plani proprietatem aliquam ratiocinationem ingredi, qualis, quod congruae sunt duae figurae planae eorundem terminorum, seu quod intus uniforme. Randbemerkung von Leibniz.

**) Leibniz hat bemerkt: Demonstranda adhuc conversa, nempe omne punctum in recta esse suae relationis ad duo in ea puncta unicum.

Rursus omne punctum in recta per A.B est suae ad duo illa puncta relationis unicum. Id punctum sit X; si non est unicum, ergo dabitur Ω ad A.B ut X ad A.B; quia X in recta per A.B ex hyp., ergo et Ω; erit ergo aliquis in recta linea ordo inter quatuor puncta $A.B.X.\Omega$, ergo non $\simeq A.B.X$ et $A.B.\Omega$. Supponitur locum esse *lineam*, in (recta?) linea non est omnium punctorum ordo. Ergo dantur in ea duo puncta eodem modo se habentia ad duo puncta in ipsa, itaque locus ad duo determinatus est linea.

***) Generaliter omne punctum in linea non in se redeunte est suae ad duo in ea sumta puncta relationis unicum. Bemerkung von Leibniz.