est, eam sub ipsis non comprehendi, adeoque nullam habere quadratricem, scilicet Algebraicam. Eadem methodo invenire possum, quam habeat quadratricem, si non Algebraicam, saltem transcendentem, hoc est Circuli aut Hyperbolae aut alterius figurae quadraturam supponentem, ut scilicet saltem dimensiones reliquas ad has simpliciores reducamus. Multa hujusmodi habeo, quibus Geometria in immensum ultra terminos a Vieta et Cartesio positos promovetur. Nam Veteres nolebant uti lineis altiorum graduum, et solutiones, quae earum ope fiebant, Mechanicas. Cartesius id reprehendit et omnes curvas in Geometriam recipit, quarum natura aequatione aliqua Algebraica seu certi alicujus gradus exprimi possit. Recte quidem; sed in eo peccavit non minus quam Veteres, quod alias infinitas, quae tamen etiam accurate describi possunt, ex Geometria exclusit et Mechanicas vocavit, quia scilicet eas ad aequationes revocare et secundum suas regulas tractare non poterat. Verum sciendum est, istas ipsas quoque, ut Cycloidem, Logarithmicam, aliasque id genus, quae maximos habent usus, posse calculo et aequationibus etiam finitis exprimi, at non Algebraicis seu certi gradus, sed gradus indefiniti sive transcendentis, et ita eodem modo posse calculo subjici ac reliquas, licet ille calculus sit alterius naturae, quam qui vulgo usurpatur. Hujusmodi cogitationum mearum, quas alibi non observavi, participem feci Amicum ingeniosissimum, qui etiam eas multis de suo inventis auxit et suo tempore praeclara dabit; idem calculum inveniendi quadratrices algebraicas supra dicta methodo aggressus aliquot theoremata dedit. Unum tamen cogit me monere amor veritatis, hanc ipsam methodum meam quaerendi quadratrices, insignes quidem usus habere, sed non sufficere ad inveniendas quadraturas quascunque, neque ex ea probari posse impossibilitatem Quadraturae Circuli aut Hyperbolae. Fieri enim potest, ut aliqua certa portio quadrantis circuli vel etiam totus quadrans ABDGA quadrari possit, licet non detur quadratura indefinita et generalis cujuslibet portionis datae secundum unam aliquam legem communem seu calculum algebraicum generalem, qui exprimat relationem inter spatium AEGA et rectang. AEF; unde nec dari poterit semper aequatio quaedam algebraica exprimens relationem inter AE et EF, abscissam et ordinatam quadratrices AFC; ac proinde quadratrix non erit Algebraica seu certi gradus, sed transcendens. Et quidem circulum esse incapacem quadraturae indefinitae facile multis

modis demonstrari potest, sed nulla hactenus extat demonstratio, a paralogismo libera, quae ostendat impossibilitatem specialis quadraturae circuli totius. Placet autem ascribere exemplum figurae, ubi succedit quadratura specialis sine generali. Sit in quadrato AEBZ (fig. 27) trilineum orthogonium AENMA; jam secentur latera quadrati opposita AE, ZB in punctis G, R, curva vero in puncto M per rectas GR, reliquis quadrati lateribus AZ, EB parallelas. Abscissa BR appelletur v, et ordinata RM appelletur y, et latus quadrati h, et aequatio naturam curvae exprimens sit $y^4 - 6hhyy + 4yyvv + h^4 = 0$. GM appelletur x, et AG appelletur z, fiet $y = h - x$ et $v = h - z$, quos valores substituendo in aequatione praecedenti fiet: $h^4 - 4h^3x + 6hhxx - 4hx^3 + x^4 - 6h^4 + 12h^3x - 6hhxx + 4h^4 - 8h^3z + 4hhzz - 8h^3x + 16hhxz - 8hxzz + 4hhxx - 8hxxz + 4xxzz + h^4 = 0$, seu destructis destruendis: $4hhzz - 8hxzz + 4xxzz - 8h^3z + 16hhxz - 8hxxz + 4hhxx - 4hx^3 + x^4 = 0$, quam aequationem dividendo per $hh - 2hx + xx$ habebitur: $4zz - 8hz + \frac{4hh - 4hx + xx \text{ multiplic. in } xx}{hh - 2hx + xx} = 0$. Itaque si figura nostra est quadrabilis methodo superdicta, deberet haec aequatio secundum libi proposita conferri posse cum ista:

$$0 = \left\{\begin{array}{l} bzz + caz + eaa \\ \quad + 2dxz + 2fax + \\ \qquad + 4gxx \end{array}\right. \frac{dde + ccg + bff - cdf - 4beg \text{ mltpl. in } aaxx}{\begin{array}{l} + 4beaa + 4bfax + 4bgxx \\ - ccaa - 2cdax - ddxx. \end{array}}$$

Sed manifestum est, collationem non procedere, si vel solus numerator fractionis utrobique existens comparetur, deberet enim $4hh - 4hx + xx$ coincidere cum aa, in $dde + ccg + bff - cdf - 4beg$, indeterminatum cum determinato: ut taceam, ex reliquis comparationibus literas d, e, f, g fieri aequales nihilo: unde in aequatione quaesita ad curvam quadratricem, quae est

$$\left.\begin{array}{r} byy + cay + eaa \\ + dxy + fax \\ + gxx \end{array}\right\} = 0$$

restaret tantum $byy + cay = 0$, quae est aequivocatio non ad lineam, sed ad punctum. Itaque linea curva Quadratrix haberi hoc modo non potest. Et tamen aliunde scimus, trilineum propositum esse quadrabile: itaque ista methodus, licet maximi sit momenti, tamen ad omnes quadraturas inveniendas non sufficit, sed opus est alias adhuc artes adhiberi, quas quidem alias exponam; res enim omnino in potestate est.

Additio

ad Schedam de Dimensionibus Figurarum inveniendis. *)

Cum eximiae eruditionis Mathematicus, Joh. Christophorus Sturmius, in Actis nuperi mensis Martii publicaverit methodum, qua dimensiones figurarum ab Euclide, Archimede aliisque datae directius et compendiosius, quam vulgo fieri solet, demonstrantur, reducendo scilicet ad series infinitas continua abscissarum seu partium axis bisectione et parallelogrammorum semper aliorum atque aliorum (pro altitudine partes axis, pro basi ordinatas habentium) circumscriptione, ac de ea re meam nominatim aliorumque Geometrarum sententiam desideraverit; officii mei putavi, quid sentiam paucis expromere, etsi serius fortasse quam facturus eram, si illum Actorum locum maturius animadvertissem. Et quidem non possum non agnoscere methodum hanc demonstrandi probam esse et laudandam. Sentio autem et hanc et alias hactenus adhibitas omnes deduci posse ex generali quodam meo dimentiendorum curvilineorum principio, *quod figura curvilinea censenda sit aequipollere Polygono infinitorum laterum;* unde sequitur, quicquid de tali Polygono demonstrari potest, sive ita ut nullus habeatur ad numerum laterum respectus, sive ita ut tanto magis verificetur, quanto major sumitur laterum numerus, ita ut error tandem fiat quovis dato minor, id de curva posse pronuntiari. Unde duae oriuntur methodorum species, ex quibus meo judicio pendet, quicquid vel hactenus inventum est circa dimensionem curvilineorum, vel imposterum poterit inveniri. Idque hactenus non satis consideratum reperio. Caeterum hortor Virum Clarissimum, ut tentet methodum suam ad eas promovere figuras, quarum dimensio nondum datur, ut scilicet non tantum ad demonstrandum, sed etiam ad inveniendum serviet, quod variis modis praestari posse video. Licet autem generaliores methodos dudum habeam, qualis illa est, quam in scheda mensis Maji Actorum hujus anni publicavi, non tamen tales contemno vias magis restrictas, quia saepe sunt compendiosiores in quibusdam casibus, et variare Methodos ad perfectionem

---

*) Zuerst gedruckt in den Act. Erudit. Lips. an. 1684.

scientiae pertinet, et aliae methodi aliis problematis sunt aptiores ac quasi a natura assignatae, praesertim cum generalis illa Methodus mea comparata sit ad inveniendas quadraturas indefinitas seu figurae toti pariter et partibus ejus quibuscunque communes, pro definitis vero portionibus vel totis figuris solis nondum mihi sufficere, sed alia plane adhibenda esse videatur.

Qua tamen occasione non dissimulabo, alium Virum Eximium, qui in iisdem Actis mense Octobri anni praeteriti 1683 etiam quadraturas definitas aut earum possibilitatem et speciatim circa dimensionem totius circuli exhibere voluit (quod mihi ex iis, quae affert, nondum sequi videbatur) nuper mihi significasse, inventum se habere modum satisfaciendi huic difficultati. Id inventum si legitimum est, lubens, quae in Actis proximi mensis Martii contra scripsi, retractabo et fatebor, eum aliquid magni momenti mihique secundum hanc investigandi rationem ignotum et insperatum praestitisse, magnumque illud Problema Tetragonismi Circularis quoad eum quadrandi modum, qui vulgo quaeritur, absolvisse demonstrata ejus impossibilitate, quod hactenus publice fecit nemo. Ait enim, se posse demonstrare, quandocunque figurae alicujus linea algebraica (ut ego loqui soleo) terminatae non datur quadratura algebraica indefinita sive generalis (seu quando ejus non datur quadratrix Algebraica), tunc nec posse dari alicujus portionis ejus quadraturam algebraicam definitam seu specialem. (Alibi autem explicui me *Algebraicam* vocare quantitatem vel lineam, cujus natura per aequationem certi gradus exprimi potest). Ego sane me fateor hactenus in alia fuisse sententia; quoniam tamen pomittentis amici ingenium maximi facio, ideo nondum desperare volo de successu, hortorque magnopere, ut illam demonstrationem edat, unde plurimum lucis accedet Geometriae.

VIII.

QUADRATURA ARITHMETICA COMMUNIS SECTIONUM CONICARUM, QUAE CENTRUM HABENT, INDEQUE DUCTA TRIGONOMETRIA CANONICA AD QUANTAMCUNQUE IN NUMERIS EXACTITUDINEM A TABULARUM NECESSITATE LIBERATA, CUM USU SPECIALI AD LINEAM RHOMBORUM NAUTICAM, APTATUMQUE ILLI PLANISPHAERIUM*).

Jam anno 1675 compositum habebam Opusculum Quadraturae Arithmeticae amicis ab illo tempore lectum, sed quod materia sub manibus crescente limare ad editionem non vacavit, postquam aliae occupationes supervenere, praesertim cum nunc prolixius exponere vulgari more, quae Analysis nostra nova paucis exhibet, non satis pretium operae videatur. Interim insignes quidam Mathematici, quibus veritas primariae nostrae propositionis dudum in his Actis publicatae innotuit, pro humanitate sua nostri qualiscunque inventi candide meminere. Quos inter Ill. Hugenius etiam analogum aliquid in Hyperbola eleganter adjecit, a nostri olim schediasmatis analogia diversum. Ut enim nos dederamus seriem $\frac{1}{1}t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5$ etc. per circulum, ita ipse $\frac{1}{1}t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5$ etc. per Hyperbolam primariam exhiberi notavit, de quo adde dicta ad Schediasma hic praecedens**). Et sane etiam in Opusculo nostro inedito, nec ipso viso, inter alias propositiones una continebatur satis memorabilis ob generalitatem ambasque illas et plura complexa: *Sectorem, curva conica a vertice incipiente et radiis ex centro eductis comprehensum, arithmetice quadrare.* AT (fig. 28) portio rectae in vertice tangentis, comprehensa inter verticem A et T occursum tangentis alterius extremi, vocetur t, et CB semiaxis conjugatus (seu recta, quae potest rectangulum sub dimidiis lateribus recto et transverso) sit unitas, erit sector CAFEC aequalis rectangulo comprehenso sub AC semilatere transverso et recta, cujus longitudo sit $\frac{1}{1}t \pm \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \pm \frac{1}{7}t^7$ etc. Ita exprimitur non solum area sectoris circularis, aut sectoris Hyperbolae primariae aequilaterae, cum angulus Asymptotarum est rectus, sed et alterius

---

*) Zuerst gedruckt in den Act. Erudit. Lips. an. 1691.

**) Es ist dies die in den Act. Erudit. vorhergehende Additio ad schediasma De Medii Resistentia.

sectoris Elliptici aut Hyperbolici cujuscunque. Caeterum ex seriebus infinitis a me aliisque, ut Mercatore, Newtono, Gregorio exhibitis sequitur Trigonometriae Canonicae sine Tabulis praxis quantum licet exacta. Neque enim semper Tabulas per maria et terras circumferre in potestate est. Nempe sit radius unitas, arcus a, tangens t, sinus rectus s, sinus versus v, logarithmus l, numerus $1 + n$ (logarithmo ipsius unitatis existente 0) fiet

(1)
$$a = \frac{1}{1}t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 \text{ etc.}$$

(2)
$$s = a - \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5} - \frac{a^7}{1.2.3.4.5.6.7} \text{ etc.}$$

id est $a - \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{120}a^5$ etc.

(3)
$$v = \frac{a^2}{1.2} - \frac{a^4}{1.2.3.4} + \frac{a^6}{1.2.3.4.5.6} - \frac{a^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} \text{ etc.}$$

(4)
$$l = \frac{1}{1}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{5}n^5 \text{ etc.}$$

(5)
$$n = \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1.2} + \frac{l^3}{1.2.3} + \frac{l^4}{1.2.3.4} + \frac{l^5}{1.2.3.4.5} \text{ etc.}$$

Semper autem quantitas, cujus potentiae in serie infinita adhibentur, debet esse minor unitate, ut in progressu fiant quantumvis parvae. Hujusmodi series dari possunt plures, et efficere etiam per series licet, ut ex arcu dentur sinus et tangentes artificiales seu logarithmici (non suppositis naturalibus) et vicissim arcus ex ipsis; sed placuit eas tantum adscribere series, quae tam simplicis sunt compositionis, ut facillime memoria retineri et ubivis defectum librorum ac tabularum supplere possint. Itaque unam tantum ob suam simplicitatem et quia hujus schediasmatis occasionem praebuit, addo, si sinus complementi sint c, logarithmos sinuum rectorum vel potius (quod eodem redit) reciprocorum ab his sinubus,

(6)
fore = ut $\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{4}c^4 + \frac{1}{6}c^6 + \frac{1}{8}c^8$ etc., quemadmodum sequitur ex his, quae innuimus in schediasmate de Resistentia Medii Act. Januarii 1689 pag. 4 artic. 5 prop. 6; unde rursus patet, etiam pendere a quadratura Hyperbolae. Nec abludunt quae dederat Nic. Mercator, unde ad meum Circuli Tetragonismum secundo mense primi anni horum Actorum editum duxeram Analogiam cum Hyper-

bola non inelegantem. Inveneram scilicet circulum esse ad quadratum circumscriptum ut $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ etc. ad unitatem, seu circulum esse ad quadratum inscriptum ut $\frac{1}{4-1} + \frac{1}{36-1} + \frac{1}{100-1}$ etc. ad $\frac{1}{4}$, ubi numeri 4, 36, 100 etc. sunt quadrati a paribus quaternario differentibus 2, 6, 10 etc. Similiter ex supradictis, cum Numerus, cujus logarithmus quaeritur, $1 + x$ est 2, tunc x est 1, adeoque $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ etc. est Logarithmus Hyperbolicus binarii. Eadem series facit $\frac{4}{9-1} + \frac{4}{49-1} + \frac{4}{121-1}$ etc. (nam $\frac{4}{9-1}$ est aeq. $\frac{1}{1} - \frac{1}{2}$, et $\frac{4}{49-1}$ est aeq. $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, et ita porro), ergo Logarithmus Hyperbolicus binarii est ad unitatem, ut $\frac{1}{9-1} + \frac{1}{49-1}$ etc. est ad $\frac{1}{4}$, ubi numeri 9, 49, 121 etc. sunt quadrati a 3, 7, 11 etc. qui sunt impares unitate excedentes supra dictos pares quaternario differentes; unde origo patet analogiae olim a nobis exhibitae in his Actis, ut dictum est. Esse autem $\frac{1}{2}cc + \frac{1}{4}c^4 + \frac{1}{6}c^6$ etc. log. de $1 : \sqrt{\overline{1 - cc}}$, sic demonstratur: log. de $1 + c = \frac{1}{1}c - \frac{1}{2}cc + \frac{1}{3}c^3$ etc. et log. de $1 - c = -\frac{1}{1}c - \frac{1}{2}cc - \frac{1}{3}c^3$ etc. utrumque per aeq. 4; ergo log. $\overline{1 + c}$ + log. $\overline{1 - c}$ id est log. $\overline{1 - cc} = -\frac{2}{2}cc - \frac{2}{4}c^4 - \frac{2}{6}c^6$ etc. et proinde $\frac{1}{2}$ log. $\overline{1 - cc}$ id est log. $\sqrt{\overline{1 - cc}} = -\frac{1}{2}cc - \frac{1}{4}c^4 - \frac{1}{6}c^6$ etc.

Sed quo magis horum usus appareat, ostendere operae pretium erit, eundem calculum prodesse ad lineam Rhombicam in superficie sphaerica a navigantibus descriptam recte aestimandam atque in plano projiciendam, quae vulgo parum accurate tractantur. Rem usu amplissimam paucis explicemus. Sit Polus P (fig. 29), Aequator Aqq, Meridiani PA, Pq etc., Linea Rhombica $A\,{}_1l\,{}_2l\,{}_3l$ etc. quae describitur, quamdiu eadem plaga seu venti rhombus tenetur. Per puncta l, l ducantur paralleli Hl, nempe ${}_1H\,{}_1l$, ${}_2H\,{}_1d\,{}_2l$, ${}_3H\,{}_2d\,{}_3l$ etc. Quod si jam punctorum q, q intervalla sint incomparabiliter parva, portiones arcuum quippe inassignabiles erunt pro rectis, et triangula ${}_1l\,{}_1d\,{}_2l$, ${}_2l\,{}_2d\,{}_3l$ etc. erunt similia, ob angulum lineae Rhombicae semper eundem ad loci meridianum. Ergo ${}_1l\,{}_3l$ *quantitas Rhombicae percursae seu itineris in eodem rhombo est ad ${}_1H\,{}_3H$, differentiam latitudinis extremorum, ut sinus totus ad anguli rhombici sinum.* Itaque ex dato angulo rhombico et differentia latitudinum datur quantitas itineris, vel contra. Huc usque res pervulgata est,

sed ut ex iisdem differentia longitudinum calculo aestimetur, negotium est Geometriae transcendentis, quam pauci recte tractaverunt. Id ergo supplere nostrae methodi est. Radius seu sinus totus sit unitas, et tangens anguli rhombici constantis sit b, patet esse ${}_1d\,{}_2l$ ad ${}_1l\,{}_1d$ seu ad ${}_1H\,{}_2H$ vel ${}_2d\,{}_3l$ ad ${}_2l\,{}_2d$ seu ad ${}_2H\,{}_3H$, ut b ad 1. Sed ${}_2q\,{}_3q$ est ad ${}_2d\,{}_3l$, ut AC (sinus totus seu sphaerae radius) ad ${}_3HM$ sinum anguli ${}_3HCP$ (fig. 30) cujus arcus ${}_3HP$ est latitudinis $A\,{}_3H$ complementum, seu ${}_2q\,{}_3q$ ad ${}_2d\,{}_3l$, ut $C\,{}_3H$ ad ${}_3HM$, seu ut CE secans anguli latitudinis ad AC sinum totum. Latitudo seu arcus meridiani AH sit h, et ${}_2H\,{}_3H$ erit dh. Jam CE secans sit n, et ${}_2d\,{}_3l$ erit bdh, et ${}_2q\,{}_3q$ erit bndh, et portio tota aequatoris $A\,{}_3q$ erit $b\int ndh$, et $\int ndh$ est area secantium arcui applicatorum. Jam angulo CEN recto educta EN ipsi CA occurrat in N, sumtaque ${}_3HQ$ particula ipsius ${}_3HM$ et normaliter ex Q educta ad circulum QF, ob triangula similia nempe ordinarium NEC et characteristicum inassignabile ${}_3HQF$ erit rectangulum CE in ${}_3HF$ seu ndh aequale rectangulo CN in QF. Si jam CM sinus latitudinis sit e, QF erit de, et CN vel MV (sumta in $M\,{}_3H$ continuata) reperietur esse $1 : \overline{1 - ee}$, ductaque linea per AVV, erit $\int ndh$ seu area ACMVA aeq. $\int$, de : $\overline{e - ee}$ et $b\int$, de : $\overline{1 - ee}$ seu $\frac{b \cdot e}{1} + \frac{b \cdot c^3}{3} + \frac{b \cdot e^5}{5}$ etc. erit $A\,{}_3q$ arcus aequatoris inter A (initium lineae rhombicae $A\,{}_3l$ in aequatore) et meridianum $P\,{}_3l\,{}_3q$, ad quem pervenit, interceptus: posito e esse sinum latitudinis extremi ${}_3l$, et b esse numerum qui sit ad unitatem, ut tangens constantis anguli rhombici cum meridiano est ad sinum totum. Unde si quaeratur ${}_1q\,{}_3q$ differentia longitudinis duorum rhombicae lineae ${}_1l\,{}_2l\,{}_3l$ punctorum ${}_1l$ et ${}_3l$ ex data ${}_1H\,{}_3H$ differentia latitudinis eorundem, oportet tantum invenire $A\,{}_1q$ et $A\,{}_3q$, eritque differentia ${}_1q\,{}_3q$, adeoque si sinus latitudinis puncti ${}_3l$ sit e, et puncti ${}_1l$ sit (e), tantum opus $\frac{e - (e)}{1} + \frac{e - (e)^3}{3} + \frac{e - (e)^5}{5}$ etc. multiplicare per b tangentem anguli rhombici ad meridianum, posito sinum totum esse unitatem, et productum erit differentia longitudinis quaesita. Denique ex superioribus re ad logarithmos redacta ad modum artic. 5 prop. 4 nostri schediasmatis De Resistentia Medii, erunt differentiae longitudinum punctorum ${}_3l$ et ${}_1l$, ut logarithmi rationis $\overline{1 + e} : \overline{e - e}$ ad $\overline{1 + (e)} : \overline{1 - (e)}$, posito radium sphaerae esse unitatem et sinus latitudinum dictorum punctorum respective esse *e* et *(e)*. Ex his jam canones practicos facile ducet peritus, veluti si data differentia longitudinis et latitudinis locorum quaeras rhombum seu angulum rhombicae lineae ab uno ad alium ducentis: nam *tangens anguli, quem Rhombus quaesitus facit ad meridianum est ad sinum totum, ut arcus differentiae longitudinum est ad logarithmum hyperbolicum dictae rationis seu ad* $\frac{e-(e)}{1}+\frac{e^3-(e)^3}{3}+\frac{e^5-(e)^5}{5}$ etc. Quod si meridiani in planisphaerio projiciantur rectis parallelis, quod cautionibus debitis adhibitis plerumque commode satis fieri potest salva exactitudine, tunc etiam lineae Rhombicae erunt rectae. Si jam gradus longitudinis horumque partes projiciamus aequalibus intervallis, oportet gradus latitudinis assumi inaequales, et sic quidem ad mappam Geometrice construendam, ut ducta ad libitum recta omnes meridianos oblique secante, latitudines punctorum intersectionis habeant, ut ex dictis patet, numeros, qualis est $\overline{1+e} : \overline{1-e}$, geometrica progressione incedentes; id enim si una recta praestet, praestabunt omnes. Unde comparando cum numeris scalae latitudinis facillimum erit in ipsa mappa mensurare ex vero rectam quamvis in ea ducibilem seu quantitatem Rhombicae datae. His mappis si alias jungas, ubi sphaericae superficiei partes projiciuntur ex centro in plana tangentia, omnesque arcus circulorum magnorum adeoque viae brevissimae exhibentur rectis, pleraque in praxi probe satis praestari possunt.

CHARACTERISTICA GEOMETRICA.

ANALYSIS GEOMETRICA PROPRIA.

CALCULUS SITUS.

Obwohl die von Vieta angebahnte, von Descartes weiter ausgeführte grosse Revolution in der Behandlung geometrischer Probleme mittelst der Algebra vorerst das Mögliche leistete und vielseitig befriedigte, so verhehlten sich doch die einsichtigen Mathematiker des 17. Jahrhunderts keineswegs, dass die Darstellung der algebraisch gewonnenen Resultate durch Construction in Vergleich zu den durch Einfachheit und Eleganz mustergültigen Leistungen der Geometer des Alterthums noch weit zurückstand. Um in dieser Hinsicht der Analysis zu Hülfe zu kommen, hatten Desargues und Pascal den Plan gefasst, ein bestimmt abgegränztes Gebiet der Geometrie, die Curven des zweiten Grades hinsichtlich ihrer allgemeineren Eigenschaften synthetisch zu durchforschen; sie hofften, dass sie dadurch wenigstens für die Lösungen derjenigen Probleme, welche von den genannten Linien abhängen, allgemeinere Gesichtspunkte würden aufstellen können. Indess der geometrische Weg, den sie hierbei einschlugen, und die rein synthetische Behandlung boten zu viele Schwierigkeiten, so dass sie das vorgesteckte Ziel nicht erreichten. So fand Leibniz den Stand der Sache, als er in Paris mit allem Feuer jugendlicher Begeisterung dem Studium der Mathematik sich widmete. In Folge einer Unterredung mit Carcavi*) war seine Aufmerksamkeit auf diese Lücke gelenkt worden, und er erkannte sofort, dass hier ein Feld sich bot, auf dem Neues zu schaffen und Ruhm und Ehre zu ernten war. Leibniz fasste den Gegenstand, nicht wie seine oben genannten Vorgänger, von der entgegengesetzten Seite, er blieb im Bereich der Cartesianischen Geometrie und versuchte die Gleichungen zu verallgemeinern,

---

*) Pierre de Carcavi (gest. 1681 zu Paris) war zuerst Parlamentsrath in Toulouse, dann Conservator der Königlichen Bibliothek in Paris. Er gehörte zu den Stamm-Mitgliedern der Akademie und stand mit Descartes, Fermat, Pascal in Briefwechsel.

um eine Gleichung zu finden, die alle Curven des zweiten Grades repräsentirte. Die Hülfsmittel, deren er sich hierzu bediente, waren zunächst den Ideen entlehnt, mit denen er sich seit längerer Zeit in Betreff des grossen Problems der allgemeinen Charakteristik beschäftigte: neue Charaktere, die mehrere Operationszeichen zugleich ausdrückten und sogleich äusserlich erkennen liessen, aus welchen Zeichen sie entstanden seien; ferner die Einführung der untheilbaren Grössen (indivisibilia) Cavaleri's, so wie des Unendlichen, wovon Descartes keinen Gebrauch gemacht hatte. Indess waren die Ausdrücke, die Leibniz auf diesem Wege erhielt, zu weitläufig und nicht zu bewältigen. Daher begann er, bevor er den Anlauf noch einmal wiederholte, mit einer genauen Zurechtlegung der Principien und der Hauptgesichtspunkte, welche das Fundament des Ganzen bildeten. Bei dieser speculativen Untersuchung kam Leibniz zu der Ansicht, dass obwohl die Geometrie dem algebraischen Calcul untergeordnet sei, sie dennoch eine ihr eigenthümliche Analysis habe, durch welche ihre Theoreme dargethan und die Constructionen, nachdem der Calcul so viel als möglich vereinfacht und zusammengezogen, zuletzt mittelst Linien bewirkt würden. Diese der Geometrie eigenthümliche Analysis besassen nach Leibnizens Meinung die Geometer des Alterthums, und er bemerkt, dass die Neueren mit Hülfe ihrer Methoden die Lehrsätze vergeblich suchen würden, welche die Alten aufgestellt haben. Leibniz glaubt jedoch, dass er die Grundzüge dieser Kunst (prima lineamenta hujus artis) gefunden habe; mit Hülfe von passenden Symbolen und nach Feststellung einiger Grundsätze soll alles Weitere nach Art des Calculs geschehen, so dass die Vorstellung der geometrischen Grösse ganz bei Seite gelassen werden kann.

Das Vorstehende bildet den wesentlichen Inhalt der Einleitungen, die Leibniz zu den beiden Abhandlungen „De Constructione" und „De la Methode de l'Universalité" vorausschickt. In diesen Abhandlungen erläutert er, wie man mit Hülfe mehrdeutiger Symbole (signa ambigua, caractères ambigus) zwei und mehrere Gleichungen in eine zusammenfassen kann. Er hebt zugleich hervor, dass diese Symbole keineswegs willkührlich, vielmehr dem, was sie ausdrücken sollen, möglichst entsprechend gewählt werden müssen, und er erwähnt, dass er in seinem ersten Versuche, um die Richtung auszudrücken, die Buchstaben des griechischen Alphabets gebraucht habe, und zwar so, dass die ersten Buchstaben das +, die letzten

das — ausdrückten. Sollten z. B. zwei Gleichungen von der Form $a = +b + c$ und $a = \underline{+b} - c$ in eine zusammengefasst werden, so schrieb er $a = +b\,\overline{(\alpha\omega)}\,c$*). Eine solche Gleichung nennt Leibniz „première ambiguité." Sind ferner zwei Gleichungen von der Form $a = +b - c$, $a = -b + c$ in eine zusammenzuziehen, so schreibt er $a = \overline{(\beta\psi)}\,b\,\overline{(\psi\beta)}\,c$; dies ist die „seconde ambiguité." Die allgemeine Gleichung aus drei Gleichungen von der Form $a = +b + c$, $a = -b + c$, $a = +b - c$ ist die folgende: $a = \overline{(\gamma\varphi\gamma)}\,b\,\overline{(\gamma\gamma\varphi)}\,c$; sie bildet die „troisième ambiguité" u. s. w. Später vertauschte Leibniz die griechischen Buchstaben mit Symbolen, die aus + und — vielfach zusammengesetzt waren; er gab jedoch für sehr zusammengesetzte Zeichen den ersteren den Vorzug, da sie die Genesis bestimmter ausdrückten; waren die Zeichen weniger zusammengesetzt, so behielt er die Bildung aus + und — bei.

Leibniz überzeugte sich indess sehr bald, dass auf diese Weise das gewünschte Ziel nicht zu erreichen war; die Constructionen, die er mittelst der algebraischen Behandlung der Probleme erhielt, waren in Vergleich zu denen, die sich auf unmittelbar geometrischem Wege ergaben, wunderbar geschroben und unbequem, wie er beispielsweise an der Aufgabe: Aus der Grundlinie, der Höhe und dem Winkel an der Spitze ein Dreieck zu construiren, darthut. Die Behandlung dieser Aufgabe bietet zugleich die Beläge für die im Vorhergehenden dargestellten Versuche rücksichtlich der Ausführung seiner Ideen.

Durch diese wenig günstigen Erfolge wurde Leibniz bewogen, auf das Gebiet der Geometrie zurückzugehen. Er bemerkte, dass nicht allein die Quantität der Figur, sondern auch die Qualität d. h. die Form zu berücksichtigen sei; denn das sei die wahre geometrische Analysis, die nicht bloss die Gleichheit und Proportionalität in Betracht ziehe, sondern auch die Ähnlichkeit, die aus der Form der Figur entspringt, und die Congruenz, die durch die Verbindung der Gleichheit und Ähnlichkeit hervorgeht. Da nun nach der allgemein angenommenen Sitte, die Eckpunkte der Figuren zu bezeichnen, durch die dazu gebrauchten Buchstaben allein theilweise schon die Eigenschaften der Figuren ausgedrückt werden, so wurde

---

*) Leibniz schliesst die griechischen Buchstaben in Klammern ein, um sie dadurch von den andern, welche Grössen bezeichnen, zu unterscheiden.

Leibniz hierdurch veranlasst, darüber nachzudenken, ob nicht lediglich durch blosse Nebeneinanderstellung und Umstellung dieser Buchstaben alle Eigenschaften, der ganze Charakter der Figuren dargestellt werden könne; möglicherweise würde sich alsdann ein Calcul ergeben, der mit und an den Buchstaben allein ausgeführt, nicht nur die Definitionen in ihrer ganzen Eigenthümlichkeit produciren, sondern auch die Auflösungen der Probleme finden lassen würde, und zwar nicht nach der bisherigen Willkühr, sondern vielmehr nach einer bestimmten Methode.

Da bisher Niemand dergleichen versucht hatte, so sah sich Leibniz genöthigt, den Gegenstand von den ersten Anfängen an zu erörtern. Er geht hierbei von dem absoluten Raum aus, betrachtet die Lage eines Punktes in demselben, und entwickelt, wie durch Bewegung aus dem Punkt die Linie, aus der Linie die Fläche, aus der Fläche der Körper entsteht. Da nun durch zwei Punkte die gerade Linie, sowohl ihrer Lage nach, als auch, falls jene zwei Punkte zugleich die Endpunkte sind, ihrer Grösse nach bestimmt ist d. h. alle Punkte der Linie lediglich durch diese beiden Punkte gegeben sind, so werden diese zwei Punkte den Charakter der Linie ausdrücken und demnach vollständig bestimmen; es reicht aus, anstatt der Linie die beiden bestimmenden Punkte in Betracht zu ziehen. Sind demnach zwei Punkte A, B zweien andern C, D congruent, so sind auch die dadurch bestimmten Linien congruent; und sind die drei Punkte A, B, C, die nicht in einer geraden Linie liegen, drei andern D, E, F congruent, so ist auch die durch die drei ersten Punkte bestimmte Kreisperipherie der durch die drei letzten bestimmten congruent. Allgemein drückt dies Leibniz so aus: Wenn das Bestimmende congruent ist, so wird es auch das dadurch Bestimmte sein, vorausgesetzt dass ein und derselbe Modus des Bestimmens bleibt.

Was nun die Charakteristik betrifft, deren Leibniz zur Verwirklichung seiner Ideen über die wahre geometrische Analysis sich bediente, oder um seinen eigenen Ausdruck zu gebrauchen, was den „calculus situs" anlangt, so hat er sich vorzugsweise auf die Bestimmungsform der Congruenz beschränkt, indess wie es scheint, nur um mittelst dieses Begriffs zu zeigen *), was sich dadurch

*) Nunc autem ad explicandam rem situs non nisi *congruentia* utemur, sepositis in alium locum *similitudine* et *motu*.

die in Rede stehende Disciplin gewinnen lässt. Es ist bereits von einem competenten Mathematiker nachgewiesen *), dass dieser Begriff für die einfachsten Relationen, namentlich wenn es sich nur um die Bestimmung eines Punktes oder einer Ebene handelt, ausreicht, dagegen für complicirtere Fälle zu eng ist. Leibniz hat dies selbst gefühlt, denn er wollte ausserdem noch die Aehnlichkeit und die Bewegung in Betracht ziehen. Besonders scheint er zuletzt ein vorzügliches Augenmerk auf den Begriff der Aehnlichkeit als den weitesten gehabt zu haben, wie aus der „Analysis situs" hervorgeht.

Demnach hat Leibniz über diese neue geometrische Analysis nur Anfänge hinterlassen; sie sind jedoch von der Art, dass sich daraus von Leibnizens Ideen eine vollkommene Vorstellung gewinnen lässt. Uebrigens hat er den Gedanken an die Möglichkeit einer vollständigen Ausführung derselben niemals aufgegeben, wenn auch das Urtheil von Hugens, das Leibniz nach der ersten Durcharbeitung seiner Ideen einholte, ungünstig ausfiel. **) Wiederholt hat er in der spätern Zeit seines Lebens solche, die für die Mathematik sich interessirten, für die Ausführung seiner Ideen über die geometrische Analysis zu gewinnen gesucht, unter andern den Freiherrn von Bodenhausen und einen gewissen Overbeck, der Conrector am Gymnasium zu Wolfenbüttel war. Von der Hand des letztern ist unter den Leibnizischen Manuscripten eine kurze Abhandlung: De calculo situum, vorhanden, die nach Leibnizens Angaben gearbeitet ist.

Von den folgenden Abhandlungen bildet die unter Nr. I weniger ein abgerundetes Ganze, als vielmehr eine Zusammenstellung alles dessen, was Leibniz in Betreff der Analysis Geometrica und des Calculus situs bis zum Jahre 1679 gefunden hatte. Fragmente hiervon sind sowohl der „Essay", welchen Leibniz unter dem 8. September desselben Jahres an Hugens sandte, um dessen Urtheil über

*) Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik, von H. Grassmann. Leipzig 1847.

**) Leibniz. Correspondenz mit Hugens, S. 19 ff. in Leibnizens math. Schriften, Th. 2.

die neue Analysis zu vernehmen *), als das unter Nr. II Enthaltene, welches jedoch zugleich ein in sich abgegränztes Ganze ist. Einer vorhandenen Notiz zufolge wurde Nr. II von Leibniz im Jahre 1698 entworfen, um den Freiherrn von Bodenhausen über die Analysis Geometrica und den Calculus situs zu instruiren.

Nr. IV unter dem Titel: In Euclidis πρῶτα, ist hier angereiht worden, insofern sowohl die darin enthaltenen Erörterungen über die Principien der Geometrie, als auch die Anwendungen des Calculus situs zu Nr. II in offenbarem Zusammenhange stehen.

---

*) Leibniz. mathematische Schriften, Th. 2. S. 20 ff.

I.

CHARACTERISTICA GEOMETRICA. *)

(1) *Characteres* sunt res quaedam, quibus aliarum rerum inter se relationes exprimuntur, et quarum facilior est quam illarum tractatio. Itaque omni operationi, quae fit in characteribus, respondet enuntiatio quaedam in rebus: et possumus saepe ipsarum rerum considerationem differe usque ad exitum tractationis. Invento enim quod quaeritur in characteribus, facile idem invenietur in rebus per positum ab initio rerum characterumque consensum. Ita machinae exhiberi possunt modulis, corpora solida repraesentari possunt in plana tabula, ita ut nullum sit punctum corporis, cui non respondens aliud designari possit in tabula secundum leges perspectivae. Itaque si quam operationem geometricam scenographica ratione in tabula plana super imagine rei peregerimus, poterit eventus illius operationis exhibere punctum aliquod in Tabula, cui facile sit invenire punctum respondens in re. Ac proinde solutio problematum stereometricorum in plano peragi poterit.

(2) Quanto autem characteres sunt exactiores, id est quo plures rerum relationes exhibent, eo majorem praestant utilitatem, et si quando exhibeant omnes rerum relationes inter se, quemadmodum faciunt characteres Arithmetici a me adhibiti, nihil erit in re, quod non per characteres deprehendi possit: Characteres autem Algebraici tantum praestant quantum Arithmetici, quia significant numeros indefinitos. Et quia nihil est in Geometria, quod non possit exprimi numeris, cum scala quaedam partium aequalium exposita est, hinc fit, ut quicquid Geometricae tractationis est, etiam calculo subjici possit.

(3) Verum sciendum est, easdem res diversis modis in characteres referri posse, et alios aliis esse commodiores. Ita Tabula, in qua corpus arte perspectiva delineatur, potest et gibba esse, sed praestat tamen usus tabulae planae; et nemo non videt, charac-

---

*) Das Manuscript ist datirt: 10. Augusti 1679.

teres numerorum hodiernos, quos Arabicos vel Indicos vocant, aptiores esse ad calculandum, quam veteres Graecos et Romanos, quanquam et his calculus peragi potuerit. Idem et in Geometria usu venit; nam characteres Algebraici neque omnia, quae in spatio considerari debent, exprimunt (Elementa enim jam inventa et demonstrata supponunt) neque situm ipsum punctorum directe significant, sed per magnitudines multa ambage investigant. Unde fit, ut difficile sit admodum, quae figura exhibentur exprimere calculo; et adhuc difficilius, calculo inventa efficere in figura: itaque et constructiones, quas calculus exhibet, plerumque sunt mire detortae et incommodae; quemadmodum alibi ostendi exemplo problematis hujus: Data basi, altitudine et angulo ad verticem invenire Triangulum.*)

(4) Equidem animadverto, Geometras solere descriptiones quasdam figuris suis adjicere, quibus explicentur figurae, ut quae ex figura ipsa satis cognosci non possunt, ut linearum aequalitates ac proportionalitates, saltem ex verbis adjectis intelligantur: plerumque et longius progrediuntur, et multa verbis exponunt, etiam quae ex figura ipsa sunt manifesta, tum ut ratiocinatio sit severior nihilque a sensu atque imaginatione pendeat, sed omnia rationibus transigantur, tum ut figurae ex descriptione delineari aut, si forte amissae sint, restitui possint. Hoc autem quamvis non satis exacte observent, praebuere tamen nobis Characteristicae Geometricae velut vestigia quaedam, ut cum Geometrae dicunt (fig. 31) rectang. ABC, intelligunt factum ex ductu AB super BC ad angulos rectos; cum dicunt AB aequ. BC aequ. AC, exprimunt Triangulum aequilaterum; cum dicunt ex tribus AB, BC, AC duo quaedam aequari tertio, designant omnia tria A, B, C esse in eadem recta.

(5) Ego vero cum animadverterem, hoc solo literarum puncta figurae designantium usu nonnullas figurae proprietates posse designari, cogitare porro coepi, an non omnes punctorum figurae cujusque relationes iisdem literis ita designari possint, ut tota figura characteristice exhibeatur, et quae crebris linearum ductibus vix ac ne vix quidem praestantur, sola harum literarum collocatione ac transpositione inveniantur. Nam plerumque confusio oritur in figura ex multiplicibus linearum ductibus, praesertim cum adhuc tentandum est, cum contra tentamenta characteribus impune fiant

*) Siehe die Beilage zu dieser Abhandlung.

Sed subest aliquid majus, nam poterimus characteribus istis veras definitiones omnium exprimere, quae sunt Geometricae tractationis, et analysin ad principia usque, nempe axiomata et postulata, continuare, cum Algebra sibi non sufficiat, sed propositionibus per Geometriam inventis uti cogatur, et dum omnia ad duas illas propositiones, quarum una duo quadrata in unum addit, altera vero triangula similia comparat, referre conatur, pleraque a naturali ordine detorquere cogatur.

(6) Nos vero ubi semel Elementa characteribus nostris demonstraverimus, facile poterimus modum deprehendere inveniendi problematum solutiones, quae statim eadem opera exhibeant constructiones et demonstrationes lineares, cum contra Algebraici, inventis valoribus incognitarum, de constructionibus adhuc soliciti esse debeant, et constructionibus repertis demonstrationes lineares quaerant. Itaque miror homines non considerasse, si demonstrationes et constructiones esse possunt lineares, omni calculo exutae, multoque breviores, profecto etiam inventionem dari debere linearem: nam in lineari non minus quam algebraica Synthesi regressum dari necesse est. Causa autem, cur analysis linearis nondum deprehensa fuerit, haud dubie nulla alia est, quam quod Characteres nondum inventi sunt, quibus ipse situs punctorum directe repraesentaretur, nam in magna rerum multitudine et confusione sine characteribus expedire sese difficile est.

(7) Quod si jam semel figuras et corpora literis exacte repraesentare poterimus, non tantum Geometriam mirifice promovebimus, sed et opticen, et phoronomicam, et mechanicam, in universum quicquid imaginationi subjectum est, certa methodo et veluti analysi tractabimus, efficiemusque arte mirifica, ut machinarum inventiones non sint futurae difficiliores quam constructiones problematum Geometricae. Ita etiam nullo negotio sumtuque machinae etiam valde compositae, imo et res naturales delineari poterunt sine figuris, ita ut posteritati transmittantur, et quandocunque lubebit, figurae ex descriptione summa cum exactitudine formari possint, cum nunc quidem ob delineandarum figurarum difficultatem sumtusque multa pereant, hominesque a rerum sibi exploratarum atque reipublicae utilium descriptione deterreantur, verba etiam neque satis exacta neque satis apta hactenus ad descriptiones concinnandas habeantur, quemadmodum vel ex botanicis et armorum insigniumque explicatoribus patet. Poterunt enim caeterae

quoque qualitates, quibus puncta, quae in Geometria ut similia considerantur, inter se differunt, facile sub characteres vocari. Ac profecto tum demum aliquando spes erit penetrandi in naturae arcana, cum id omne, quod alius vi ingenii et imaginationis ex datis extorquere potest, nos ex iisdem datis certa arte securi et tranquilli educemus.

(8) Cum vero nihil tale cuiquam hominum, quod sciam, in mentem venerit, nec ulla uspiam praesidia apparerent, coactus sum rem a primis initiis repetere, quod quam difficile sit nemo credit nisi expertus. Itaque diversis temporibus plus decies rem aggressus sum diversis modis, qui omnes erant tolerabiles et praestabant aliquid, sed scrupulositati meae non satisfaciebant. Tandem multis resectis ad simplicissima me pervenisse agnovi, cum nihil aliunde supponerem, sed ex propriis characteribus omnia ipse demonstrare possem. Diu autem haesi etiam reperta vera characteristicae hujus ratione, quia ab Elementis per se facilibus atque aliunde notis incipiendum mihi videbam, quae tanta scrupulositate ordinare minime gratum esse poterat; perrexi tamen et molestia hac superata denique ad majora sum eluctatus.

(9) Verum ut omnia ordine tractemus, sciendum est primam esse considerationem ipsius *Spatii*, id est Extensi puri absoluti: *puri*, inquam, a materia et mutatione, *absoluti* autem, id est illimitati atque omnem extensionem continentis. Itaque omnia puncta sunt in eodem spatio, et ad se invicem referri possunt. An autem spatium hoc a materia distinctum res quaedam sit, an solum apparitio constans seu phaenomenon, nihil refert hoc loco.

(10) Proxima est consideratio *Puncti*, id est ejus quod inter omnia ad spatium sive extensionem pertinentia simplicissimum est; quemadmodum enim Spatium continet extensionem absolutam, ita punctum exprimit id quod in extensione maxime limitatum est, nempe simplicem situm. Unde sequitur punctum esse minimum et partibus carere, et omnia puncta congruere inter se (sive coincidere posse) adeoque et similia atque si ita loqui licet, aequalia esse.

(11) Si duo puncta simul existere sive percipi intelligantur, eo ipsa consideranda offertur relatio eorum ad se invicem, quae in aliis atque aliis binis punctis diversa est, nempe relatio loci vel situs quem duo puncta ad se invicem habent, in quo intelligitur eorum distantia. Est autem *distantia* duorum nihil aliud, quam

quantitas minima unius ad alterum viae, et si bina puncta A . B servato situ inter se, binis aliis punctis C . D etiam situm inter se servantibus simul congruant aut succedere possint, utique situs sive distantia horum duorum eadem erit, quae distantia illorum. Nam congrua sunt quorum unum alteri coincidere potest, nulla intra alterutrum mutatione facta. Coincidentium autem A . B itemque C . D eadem distantia est, ergo et congruorum, quippe quae sine distantiae intra A . B vel intra C . D mutatione facta, possunt coincidentia reddi.

(12) *Via* autem (qua et distantiam definivimus) nihil aliud est quam locus continuus successivus. Et via puncti dicitur *Linea*. Unde et intelligi potest, extrema lineae esse puncta, et quamlibet lineae partem esse lineam sive punctis terminari. Est autem via continuum quoddam, quia quaelibet ejus pars extrema habet cum alia anteriori atque posteriori parte communia. Unde consequitur, ut hoc obiter addam, si linea quaedam in aliqua superficie ducatur, non posse aliam lineam in eadem superficie continue progredientem inter duo prioris lineae extrema transire, quin priorem secet.

(13) Via lineae ejusmodi, ut puncta ejus non semper sibi invicem succedant, *Superficies* est; et via superficiei, ut puncta ejus non semper sibi invicem succedant, est *Corpus*. Corpus autem moveri non potest, quin omnia ejus puncta sibi succedant (quemadmodum demonstrandum est suo loco) et ideo novam dimensionem non producit. Hinc apparet nullam esse partem corporis, cujus ambitus non sit superficies, nullamque esse partem superficiei, cujus ambitus non sit linea. Patet etiam extremum superficiei pariter atque corporis in se redire sive esse *ambitum* quendam.

(14) Assumtis jam duobus punctis, eo ipso determinata est via puncti per unum pariter atque alterum simplicissima possibilis: alioqui eorum distantia non esset determinata, adeoque nec situs. Haec autem linea quae a duobus solis punctis, per quae transit, determinata est ita nimirum, ut posito eam per duo data puncta transire, ipsa sola hinc consideranda offeratur, ea inquam linea dicitur *recta*, et licet utcunque producatur, dicitur una eademque recta. Ex quibus sequitur, non posse duo eadem puncta duabus rectis communia esse, nisi eae duae rectae quantum satis est productae coincidant: ac proinde duas rectas non habere segmentum commune (alioqui et duo segmenti hujus extrema haberent com-

munia) nec spatium claudere sive componere ambitum in se redeuntem, alioqui recta una ab altera digressa ad ea rediret, adeoque in binis punctis ei occureret. Pars quoque rectae est recta, nam et ipsa determinatur per duo illa puncta sola, per quae sola determinatur totum: determinatur, inquam, id est omnia ejus puncta consideranda seu percurrenda ex sola duorum punctorum consideratione offeruntur. Ex his patet, si A.B.C et A.B.D congrua sint, et A.B.C in una recta esse dicantur, coincidere C et D. Seu si punctum tantum unicum sit, quod eam habeat ad duo puncta relationem, quam habet, erunt tria puncta in una recta. Contra si plura duobus sint puncta eodem modo se habentia ad tria vel plura puncta data, erunt haec quidem in eadem recta, illa extra eam, cujus rei ratio est, quod quae ad determinantia eodem modo se habent, eo ipso ad determinata eodem modo se habent, itaque tria plurave puncta in eadem recta haberi possunt pro duobus. Puncta autem eodem modo se habentia requiro plura duobus (nam si sint duo tantum, res procedit, modo tria, ad quae unumquodque duorum eodem modo se habet, sint in eodem plano, licet non sint in eadem recta).

Recta quoque uniformis est ob simplicitatem, seu partes habet toti similes. Et omnis recta rectae similis est, quia pars unius alteri congrua est; pars autem rectae toti similis. Et in recta distingui non potest concavum a convexo, sive recta non habet duo latera dissimilia, vel quod idem est, si duo puncta sumantur extra rectam, quae eodem modo se habeant ad extrema rectae vel ad duo quaelibet puncta in recta, ea sese etiam eodem modo habebunt ad totam rectam, seu ad quodlibet punctum in recta, a quocunque demum latere rectae illa duo extra rectam puncta sumantur. Cujus rei ratio est, quia quae ad puncta determinantia aliquod extensum eodem se habent modo, ea etiam ad totum extensum eodem modo se habere necesse est. Denique recta a puncto ad punctum minima est, ac proinde distantia punctorum nihil aliud est quam quantitas rectae interceptae. Nam via minima utique magnitudine determinata est a solis duobus punctis; sed et positione determinata est, neque enim in spatio absolute plures minimae a puncto ad punctum esse possunt (ut in sphaerica superficie plures sunt viae minimae a polo ad polum). Nam si minima est absolute, extrema non possunt diduci manente lineae quantitate, ergo nec Partium extrema (nam et partes inter sua extrema minimas esse

necesse est) salva singularum partium quantitate, ergo nec salva totius quantitate. Jam si lineae duo extrema maneant immota et linea ipsa transformetur, necesse est puncta ejus aliqua a se invicem diduci. Itaque extremis rectae immotis, salva quantitate minima inter duo puncta, in aliam transformari non potest, itaque non dantur plures minimae incongruae dissimiles inter duo puncta. Quare si duae inter duo puncta essent minimae, essent congruae inter se. Jam una aliqua minima est recta (ut supra ostendimus), ergo et alia minima erit recta; at duae rectae inter duo puncta coincidunt; itaque minima inter duo puncta non nisi unica est.

(15) Modus generandi lineam rectam simplicissimus hic est. Sit corpus aliquod, cujus duo puncta sint immota et fixa, ipsum autem corpus nihilominus moveatur, tunc omnia puncta corporis quiescentia incident in rectam, quae per duo puncta fixa transit. Manifestum enim est, ea puncta eundem locum habere ex datis duobus punctis fixis determinatum, seu manentibus duobus punctis fixis et toto solido existente, moveri non posse, cum caetera extra rectam, eadem servata ad duo puncta fixa relatione, locum mutare possint. Unum hic incommodum est, quod ea recta hoc modo descripta non est permanens. Aliter generari potest linea recta, si qua detur linea flexilis, sed quae in majorem longitudinem extendi non possit. Nam si extrema ejus diducantur quousque id fieri potest, linea flexilis in rectam erit transmutata. Eodem modo et plani ac Circuli et Trianguli proprietates ex constitutis definitionibus naturali quodam meditandi ordine duci possent. Nam de linea recta in specimen tantum disseruimus.

(16) Haec omnia animo consequi non difficile est, etsi neque figurae nisi imaginatione delineentur, neque characteres adhibeantur alii quam verba, sed quia in ratiocinationibus longe productis neque verba, ut hactenus concipi solent, satis exacta sunt, nec imaginatio satis promta, ideo figuras hactenus adhibuere Geometrae. Sed praeterquam quod saepe delineantur difficulter, et cum mora quae cogitationes optimas interea effluere sinit, nonnunquam et ob multitudinem punctorum ac linearum schemata confunduntur, praesertim cum tentamus adhuc et inquirimus; ideo characteres sequenti modo cum fructu adhiberi posse putavi.

(17) Spatium ipsum seu extensum (id est continuum cujus partes simul existunt) non aliter hic quidem designari commode posse video quam punctis. Quoniam figurarum delineationes exacte

exacte exprimere propositum est, et in his nonnisi *puncta* et *tractus quidam continui* ab uno puncto ad aliud spectantur, in quibus puncta infinita pro arbitrio sumi possunt, ideo puncta quidem certa exprimemus literis solis ut A, item B (fig. 32).

(18) Tractus autem continuos exprimemus per puncta quaedam incerta sive arbitraria, ordine quodam assumta, ita tamen ut appareat semper alia tum intra ipsa tum ultra citraque semper posse sumi. Ita ${}_3b\,{}_6b\,{}_9b$ (fig. 33) significabit nobis totum tractum, cujus quodlibet punctum appellatur b, et in quo pro arbitrio assumsimus partes duas, unam cujus extrema sunt puncta ${}_3b$, ${}_6b$, alteram cujus extrema sunt puncta ${}_6b$, ${}_9b$. Unde patet illas duas partes continuas esse, cum habeant commune punctum ${}_6b$, et divisio earum sit facta pro arbitrio. Hic tractus, in quo duarum partium commune extremum nullum aliud est quam punctum, dicitur *Linea* et repraesentari etiam potest motu puncti *b*, quod viam quandam percurrit, sive vestigia tot quot puncta diversa ${}_3b$, ${}_6b$, ${}_9b$ etc. relinquere intelligitur. Hinc linea dici potest via puncti. Via autem est locus puncti continuus successivus. Potest et per compendium designari hoc modo: Linea $\overline{{}_y}b$, designando per literam $\overline{{}_y}$ vel aliam numeros ordinales pro arbitrio sumtos collective; cum vero scribemus: ${}_yb$ sine nota supra y, intelligemus quodcunque lineae $\overline{{}_y}b$ punctum distributive.

Eodem modo tractus quidam fingi possunt, quorum partes cohaerent lineis, vel qui describi intelliguntur motu lineae tali ut puncta ejus non succedant sibi, sed ad nova loca deveniant. Hic tractus sive via lineae dicitur *superficies*. Ponamus nimirum (fig. 34) lineam supradictam ${}_3b\,{}_6b\,{}_9b$ moveri, ejusque locum unum appellari $3_3b\ 3_6b\ 3_9b$, locum alium sequentem $6_3b\ 6_6b\ 6_9b$ et rursus alium sequentem $9_3b\ 9_6b\ 9_9b$, fiet superficies $3_3b\ 3_6b\ 3_9b$, $6_3b\ 6_6b\ 6_9b$, $9_3b\ 9_6b\ 9_9b$, quam et per compendium sic designabimus: $\overline{zy}b$.

(19) Ubi patet etiam, quemadmodum motu lineae $\overline{{}_y}b$ secundum puncta $\overline{z}b$ describitur superficies $\overline{Zy}b$, ita vicissim motu lineae $\overline{{}_z}b$ secundum puncta $\overline{{}_y}b$ describi eandem superficiem $\overline{yz}b$. At zyb significabit unaquaeque loca puncti b non collective, sed distributive, et $z\overline{y}b$ significat unam aliquam lineam $\overline{y}b$ in superficie $\overline{zy}b$ sumtam quamcunque etiam non collective, sed distributive.

(20) Neque refert, cujus figurae sint ipsae lineae quae moventur, aut etiam secundum quas fit motus, sive quas unum ex lineae motae punctis describit; inspiciatur fig. 35. Potest etiam

fieri, ut durante motu ipsa linea mota figuram mutet, ut linea $\overline{{}_z}b$ in dicta fig. 35, quod clarius intelligi potest, si quis cogitet quam superficiem descripturus esset arcus, qui durante explosione utcunque moveretur totus, exempli causa si caderet in terram. Potest etiam linea mota durante motu partes aliquas amittere, quae ab ea sive re sive animo separantur, ut patet ex fig. 36. Fieri etiam potest, ut punctum unum plurave, exempli gratia ${}_3b$ in linea mota durante motu quiescat, et loca ejus expressa velut plura, exempli gratia 3_3b, 6_3b, 9_3b, inter se coincidant, ut intelligitur inspecta fig. 37. Sed hae varietates omnes multaeque aliae plures etiam characteribus designari poterunt, quemadmodum suo loco patebit.

(21) Quemadmodum autem lineae motu describitur Tractus ille quem vocant superficiem, ita superficiei motu (tali ut partes ejus vel puncta sibi non ubique succedant) describitur Tractus quem vocant Solidum sive corpus. Quod exemplo uno satis intelligi potest (fig. 38), ut si immota manente linea (recta) (nempe $3_3b\ 6_3b\ 9_3b$) in superficie (rectangulo) $\overline{Zy}b$ (nempe $\left\{\begin{matrix} 3_3b\ 6_3b\ 9_3b \\ 3_6b\ 6_6b\ 9_6b \\ 3_9b\ 6_9b\ 9_9b \end{matrix}\right\}$ moveatur haec ipsa superficies, motu suo describet solidum

$$\left\{\begin{matrix} 33_3b\ 33_6b\ 33_9b,\ 36_3b\ 36_6b\ 36_9b,\ 39_3b\ 39_6b\ 39_9b \\ 63_3b\ 63_6b\ 63_9b,\ 66_3b\ 66_6b\ 66_9b,\ 69_3b\ 69_6b\ 69_9b \\ 93_3b\ 93_6b\ 93_9b,\ 96_3b\ 96_6b\ 96_9b,\ 99_3b\ 99_6b\ 99_9b \end{matrix}\right\}$$

ubi tamen notandum, hoc loco ob rectam $\overline{z}\,{}_3b$ immotam puncta 33_3b, 63_3b, 93_3b (ideoque loco omnium in figura reperitur solum 3_3b) coincidere, itemque puncta 36_3b, 66_3b, 96_3b, unde etiam figura habetur tantum 6_3b; ac denique cum eodem modo hic coincidant puncta 39_3b, 69_3b, 99_3b, tantum per 9_3b expressa sint. Hoc solidum autem per compendium exprimemus hoc modo: $\overline{xzy}b$, et aliquam ejus superficiem seu locum aliquem ipsius $\overline{zy}b$ exprimemus hoc modo $\overline{zy}b$ (ita exhibetur sectio cylindricae portionis seu solidi hujus facta plano per axem): potest etiam aliqua ejus superficies assumi hoc modo $z\overline{xy}b$ (ita exhibetur sectio hujus portionis cylindricae secundum basin seu plano basi parallelo); item hoc modo $y\overline{xz}b$ (ita exhibetur sectio hujus cylindricae portionis per alium cylindrum axem cum isto communem habentem). Aliae quoque sectiones ejusdem Figurae intelligi possunt, quia infiniti etiam fingi possunt modi eam generandi per motum vel etiam resolvendi in partes secundum certam aliquam legem. Caeterum omnes varietates, quas