et Corollarium hoc ducam: „Quadraturam plenam, analyticam, „aequatione expressam, cujus terminorum dimensiones sint nu- „meri rationales, perfectiorem quam dedimus, cum arcum quadrante „non majorem diximus esse $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11}$ etc. „posita tangente ejus b et radio 1, reperiri non posse.“ Qualiscunque enim dabitur, utique progredietur in infinitum, nam alioqui, ut ostensum est, vel non erit plena sive non quemlibet arcum exhibebit, vel erit certae ad summum dimensionis, quod absurdum esse demonstravimus. Quodsi jam progredietur in infinitum, hac utique, quam dedimus, perfectior non est. Commodiorem nostra ac simpliciorem esse forte possibile est, sed id parum moramur, praesertim cum ne verisimile quidem fiat, simpliciorem atque naturaliorem et quae mentem afficiat magis, salva generalitate, reperiri posse expressionem. Quod facile sic demonstratur. Esto aequatio illa inventa gradus cujuscunque certi, verbi gratia, cubica, quadrato-quadratica, surdesolida seu gradus quinti, gradus sexti, et ita porro, ita scilicet ut maxima aliqua sit aequationis inventae dimensio, exponentem habens numerum finitum. Hoc posito, linea curva ejusdem gradus delineari poterit, ita ut abscissa exprimente sinus, ordinata exprimat arcus, vel contra. Hujus ergo lineae ope poterit arcus vel angulus in data ratione secari, sive arcus, qui ad datum rationem habeat datam, inveniri sinus; ergo problema sectionis anguli universalis certi erit gradus, solidum scilicet, aut sursolidum, aut alterius gradus altioris, quem scilicet natura vel aeqnatio hujus lineae dictae ostendet. Sed hoc absurdum est; constat enim tot esse varios gradus problematum, quot sunt numeri (saltem impares) sectionum: nam bisectio anguli est problema planum, trisectio problema solidum sive conicum, quinquesectio est problema surdesolidum, et ita porro in infinitum; altius fit problema prout major est numerus partium aequalium, in quas dividendus est angulus, quod apud Analyticos in confesso est, et facile probari posset universaliter, si locus pateretur. Impossibile est ergo relationem arcus ad sinum, in universum certa aequatione determinati gradus exprimi. Q. E. D.

III.

COMPENDIUM QUADRATURAE ARITHMETICAE.

Prop. 1. *) Si per Trianguli (ABC) tres Angulos totidem transeant rectae parallelae interminatae (AD, BE, CF), triangulum erit dimidium rectanguli comprehensi sub intervallo (CE) duarum parallelarum et portione tertiae (AG) intercepta inter occursus ejus cum angulo trianguli et latere opposito, si opus, producto (fig. 3).

Hoc facile demonstrabitur, posito ex hoc angulo (A) in latus oppositum (BC) agi normalem (AH); ita triangula similia (AHG, CEB) habentur.

Prop. 2. Series differentiarum inter quantitates ordine perturbato dispositas major est serie differentiarum inter quantitates easdem ordine naturali aut minus perturbato collocatas.

Sint tres quantitates ordine naturali dispositae A, A + B, A + B + C
differentiae B C
summa differentiarum est B + C;
sint rursus eaedem perturbate dispositae A + B, A, A + B + C
differentiae B B + C
fiet summa differentiarum 2B + C, quae major quam ante. Idemque in serie longiore saepius perturbata saepius fiet.

Prop. 3. In serie quotcunque quantitatum differentia extremarum non potest esse major, quam summa differentiarum omnium intermediarum sive continuarum:

A E	A B C D E
m	f g h l

ajo m non esse majorem, quam f + g + h + l. Nam si ordine naturali sint positae, m est aequalis huic summae, ut constat; sin ordo sit perturbatus, major est summa differentiarum, quam differentia maximi et minimi, hoc est primi et ultimi in ordine naturali, per praeced. prop.; ergo et major quam differentia inter eos, qui non sunt maximus et minimus (quippe quorum differentia minor est quam maximi et minimi) quales utique in ordine perturbato non sunt A et E.

*) Im Manuscript fehlen bis zu Prop. 9 die Figuren; ich habe sie, so wie die betreffenden Buchstaben, in den Lehrsätzen ergänzt.

Prop. 4. Differentia duarum quantitatum non potest esse major, quam summa differentiarum tertiae a singulis:

$$\begin{array}{cccccc} A & E & A & C & E & C \\ & f & & b & & d \end{array}$$

ajo f non excedere b + d; nam (per praeced.) si sit $\begin{array}{ccc} A & C & E \\ & b & d \end{array}$, non potest f esse major quam b + d. Idem tamen brevius et per se poterat demonstrari.

Prop. 5. Differentia duarum quantitatum minor est, quam summa duarum aliarum, quarum una unius, altera alterius priorum differentiam a tertia excedit:

Quantitates	A	C	E,	ergo ipsarum	A	E
differentiae verae	b	d		differentia vera	f	
minores quam	g	h		minor quam	g + h.	

Nam g est major quam b, et h quam d ex hypothesi; ergo g + h major quam b + d; at f non est major, quam b + d per praeced.; ergo f est minor quam g + h.

Prop. 6. In curvis puncta ($_1C$, $_2C$, $_3C$, $_4C$, $_5C$ etc.) tam vicina assumi possunt, ut spatium rectilineum gradiforme ($_1N\,_1B\,_5B\,_4P\,_4N\,_3P\,_3N\,_2P\,_2N\,_1P\,_1N$) a spatio curva et rectis comprehenso ($_1D\,_1B\,_5B\,_5D\,_4D\,_3D\,_2D\,_1D$) differat quantitate minore quavis data (fig. 4).

Hic obiter, quid sint *puncta Rerversionum* in curva, nempe in quibus coincidit ordinata et tangens. *Punctum flexus contrarii* est, ubi curva ex concava fit convexa vel contra, adeoque non est tota ad easdem partes cava. Curva habet aut non habet puncta reversionum, prout ad diversos axes refertur, sed puncta flexus sunt absoluta.

Prop. 7. Si a quolibet curvae puncto (C) ad unum anguli recti in eodem plano positi latus (AB) (quod vocabo *directricem*) ducantur ordinatae normales (CB), ad alterum (quod voco *condirectricem*) tangentes (CT) et ex punctis occursus (T) tangentium ducantur perpendiculares (TD) ad ordinatas, si opus, productas, et transeat curva nova ($_1D\,_2D$ etc.) per intersectiones perpendicularium et ordinatarum, erit *Zona* ($_1D\,_1B\,_4B\,_4D\,_3D\,_2D\,_1D$) seu spatium inter axem, duas ordinatas extremas et curvam novam comprehensum, sectoris spatii ($_1CA\,_4C\,_3C\,_2C\,_1C$) inter curvam primam et rectas, ejus extrema cum anguli recti propositi centro jungentes, comprehensi duplum (fig. 4).

Hic obiter explico, *abscissam* esse intervallum ordinatae ab angulo recto, *resectam* esse intervallum tangentis ab eodem angulo, utrumque sumtum in latere anguli, cui occurrit abscissa in directrice, resecta in condirectrice. Curva nova est *figura resectarum*, quia ejus ordinatae sunt resectis aequales.

Demonstrat. Ponatur zona figurae resectarum non esse dupla sectoris figurae prioris; dupli sectoris zonaeque simplae differentia sit Z. Sectori circumscribantur polygona ope tangentium et chordarum, et ex occursu tangentium ad condirectricem ductae normales ad ordinatas dabunt spatium rectilineum gradiforme, idque continuetur (per prop. 7), donec polygonum a sectore, et spatium gradiforme a zona minus differat quantitate data, adeoque minus quam $\frac{1}{4}$ Z. Spatium gradiforme autem est duplum polygoni (per prop. 1). Zona seu spatium quadrilineum vocetur Q, spatium gradiforme seu duplum polygonum P, sector seu trilineum T. Jam diff. inter Q et P minor est quam $\frac{1}{4}$ Z, et diff. inter P et duplum T est minor quam $\frac{2}{4}$ Z; ergo ob schema quantitatum

ergo ob schema quantitatum	Q	P	T,
quarum differentiae minores quam		$\frac{1}{4}$ Z	$\frac{2}{4}$ Z,

erit per prop. 5 diff. inter Q et T minor quam $\frac{3}{4}$ Z, adeoque minor quam Z, adeoque minor data quacunque quantitate, adeoque nulla est haec differentia.

Segmentum est spatium duabus lineis, una curva, altera recta, comprehensum; *sector* est trilineum duabus rectis et una curva comprehensum. Si sectores sint circuli ex centro, figura resectarum eadem est cum *figura angulorum.* Parallelae condirectrici sunt *ordinatae*, partes directricis inde ab angulo communi sunt *abscissae.* Condirecticem voco et directricem conjugatam. Si angulus rectus, directrix dicitur *axis*, ordinatae ad condirectricem sunt *ordinatae conjugatae.* Spatium sub axe, ordinata et curva voco *Trilineum orthogonium*; portio axis est *altitudo,* ordinata terminans dicitur *basis*; quod ad rectangulum circumscriptum trilineo orthogonio deest, vocatur ejus *complementum.*

Prop. 8. Si coincidant initia curvarum, propositae et novae (prop. 7 explicatae) cum angulo recto, zona abit in trilineum orthogonium, et sector in segmentum, manente eadem proportione dupla.

Prop. 9. Si AD linea resectarum, erit retorta **ADCKA** =AGCKA (fig. 5).

Nam AVCKA = ABDA (per prop. 8); jam ABCKA — AVCA = ABCVA = AGCKA, et ABCKA — ABDA = ADCKA; ergo ADCKA = AGCKA.

Prop. 10. AEDLA = AECKA dupl. (fig. 5).

Nam triang. AEC dimidium est rectanguli BE; jam BE — ABDLA = AEDLA et AEC — ACKA (id est minus dimid. ABDLA) = AECKA; ergo AECKA = dimid. AEDLA.

Prop. 11. A figura curvilinea utcunque exigua portionem abscindere, cujus duplo exhibeatur aequalis figura longitudinis infinitae, infinitis modis (fig. 6).

Semper enim abscindi potest trilineum orthogonium μBC, cujus axis Bμ sit normalis ad tangentem $\lambda\mu$, et ex punctis curvae L ducendo tangentes LT ad ipsam BC erit figura resectarum (ipsis BT aequalium) infinita, nunquam occurrens ipsi λ et tamen non plus quam duplo major trilineo, per prop. 8.

Prop. 12. Retorta Cycloidis ABCA (quae est trilineum bicurvilineum, comprehensum arcu cycloidis AC, arcu circuli generatoris AB et BC ordinata cycloidis ad basin rotationis DE parallela) est duplum segmenti cycloidis (ACA) (fig. 7).

Nam ducta tangente CT est AT aequ. BC, unde per prop. 8 constat propositum. *)

Prop. 13. Si BC, ordinata cycloidis, transeat per centrum circuli generatoris, segmentum ACA aequatur dimidio quadrato radii.

Nam aequatur retortae per praecedentem, sed constat ex aliorum inventis, retortam in hoc casu aequari quadrato radii. Sed (sine aliorum inventis) sic ratiocinari licet: AFCSA = triang. AFB + triang. ABC (seu + quadrant. AFBHA) + segm. ACSA; rursus AFCSA = quadrant. AFBHA + retort. AHBCSA (seu + dupl. segm. ACSA, per prop. 12) ergo duos valores aequando fit triang. AFB = segm. ACSA.

---

*) Leibniz hat bemerkt: Prop. 12 etiam demonstrari potest sine ope nostri theorematis novi ex satis jam notis: AFCSA = AFB + ABC + ACSA = AFBHA + AHBCSA (1) ex figura; ABC = AFBHA (2) ut constat (quia BC = AHB), AHBCSA = bis AFB (3), ergo in aequ. 1 explicata per aequationes 2 et 3 sublatis aequalibus restat ACSA = AFB, q. e. d.

Prop. 14. Figuram Angulorum exhibere, cujus scilicet zonae sint ut anguli, modo portiones ab axe abscissae (quae latitudinem zonae faciunt) sint ut sinus (fig. 8).

DE, AB (radius circuli) et EF sint continue proportionales, et GAB etc. FG erit figura angulorum, et erunt zonae GAEFG ut arcus circulares CD seu ut anguli CAD. Sunt enim zonae GAEFG duplae respondentium sectorum CADC, nam ducta tangente DT est AT = EF, nam ob triangula similia ADT et DEA est ED ad DA ut DA ad AT.

Coroll. Hinc spatium infinitum figurae angulorum aequatur semicirculo.

Haec figura Angulorum respondet Hyperbolae, quae est figura Rationum. Ut enim secantibus compl. AL radio AB applicatis seu AL translatis in EH oritur Hyperbola, in qua zonae MBEHM sunt ut logarithmi rationum AB ad AE, sinus totius ad sinum ang. CAD, ita secantibus AT translatis in EF, zonae GAEFG sunt ut anguli CAD.

Curva Analytica est, cujus natura aequatione certi gradus exhiberi potest. *Parameter* est recta constans, aequationem ingrediens. *Curva analytica simplex* est, cujus relatio inter ordinatam et abscissam explicari potest aequatione duorum tantum terminorum, ubi et ordinatae sunt in ratione abscissarum secundum certum numerum multiplicata aut sub-multiplicata, directa aut reciproca. Si directa, tunc curvae vocantur *Paraboloeides*, sin reciproca, *Hyperboloeides*. Sit parameter a, abscissa x, ordinata y, erit aequatio generalis pro Paraboloeide $a^{m-n}x^n = y^m$, eruntque y in ratione abscissarum x *m*plicata sub *n*plicata (ut si esset n = 2 et m = 3, forent y in ratione triplicato-subduplicata ipsarum x); at pro Hyperboloeide fiet $a^{m+n} = x^n y^m$, ubi ipsae y erunt in ipsarum x ratione *m*plicata sub *n*plicata reciproca. *Curva rationalis* est, cum ordinatae valor in numeris haberi potest ex data in numeris abscissa, posito parametros in numeris esse datas. Duae tantum dantur lineae rationales simplices, recta et Hyperbola. Unde Hyperbola est curvarum simplicissima quoad expressionem analyticam, sed circulus quoad constructionem Geometricam. Logarithmica quoque Transcendentium simplicissima esse videtur quoad analysin, cycloeidalis linea quoad constructionem.

Prop. 15. In curva analytica simplice portio axis inter occursum tangentis et ordinatae est ad abscissam ut m, exponens dignitatis ab ordinatis, est ad n, exponentem dignitatis ab abscissa, in directis occursus tangentis Θ ab occursu ordinatae B sumendus versus verticem A, in reciprocis seu Hyperboloeidibus in partem contrariam (fig. 9).

Prop. 16. Si figura generans sit Analytica simplex, etiam figura Resectarum est Analytica simplex ejusdem speciei, ordinatas habens respondentibus ordinatis prioris proportionales ut exponentium potestates ordinatae et abscissae, summa in directis, differentia in reciprocis, est ad exponentem potestatis ordinatae.

Coroll. Hinc et areae eodem modo.

Prop. 17. Ergo in omni figura analytica simplice duplum sectoris ${}_{1}CA\,{}_{2}C\,{}_{1}C$ est ad zonam ${}_{1}C\,{}_{1}B\,{}_{2}B\,{}_{2}C$, ut in praecedente diximus esse resectam ad ordinatam, per praecedentem juncta prop. 7 (fig. 9).

Prop. 18. In figura Analytica simplice zona ${}_{1}C\,{}_{1}B\,{}_{2}B\,{}_{2}C\,{}_{1}C$ est ad zonam conjugatam ${}_{1}C\,{}_{1}G\,{}_{2}G\,{}_{2}C\,{}_{1}C$, ut exponens dignitatum ab ordinatis est ad exponentem dignitatum (proportionalium) ab ordinatis conjugatis (fig. 9).

Haec, ni fallor, nova et optima ad memoriam expressio est. Non difficulter demonstratur ex praecedente. Nam per praecedentem duplus sector est ad zonam, ut summa vel differentia inter m et n est ad m, et pari jure ad zonam conjugatam, ut eadem summa vel differentia est ad n; ergo zonae sunt inter se, ut m ad n.

Prop. 19. Sit Ω ad rectangulorum ${}_{2}B\,{}_{1}B\,{}_{1}C$ et ${}_{1}C\,{}_{2}G\,{}_{1}G$ summam in directis, differentiam in reciprocis, ut m ad m + n in directis, diff. m, n in reciprocis, erit Ω aequalis zonae ${}_{1}C\,{}_{1}B\,{}_{2}B\,{}_{2}C\,{}_{1}C$ (fig. 9).

Prop. 20. Si V + X ad V + Z rationem habeat inaequalitatis finitam sintque X et Z finitae, erit et V finita; quod si alterutra ipsarum X et Z sit infinita, erit V infinita.

Prop. 21. Rectangulum sub abscissa infinite parva et ordinata ad Hyperboloeidem infinita est infinitum, finitum ordinarium, infinite parvum, prout exponens ordinatarum habet ad exponentem abscissarum rationem inaequalitatis, aequalitatis, majoritatis.

Prop. 22. In qualibet Hyperboloeide praeter omnium primam (seu praeter ipsam Hyperbolam Conicam) spatium infinite longum ad unam Asymptoton est area infinitum, ad alteram finitum, infinitum ad illam, in quam demissae ordinatae exponentem habent abscissarum exponente minorem, finitum, cum majorem (fig. 10).

Hoc ita demonstro: ${}_{0}C\,{}_{0}B\,{}_{1}B\,{}_{1}C\,{}_{0}C$ (id est spatium longitudine infinitum ${}_{0}CP\,{}_{1}C\,{}_{0}C$ plus rectan. finit. $P\,{}_{1}C\,{}_{1}B\,{}_{0}B$, seu V + X, posito spatio V, rectangulo X) est ad ${}_{0}C\,{}_{0}G\,{}_{1}G\,{}_{1}C\,{}_{0}C$ (id est ${}_{0}CP\,{}_{1}C\,{}_{0}C$ plus rectang. ${}_{0}G\,{}_{0}CP\,{}_{1}G$ altitudinis ${}_{0}G\,{}_{0}C$ infinite parvae, baseos ${}_{0}G\,{}_{1}G$ infinite longae, seu ad V + Z) ut m ad n, quae est ratio inaequalitatis (nam Hyperbolam Conicam exclusimus) finita; ergo per 20. sit Z infinita, erit et V infinita. Iam si V et Z finita vel infinita, etiam V + X, imo V + X + Z finita vel infinita erit. Nam X semper finita nil mutat, idem est si ad V + X + Z, id est ad ${}_{0}CP\,{}_{1}C\,{}_{0}C + P\,{}_{1}C\,{}_{1}B\,{}_{0}B + {}_{0}C\,{}_{0}G\,{}_{1}GP$ addatur rectangulum infinite parvum $P\,{}_{1}GA\,{}_{0}B$ (quippe baseos ordinarie finitae, altitudinis infinite parvae) ut compleatur quinquelineum infinitum ${}_{0}C\,{}_{0}GA\,{}_{1}B\,{}_{1}C\,{}_{0}C$. Sed cum minor est exponens ordinatarum, quam abscissarum, tunc Z est infinitum (per prop. 21); sin major, contra. Idem ergo de quinquelineo dicendum est.

Schol. Per infinitam quantitatem intelligimus hic incomparabiliter magnam.

Prop. 23. Quadratura figurarum analyticarum simplicium completarum generalis: Figura analytica simplex completa est ad rectangulum sub ultima abscissa et ultima ordinata seu sub altitudine et basi, ut m ad m + n in Paraboloeidibus, seu ut m ad differentiam inter m et n seu ut m ad m — n (quia m major quam n, ut area sit finita) in Hyperboloeidibus.

Figuram completam voco, quae incipit ab abscissa minima seu nulla; oportet autem in Hyperboloeidibus ordinatas assumere secundum eum axem, quo fit dignitas ordinatarum major, quam abscissarum, seu m major quam n, per praeced.

Prop. 24. 25*). In Quadratura simplicium rationalium, speciatim in Paraboloeidibus, posita abscissa x, ordinata y, parametro unitate et adeo exponente abscissae n, ordinatae 1, seu ita ut sit

---

*) In dem ursprünglichen Tractat haben die Lehrsätze 24 und 25 eine andere Fassung, als Leibniz hier giebt.

$y=x^n$, fiet area completa paraboloeidalis: $x^{\frac{n+1}{\cdot}} : \overline{n+1}$,

$$\begin{array}{lllllll} \text{seu omnium} & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & \text{etc.} \\ \text{summa} & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \frac{x^4}{4} & \frac{x^5}{5} & \frac{x^6}{6} & \text{etc.} \end{array}$$

in Hyperboloeidibus $y=1:x^{\frac{n}{\cdot}}$, fiet area completa: $-1:\overline{n-1x^{\frac{n-1}{\cdot}}}$

seu $x^{\frac{1-n}{\cdot}} : \overline{1-n}$,

$$\begin{array}{l|c|c|c|c|l} \text{seu omnium} & \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^3} & \frac{1}{x^4} & \frac{1}{x^5} & \text{etc.} \\ \text{summa} & \frac{1}{0}-\frac{1}{x} & \frac{1}{0^2}-\frac{1}{2x^2} & \frac{1}{0^3}-\frac{1}{3x^3} & \frac{1}{0^4}-\frac{1}{4x^4} & \end{array}$$

$$\text{Generaliter } \int \overline{x^n\, dx} = \frac{\overline{\text{diff. } 0^{\frac{n+1}{\cdot}},\ x^{\frac{n+1}{\cdot}}}}{n+1}$$

et in figura non completa

$$\int \overline{x^n\, dx} = \frac{\overline{\text{diff. } (x)^{\frac{n+1}{\cdot}},\ x^{\frac{n+1}{\cdot}}}}{n+1}$$

In *Scholio* annotatur cautio necessaria circa ratiocinationes de infinito; v. g. posset quis ita ratiocinari in Antiparabola, ubi ordinatae BC sunt reciproce ut quadrata abscissarum AB, erit per prop. 18 zona quaevis ${}_1C_1B_2B_2C_1C$ dimidia respondentis conjugatae zonae ${}_1C_1G_2G_2C_1C$, ergo spatium infinitum ${}_2C_2BA$ etc. ${}_1C_2C$ completum ab omnibus zonis erit dimidium spatii ${}_2C_2G$ etc. ${}_1C_2C$ completi ab omnibus conjugatis; ergo totum erit dimidium partis. In Hyperbola Conica, quia zona aequalis zonae conjugatae, fiet totum aequale parti. Unde patet rem reducendam ad demonstrationes apagogicas.

Prop. 26. Summa progressionis Geometricae in infinitum decrescentis est ad terminum primum, ut terminus primus ad differentiam primi a secundo.

Prop. 27. Diameter circuli est ad sinum versum in duplicata ratione secantis arcus dimidii ad ejus tangentem. Est autem tangens arcus dimidii ipsa resecta. Unde si sit HB diameter, BF resecta, FG sinus versus, fit $FG=\frac{HB\ .\ BF^2}{AB^2+BF^2}=\frac{HB\ .\ CB^2}{AC^2}$ (fig. 11).

Prop. 28. $\frac{1}{2}$ $FG=\frac{BF^2}{AB^1}-\frac{BF^4}{AB^3}+\frac{BF^6}{AB^5}-\frac{BF^8}{AB^7}$ etc. oportet autem AB non esse minorem BF.

Prop. 29. Spat. BFGB dimid. seu spatium $BCDB=\frac{BC^2}{3AB}-\frac{BC^5}{5AB^3}+\frac{BC^7}{7AB^5}$ etc. oportet autem AB non esse minorem quam BC.

Prop. 30. Si a dimidio rectangulo CBE sub BE sinu verso arcus integri BOD et BC tangente semiarcus BO comprehenso, seu si a triangulo BCD auferatur series $\frac{BC^3}{3AB}-\frac{BC^5}{3AB^3}$ etc., restabit segmentum circuli DBOD arcu integro et ejus subtensa contentum; oportet autem arcum BOD non esse quadrante majorem.

Prop. 31. Si radius circuli sit 1, et arcus propositi semiquadrante minoris BO tangens BC vel t, fiet arcus ipse $t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7+$ etc.

Prop. 32. Circulus est ad quadratum circumscriptum seu arcus quadrantis ad diametrum, ut $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ etc. ad unitatem.

Prop. 33. Series fractionum, quarum numerator constans, nominatores vero progressionis arithmeticae, est progressionis harmonicae.

Prop. 34. Posito quadrato diametri 1, circulus est differentia duarum serierum progressionis harmonicae $\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}$ etc. et $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}$ etc.

Prop. 35. Circulus est ad quadratum inscriptum ut $\frac{1}{4-1}+\frac{1}{36-1}+\frac{1}{100-1}+\frac{1}{196-1}$ etc. ad $\frac{1}{4}$, seu ut $\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{9-\frac{1}{4}}+\frac{1}{25-\frac{1}{4}}+\frac{1}{49-\frac{1}{4}}$ etc. ad 1.

Prop. 36. Summa seriei infinitae $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}$ etc. $=\frac{1}{2}$.

Prop. 37. 38. Quadratum circumscriptum est ad circulum, ut $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}$ etc. est ad $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ etc.

Prop. 39. Summa seriei infinitae $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$ etc. $=2$; nominatores sunt numeri triangulares.

Prop. 40.

Triangulum Arithmeticum

1	1	1	1	1	1	1	etc.
1	2	3	4	5	6	etc.	
1	3	6	10	15	etc.		
1	4	10	20	etc.			
1	5	15	etc.				
1	6	etc.					
1							
	numeri naturales	trigonales	pyramidales	trigono-trigonales	trigono-pyramidales	pyramido-pyramidales	trigono-trigono-trigonales

Triangulum Harmonicum

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	etc.
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	etc.	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	etc.		
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	etc.			
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	etc.				
$\frac{1}{6}$	etc.					
naturalium	trigonalium	pyramidalium	trigono-trigonalium	trigono-pyramidalium	pyramido-pyramidelium	
summae $\frac{1}{0}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	etc.

Reciproci

Prop. 41.

Summa serierum infinitarum

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{63} \text{ etc.} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} \text{ etc.} = \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Prop. 42. Symbolismus quadraturae Circuli et Hyperbloae.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{63}+\frac{1}{80}+\frac{1}{99}+\frac{1}{120} \text{ etc.} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \quad \frac{1}{35} \pm \frac{1}{63} + \frac{1}{99} \text{ etc.} \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} \text{ etc.} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} \text{ etc.} \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{120} \text{ etc.} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \frac{3}{4} \text{ per prop. 41} \\ \frac{2}{4} \text{ per prop. 36} \\ \frac{1}{4} \text{ per prop. 41} \\ \text{circulo p. prop.35} \\ \text{Hyperbolicae areae CBMC, logarithmo binarii si unitatis ...} \end{array}\right.$$

cujus quadratum inscriptum seu potentia est $^1/_4$

Schol. In Hyperbola (fig. 12) sit AB, 1, BE, x, EH $= \frac{1}{1-x}$, fit CBEHC $= \frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$ etc. et si BM, x et ML $= \frac{1}{1+x}$, fit CBMLC $= \frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$ etc. Et quia zona Hyperbolica conjugata HQDCH aequalis zonae CBEHC, hinc ejusdem spatii Hyperbolici valor bis obtinetur, semel per signa + et — alternantia, altero modo per sola affirmantia. Potest etiam pro AB seu AD seu 1 alia quaelibet assumi, ut AQ, ponendo AF = AQ + QF, erit FG $= AB^2 : \overline{AQ + QF}$, et spatium Hyperbolicum HQFGH erit ad AB^2, ut $\frac{QF}{1AQ} - \frac{FQ^2}{2AQ^2} + \frac{QF^3}{3AQ^3} - \frac{QF^4}{4AQ^4}$ etc. ad unitatem. Unde spatium

Hyperbolicum haberi potest infinitis modis et est generaliter: $\frac{DF}{1DA} - \frac{DF^2}{2AD^2} + \frac{DF^3}{3AD^3} - \frac{DF^4}{4AD^4}$ etc. $= \frac{DQ+QF}{1AQ} + \frac{DQ^2-QF^2}{2AQ^2} + \frac{DQ^3+QF^3}{3AQ^3} + \frac{DQ^4-QF^4}{4AQ^4}$ etc. posito DF = DQ + QF et AQ = AD + DQ et puncto Q pro arbitrio sumto. Quae memorabilis est aequatio inter duas series infinitas.

Prop. 43. Quadratura generalis sectionis Conicae centrum E assignabile habentis sive sectoris EAGC Circuli, Ellipseos aut Hyperbolae cujuscunque, cujus vertex A et axis AB (fig. 13). Regula autem haec est: Si AT (resecta ex AL tangente verticis per CT tangentem alterius puncti extremi C) vocetur t, rectangulum sub semilatere recto in semilatus transversum (seu quadratum semiaxis conjugati) vocetur unitas, erit sector EAGC aequalis rectangulo sub EA semilatere transverso et recta, cujus longitudo sit $\frac{1}{1}t \pm \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \pm \frac{1}{7}t^7$ etc. ubi ± valet + in Hyperbola, — in Circulo vel Ellipsi. Nam in omni sectione est resecta AT ad latus rectum NP ut abscissa seu sagitta AB ad ordinatam seu chordam FC. Unde porro facile demonstratur esse AB seu x $= 2AE . t^2 : \overline{1 \pm t^2}$, ubi ± est + in Hyperbola et — in Ellipsi vel Circulo. Unde trilin. ATDA (figurae resectarum complementale) vel per prop. 10 trilin. CTAGC est $\frac{1}{3}t^3 \pm \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 \pm \frac{1}{9}t^7$ etc. ductum in AE; porro triang. EAL ± triang. CTL = trapez. EATC (quod sectori circumscriptum in Ellipsi, inscriptum in Hyperbola) = rectang. EAT, et AL in EA ad EA^2 : : BC : EB, ut patet. Jam est TL ad TD vel AB ut rq*) ad EB in BC (nam TL = AL — AT, et AL = EA . BC : EB et AT = r AB : CB, ergo TL = EA . BC^2 — r AB. $\overline{AE \pm AB}$, : CB. $\overline{AE \pm AB}$; jam $BC^2 = 2r . AE \pm \frac{r}{AE} AB^2$; ergo fiet TL = EA . r . AB. : CB . EB seu TL : AB : : r . EA (seu rq) : $\overline{EB . BC}$, ut asserebatur). Est ergo rectang. EAL $= AE^2 . BC : EB$, et bis triang. CTL seu TL in AB $= \frac{EA . r . AB^2}{EB . CB}$, et EBL ± 2CTL $= BE^2$. $\overline{BC^2 \pm AE . r . AB^2}$, : CB . EB, seu fiet EAL ± 2CTL = AE, $\overline{\overline{AE . 2r . AB + 2r . AB^2}}$, : CB . EB; ergo fit 2EAL ± 2CTL = 2AE . AT, seu tri-

*) Aus einer Randbemerkung geht hervor, dass Leibniz AE = q, $\frac{1}{2}$NP = r setzt.

ang. EAL $\pm$ triang. CTL id est Trapez. EATC $=$ AE in AT seu AE . *t*, cui si addatur in Hyperbola, dematur in Ellipsi trilineum CTAGC, fiet sector EAGC $=$ rectangulo sub AE et recta $\frac{1}{1}t \pm \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \pm \frac{1}{7}t^7$ etc. Ita tandem generalis habetur quadratura Arithmetica sectionis Conicae centrum habentis, pulcherrimaque Circuli Ellipseosve cum Hyperbola quacunque analogia. Nunc ad Logarithmos aliaque cognata progrediamur.

Hic primum in antecessum explicantur *Logarithmi*: Si sint duae series sibi ordine respondentes fiantque numeri unius ex se invicem additione, ut numeri alterius multiplicatione, illa erit Logarithmorum, haec Numerorum *). *Curvam logarithmicam* ita explico: Si sit curva RAK (fig. 14), axis CDAX, ordinatae RD, KX, abscissae CD, CX, sitque ratio CX ad CA multiplicata rationis CD ad CA (CA, CD, CX Numerorum) in ratione KX ad RD (Logarithmorum) curva dicetur logarithmica.

Prop. 44. $\frac{n}{1} - \frac{n^2}{2b} + \frac{n^3}{3b^2} - \frac{n^4}{4b^3}$ etc. sunt ut logarithmi rationum $b + n$ ad n. Et logarithmi rationum sunt summis hujusmodi proportionales. Nam omnes logarithmi rationum sunt proportionales inter se, evanescente scilicet communi additamento per subtractionem logarithmi consequentis a logarithmo antecedentis.

Prop. 45. Spatium Hyperbolae Conicae est infinitum, seu $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ etc. est quantitas infinita.

Cum curvae logarithmicae ordinatae XK sint proportionales spatiis Hyperbolicis VAXγV, et ultima C etc. sit proportionalis spatio Hyperbolico infinite longo VAC etc. V, sit autem C etc. infinita, erit et spatium hoc Hyperbolicum infinitum.

Prop. 46. Quadratura figurae logarithmicae. Respondeat ita Hyperbola Vγ (cujus Asymptoti C etc. et CX) ut sit Xγ in AV aequalis areae hyperbolicae VAYγV . CA $=$ a $=$ AV, AX $=$ x, γX $= \frac{a}{a+x}$, $\int \frac{a}{a \pm x} dx = y =$ KX, et $dy = dx . a : \overline{a \pm x}$, et $ady \pm xdy = adx$, et $ax - ay = \pm \int xdy =$ AŋKA. Porro dy : dx : : a : a $\pm$ x : : ɳƱ : ƱR; jam ƱR $= a \pm x$, ergo ɳƱ $=$ a constans, estque aa potentia Hyperbolae, cujus areae sunt proportionales logarithmis seu ordinatis curvae in a ductis, posito ipsius a logarithmo

---

*) Haec definitio non placet, quia non ostendit generationem nec possibilitatem. Bemerkung von Leibniz.

$= 0$. Eademque a est intervallum tangentis et ordinatae in axe, et potest haec a dici *numerus primarius*.

Prop. 47. Si sit AX $=$ x et XK $=$ y et CA $=$ a, et cum AX $=$ CA, tunc log $= 0$ et a numerus primarius et y adeo logarithmus ipsius $a + x$ ad a vel a ad $a - x$, rationis semper majoris termini ad minorem, fiet $x = \frac{y}{1} \pm \frac{y^2}{1.2a} + \frac{y^3}{1.2.3a^2} \pm \frac{y^4}{1.2.3.4a^3}$ etc.

$$\text{Sit } ax = 10\,a + 11\,ay + 12\,ay^2 + 13\,ay^3 + 14\,ay^4 \text{ etc.}$$
$$-ay = \qquad -\ ay$$
$$\widetilde{= \pm \int x\,dy} = \qquad \pm \frac{1}{1}.10y \pm \frac{1}{2}.11y^2 \pm \frac{1}{3}.12y^3 \pm \frac{1}{4}.13y^4 \text{ etc.}$$

ergo fit $10\,a = 0$ et $11 = 1$ et $12 = \pm \frac{1}{1.2a}$ et $13 = \frac{1}{1.2.3a^2}$ et $14 = \pm \frac{1}{1.2.3.4a^3}$ etc. adeoque $x = \frac{1}{1}y \pm \frac{1}{1.2}y^2 + \frac{1}{1.2.3}y^3 \pm \frac{1}{1.2.3.4}y^4$ etc. posito $a = 1$, et $1 + x = 1 + \frac{1}{1}y + \frac{1}{1.2}y^2 + \frac{1}{1.2.3}y^3$ etc. $=$ num., posito y logarithmo rationis ipsius numeri ad unitatem cujus log. est 0.

Prop. 48. Si arcus sit a, radius 1, sinus versus v, erit $v = \frac{a^2}{1.2} - \frac{a^4}{1.2.3.4} + \frac{a^6}{1.2.3.4.5.6}$ etc.

Coroll. 1. Iisdem positis, sinus complementi $c = 1 = \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^4}{1.2.3.4} + \frac{a^6}{1.2.3.4.5.6}$ etc.*)

Coroll. 2. et sinus rectus $s = \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5}$ etc.

Coroll. 3. et segmentum circulare duplum $= \frac{a^3}{1.2.3} - \frac{a^5}{1.2.3.4.5} + \frac{a^7}{1.2.3.4.5.6.7}$ etc.

Coroll. 4. $\int \overline{sda} = \frac{a^2}{1.2} - \frac{a^4}{1.2.3.4}$ etc. ergo area si-

---

*) $c = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24}$ etc. satis apta ad praxin, quia error minor quam $\frac{a^6}{720}$, unde etiam, cum arcus aequatur radio, error est minor quam $\frac{1}{27}$. Bemerkung von Leibniz.

nuum rectorum ad arcum aequalis rectangulo sub sinu verso et radio.

$$\int vda = \frac{a^3}{1.2.3} - \frac{a^5}{1.2.3.4.5}$$ etc. seu area sinuum versorum ad arcum aequalis rectangulo sub radio et differentia inter arcum et sinum.

De sinubus complementi non est opus dicere separatim, non enim dant aliam quam sinuum versorum figuram; praestat autem adhibere sinus versos, quia crescunt cum arcu, secus sinus complementi.

Prop. 49. Si quantitas a sit aequalis seriei infinitae $b - c + d - e + f - g$ etc. erit b, $b - c + d$, $b - c + d - e + f$ etc major quam a, excessu existente minore quam c, e, g etc.; $b - c$, $b - c + d - e$, $b - c + d - e + f - g$ etc. minor quam a, defectu existente minore quam d, f, h etc.

Prop. 50. Ex datis angulis latera, ex datis lateribus angulos, ex rationibus logarithmos, ex logarithmis rationes invenire.

Prop. 51. Problemata prop. 50 quadraturaque generalis sectionum Conicarum centro praeditarum non possunt magis Geometrice inveniri.

Aus so vielen Lehrsätzen besteht der ursprüngliche Tractat. Zu dem vorstehenden Compendium hat Leibniz noch Folgendes hinzugefügt: Supplendum adhuc foret, quomodo sinus et tangentes artificiales possint haberi ex arcubus, et contra arcus ex ipsis. Nach einer längeren Untersuchung giebt er folgendes Resultat: Sit arcus a, sinus rectus r, radius 1, fiet $a = r + \frac{1}{6} r^3 + \frac{3}{40} r^5 + \frac{5}{112} r^7$ etc. seu $a = r + \overset{A}{\frac{1.1}{2.3}} rr A + \overset{B}{\frac{3.3}{4.5}} rr B + \overset{C}{\frac{5.5}{6.7}} rr C$ etc. Sit arcus a, sinus versus x, diameter 1, fiet $a = x^{1:2} + \frac{1}{6} x^{3:2} + \frac{3}{40} x^{5:2}$ etc. Si arcus capiendus in ratione data ad alium arcum, sit diameter 1, chorda arcus dati ϖ, et arcus quaesitus ad arcum datum ut n ad 1, et erit arcus quaesiti chorda $\overset{A}{n\varpi} + \overset{B}{\frac{1 - nn}{2.2} \varpi A} + \overset{C}{\frac{9 - nn}{4.5} \varpi^2 B} + \frac{25 - nn}{6.7} \varpi^2 C$ etc. ubi si n sit numerus impar, series desinit esse infinita, et prodit aequatio eadem, quae

prodit per vulgarem Algebram. Sit radius 1, arcus a, tangens artificialis $\sqcap$, quadrantis arcus q et $2a - q = e$, et fiet

$$\sqcap = e + \frac{1}{6} e^3 + \frac{5}{24} e^5 + \frac{61}{5040} e^7 + \frac{277}{72576} e^9 \text{ etc.}$$

IV.

Ad proferendum aliquid plausibile specimen nostrorum inventorum Geometricorum, quod ad captum sit eorum, qui veterum Methodis unice assueti sunt, non incommodum erit theorema generale, cui Tetragonismum Circuli Arithmeticum inaedificavi, et ex quo statim sequuntur areae omnium Paraboloeidum et Hyperboloeidum, cujus etiam ope segmentum quoddam Cycloeidis vestrae Florentinae (haec enim, ni fallor, ei patria est, si res aeterna patriam habere potest) absolute quadravi, non supposita circuli dimensione, aliaque multa praestare possum.

Theorema ipsum ita se habet: *Si ex curvae cujusque puncto quocunque in duas condirectrices indefinitas ducantur rectae, ordinata ad unam, tangens ad aliam, et in ordinatis (si opus productis) sumantur inde ab axe partes aequales respondentibus resectis per tangentes ab altera indefinitarum, quae partes jam sint ordinatae ad curvam novam per earum terminos transeuntem, quam vocabimus curvam resectarum, erit zona curvae novae aequalis duplo respondenti sectori curvae prioris, comprehenso rectis ad extrema arcus in curva priore sumti ab intersectione condirectricium ductis*; seu ut ope figurae rem explicemus: Si ex curvae CC (fig. 15) puncto C quocunque in duas condirectrices indefinitas ABB, AEE ducantur rectae CB, CE, ex quibus CB sint ordinatae et CE tangentes, et in ipsis CB (si opus productis) sumantur inde ab axe AB ipsae BF aequales ipsis AE respondentibus resectis ab indefinita AEE per tangentes CE, et per puncta F transeat linea nova FF, cujus ordinatae jam erunt BF, ajo zonam ${}_1F_1B_3B_3F_2F_1F$ aequari duplo segmento ${}_1CA_3C_2C$ etc. Hoc facile demonstrari potest per inscriptas et circumscriptas Methodo Archimedea, accedente hoc *lemmate* (si jungas rectam ${}_1C_2C$), quod in omni triangulo A_1C_2C, per cujus tres angulos transeant tres rectae parallelae A_1E_2E, ${}_1B_1F_1C$, ${}_2B_2F_2C$, rectangulum sub ${}_1B_2B$ et A_1E seu sub intervallo duarum rectarum et portione tertiae inter angulum A, per quem transit, et productum latus oppositum ${}_1C_2C$ interceptae comprehensum aequetur duplo triangulo A_1C_2C. Hinc enim propositum non difficulter demonstratur Methodo Archimedea: Sumantur puncta quotlibet in curva proposita (fig. 16), nempe ${}_1C$, ${}_2C$, ${}_3C$, ${}_4C$ etc. iisque totidem respondentia ${}_1F$, ${}_2F$, ${}_3F$, ${}_4F$ etc. in curva resectarum, et ipsae CE tangant curvam propositam; jungatur A_1C occurrens ipsi ${}_2C_2E$ in ${}_1K$; similiter jungatur A_2C occurrens ipsi ${}_3C_3E$ in ${}_2K$, et ita porro; ducantur ex K ad axem ABB normales ${}_1K_1\beta$, ${}_2K_2\beta$ etc. et ex ${}_2E$ ducatur parallela axi ${}_2E_1F$, occurrens ipsi ${}_1B_1C$ in ${}_1F$, ipsi ${}_1\beta_1K$ in ${}_1\varphi$, ipsi ${}_2B_2C$ in ${}_1H$; similiter ducatur ${}_3E_2F$ occurens ipsi ${}_2B_2C$, ${}_2\beta_2K$, ${}_3B_3C$ in ${}_2F$, ${}_2\varphi$, ${}_2H$, et ita porro. Ex *lemmate* patet, triangulum A_1K_2C aequari dimidio rectangulo ${}_1\varphi_1\beta_2B_1H$, et similiter triangulum A_2K_3C aequari dimidi rectangulo ${}_2\varphi_2\beta_3B_2H$, itaque et summa omnium hujusmodi triangulorum aequatur dimidiae summae omnium hujusmodi rectangulorum. Sed differentia summae triangulorum ($A_1K_2C + A_2K_3C + A_3K_4C +$ etc.) a sectore (${}_1CA_4C_1C$) est minor data, si satis vicina sibi sumantur puncta ${}_1C$, ${}_2C$, ${}_3C$ etc.; [differentia enim haec consistit in exiguis triangulis simul sumtis ${}_1C_1K_2C + {}_2C_2K_3C$ etc. quorum quodlibet, ut ${}_1C_1K_2C$, ad respondens triangulum A_1C_2C minorem data rationem accipere potest, ergo et summa omnium illorum ad summam horum]. Similiterque et differentia summae rectangulorum (${}_1\varphi_1\beta_2B_1H + {}_2\varphi_2\beta_3B_2H +$ etc.) a zona ${}_1F_1B_4B_4F_1F$ fiet minor data, [consistit enim haec differentia in summa exiguorum rectangulorum ${}_1F_1B_1\beta_1\varphi$, ${}_2F_2B_2\beta_2\varphi$ etc. et in summa exiguorum trilineorum ${}_1F_1H_2F_1F$, ${}_2F_2H_3F_2F$ etc. quae summae etiam erunt minores data quantitate, respectu summae rectangulorum ${}_1\varphi_1\beta_2B_1H$ etc. quum quodlibet exiguorum rectangulorum aut trilineorum ad tale respondens rectangulorum minorem data rationem accipiat]. Itaque differentia dimidiae zonae sectorisque erit minor data, adeoque sector est dimidiae zonae aequalis. Q. E. D.

Fateor autem me Theorematis hujusmodi opus non habere, nam quicquid ex illis duci potest, jam in calculo meo comprehenditur; libenter tamen iis utor, quia calculum imaginationi quodammodo conciliant. Hoc certe theorema quomodo ex mea *Characteristica* derivetur, annotare placet. Compendii causa exhibeamus rem nunc in casu, quo initium curvae ${}_1C$ (fig. 17) incidit in ipsum punctum A, quo casu sector abit in segmentum, et zona in trilineum, adeoque trilineum $A_3B_3F_2FA$ aequatur duplo segmento

A_3C_2CA. Jam AB seu EF sit x, BC, y, AE seu BF sit z, erit $FC = y - z$, et ob tangentem EC est dx ad dy ut EF ad FC, seu $dx : dy = x : \overline{y - z}$ (1), ergo $ydx - zdx = xdy$ (2), vel $2ydx - zdx = xdy + ydx$ (3). Jam $\int xdy + \int ydx$ vel $\int \overline{xdy + ydx} = xy$ (4) (ut constat ex nostro calculo differentiali, quia $d, xy = xdy + ydx$ (5)), ergo ex aeq. 3 ope aeq. 4 fit $2\int ydx - \int zdx = xy$ (6) seu $\int ydx - \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}\int zdx$ (7). Est autem $\frac{1}{2}\int zdx$ nihil aliud quam dimidium trilinei $A_3B_3F_2FA$ et $\frac{1}{2}xy$ est triangulum A_3B_3C et $\int ydx$ est trilineum $A_3B_3C_2CA$, unde $\int ydx - \frac{1}{2}xy$ est segmentum A_3C_2CA, et proinde ex aeq. 7 fit dimid. Trilin. $A_3B_3F_2FA =$ segm. A_3C_2CA (8), quod demonstrandum proponebatur.

Ex his jam demonstratis in trilineo et segmento, sequitur idem in zona et sectore, si scilicet resecemus minora aequalia, trilineum A_2B_2FA et segmentum A_2CA, a majoribus aequalibus A_3B_3FA et A_3CA, remanent aequalia, nempe zona ${}_2F_2B_3B_3F_2F$ et sector ${}_3CA_3C_2C$.

Hoc porro Theoremate demonstrato, sequuntur quadraturae omnium Paraboloeidum et Hyperboloeidum, seu omnium figurarum, ubi resectae AE (fig. 18) ad ordinatas BC habent rationem eandem constantem, quae in Parabola communi est ut 1 ad 2, in cubica ut 1 ad 3, in quadratico-cubica ut 2 ad 3 seu ut 1 ad 3 : 2 etc. Sit scilicet figura talis quadranda, ubi ratio resectae AE ad ordinatam BC sit ut 1 ad r, ergo erit ABFA ad ABCA ut 1 ad r, seu $ABCA = r \,.\, ABFA$ (1); rursus $ABFA =$ bis segm. ACA (2), seu quia segm. $ACA = ABCA -$ triang. ABC (3), ideo ex aeq. 2 per aeq. 3 fiet $ABFA =$ bis ABCA — bis ABC (4) seu $ABFA =$ bis ABCA — rectang. AB in BC (5), quo valore ipsius ABFA substituto in aeq. 1 fit $ABCA = 2r \,.\, ABCA - r$ rectang. AB in BC (6). Ergo denique $ABCA = r : \overline{2r - 1}$ rectang. AB in BC (7), hoc est ABCA est ad rectangulum circumscriptum ut r ad $\overline{2r - 1}$. Idem locum suo modo habet non tantum in Paraboloeidibus, ubi potentiae ordinatarum sunt ut quaedam potentiae abscissarnm, sed in Hyperboloeidibus, ubi potentiae ordinatarum sunt reciproce ut potentiae abscissarum. Unus tamen casus excipitur, ubi fit $r - 1 = 0$, quod contingit in Hyperbola Conica, quae utique talem quadraturam non admittit. Nempe generaliter si $y = x^n$, fiet zona CB(B)(C)C (fig. 19) ad diff. inter rectang. ABC et A(B)(C) ut 1 ad $1 + n$, at in Hyperbola Conica haec differentia $= 0$, et quia $n = -1$, fit $1 + n$ etiam $= 0$. Sed haec omnia, ut verum fatear, non sunt nisi ad populum phalerae pro illis, qui analysin nostram non intelligunt, nam quadraturae talium figurarum ex nostro calculo immediate deducuntur.

Nunc subjiciam propositionem a me inventam circa Cycloeidem, quae ex eodem theoremate statim derivatur. Nempe segmentum cycloeidale ACcA (fig. 20), quod absciuditur recta AC ducta a vertice A ad punctum C, quo basi parallela BC ducta per B, circuli generatoris centrum, curvae occurrit, aequatur semiquadrato radii circuli generatoris seu triangulo ABN. Nam (per theorema nostrum) segmentum hoc ACcA aequatur dimidiae summae omnium AE axi ordinatim applicatarum, id est (quia in Cycloeide AE aequatur semper ipsi nc) dimidiae summae omnium nc axi ordinatim applicatarum, quae summa aequatur retortae AnNCcA. Hinc jam ita ratiocinor: Triang. ABN + triang. ANC + segm. ACcA = trilin. cycloeidal. ABCcA = quadrant. ABNnA + Retort. AnNCcA. Jam triang. ANC = quadrant. ABNnA (quia trianguli ANC altitudo est radius AB, et basis NC aequalis quadrantis arcui AnN) et retorta AnNCcA = duplo segmento ACcA (per hic demonstrata). Ergo in duobus valoribus trilinei cycloeidalis, sublatis utrobique aequalibus, fit segm. ACcA = triang. ABN; ergo segmentum ACcA aequatur semiquadrato radii. Q. E. D.

V.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. LEIBNIZ ÉCRITE D'HANOVRE A L'AUTEUR DU JOURNAL TOUCHANT LA QUADRATURE D'UNE PORTION DE LA ROULETTE. *)

Il n'y a que deux portions purement cycloidales et simples, c'est à dire segmens compris entre la courbe de la cycloide et une droite, dont on ait trouvé jusqu'icy la quadrature absolue, sans supposer celle du cercle. *La première quadrature* est de l'invention de Mons. Hugens, sçavoir que (fig. 21) la droite KGE (parallele au plan MI, sur lequel le cercle generateur ACHNA roule, et éloignée du sommet A de la distance AG, quatrieme partie du diametre AH) retranche de la cycloide MIEAK le *segment horizontal* KEAK égal à AOPH, *demyhexagone* inscrit dans le cercle generateur. *L'autre*

*) Journal des Sçavans de l'an 1678 p. 219 sq.

quadrature m'est venue dans l'esprit à l'occasion d'un theoreme fort general que je donneray ailleurs. Je l'ay communiquée à plusieurs à Paris: mais comme je puis juger de ce que Mons. de la Hire n'en fait point de mention, qu'elle n'est pas encor assez connue, je vous la donne icy enoncée et demonstrée.

Theoreme.

AFEA *segment incliné* de la cycloide, compris entre AEF portion de la courbe cycloidale et AF droite menée du sommet A au point F qui répond à B, centre du cercle generateur ACHNA, est égal au Triangle rectangle ABC, c'est à dire au demyquarré du rayon.

Pour en donner la demonstration, je suppose

1) que le triangle ACF est égal au quadrant ABCDA, parce que la base de ce triangle CF est égale à ADC arc du quadrant et sa hauteur est le rayon AB;

2) que la Retorte ADCFEA est égale au quarré du rayon, ou au double triangle ABC, ce qui se trouve chez les Peres Fabry et Lalouere, chez Mons. Wallis, Mons. de la Hire et autres.

Demonstration.

AFEA égal à .... + ACFEA .... — ACF par la figure
segment cycloidal trilingne triangle

+ ACFEA .... — ABCDA par la 1. supposit.
triligne quadrant

+ ADCFEA ... + ACDA .. — ABCDA par la figure
retorte segment de cercle quadrant

+ 2 ABC ..... + ACDA .. — ABCDA par la 2. supposit.
triangles segment de cercle quadrant

+ ABC + ABC ... + ACDA .. — ABCDA cela s'entend
triangle triangle segment de cercle quadrant

+ ABC .... + ABCDA . — ABCDA par la figure
triangle quadrant quadrant

donc AFEA égal à ABC .... ± rien
segment cycloidal triangle

ce qu'il falloit demonstrer.

VI.

DE VERA PROPORTIONE CIRCULI AD QUADRATUM CIRCUMSCRIPTUM IN NUMERIS RATIONALIBUS EXPRESSA. *)

Proportiones curvilineorum ad Rectilinea investigare Geometrae semper sunt conati, et tamen nunc quoque, etiam post Algebram adhibitam, nondum ea res satis in potestate est secundum methodos quidem hactenus publicatas: neque enim haec problemata ad aequationes Algebraicas revocari possunt, et usum tamen pulcherrimum habent, inprimis in Mechanica ad purae Geometriae terminos reducenda, quod norunt, qui talia profundius inspexere, pauci quidem, sed maxime eximii Mathematicorum. Primus Archimedes, quantum constat, invenit, quae sit ratio inter conum, sphaeram et cylindrum ejusdem altitudinis et basis, nempe qualis est numerorum 1, 2, 3, ita ut cylinder sit triplus coni et sesquialter sphaerae; unde sphaeram et cylindrum etiam sepulcro suo insculpi jussit: idem invenit quadraturam Parabolae. Nostro seculo repertus est modus metiendi figuras curvilineas innumerabiles, inprimis quando ordinatae BC (fig. 22) sunt in ratione utcunque multiplicata aut submultiplicata, directa aut reciproca abscissarum AB vel DC; erit enim figura ABCA ad rectangulum circumscriptum ABCD, ut unitas ad numerum rationis multiplicationem exprimentem, unitate auctum. Exempli gratia, quia in Parabola abscissis AB sive DC existentibus ut numeris naturalibus 1, 2, 3 etc. ordinatae BC sunt ut eorum quadrata 1, 4, 9 etc. seu in duplicata ratione numerorum, tunc numerus rationis multiplicationem exprimens erit 2; ergo erit figura ABCA ad rectangulum circumscriptum ABCD, ut 1 ad $2+1$ seu ut 1 ad 3, sive figura erit tertia pars rectanguli. Si AB vel CD maneant numeri naturales, et BC fiant cubi 1, 8, 27 etc. (nempe in Paraboloide cubica), foret ratio ordinatarum triplicata rationis abscissarum; ergo figura ad rectangulum, ut 1 ad $3+1$ sive 4, seu pars quarta. Sin DC sint quadrata, BC cubi, sive ratio ipsarum BC rationis ipsarum DC triplicata subduplicata, erit figura (Paraboloides cubico-subquadratica) ABCA ad rectangulum ABCD, ut 1 ad $\frac{3}{2}+1$ seu duas quintas rectanguli constituet. In reciprocis numero rationis multiplicationem exprimenti praefigitur signum — sive minus.

*) Zuerst gedruckt in den Act. Erudit. Lips. an. 1682.

Sed circulus nondum hactenus cogi potuit sub hujusmodi leges, quamvis ab omni retro memoria a Geometris exercitus. Nondum enim inveniri potuit numerus exprimens rationem circuli A ad quadratum circumscriptum BC (fig. 23), quod est quadratum diametri DE. Nec inveniri potuit ratio circumferentiae ad diametrum, quae est quadrupla rationis circuli ad quadratum. Archimedes quidem polygona circulo inscribens et circumscribens, quoniam major est inscriptis et minor circumscriptis, modum ostendit exhibendi limites, inter quos circulus cadat, sive exhibendi appropinquationes: esse scilicet rationem circumferentiae ad diametrum majorem quam 3 ad 1 seu quam 21 ad 7, et minorem quam 22 ad 7. Hanc methodum alii sunt prosecuti, Ptolemaeus, Vieta, Metius, sed maxime Ludolphus Coloniensis, qui ostendit esse circumferentiam ad diametrum ut 3.14159265358979323846 etc. ad 1.00000000000000000000.

Verum hujusmodi appropinquationes, etsi in Geometria practica utiles, nihil tamen exhibent, quod menti satisfaciat avidae veritatis, nisi progressio talium numerorum in infinitum continuandorum reperiatur. Multi quidem perfectum Tetragonismum professi sunt, ut Cardinalis Cusanus, Orontius Finaeus, Josephus Scaliger, Thomas Gephyrander, Thomas Hobbes, sed omnes falso: calculis enim Archimedis vel hodie Ludolphi refellebantur.

Sed quoniam video, multos non satis percepisse, quid desideretur, sciendum est, Tetragonismum sive conversionem circuli in aequale quadratum aliamve rectilineam figuram (quae pendet a ratione circuli ad quadratum diametri, vel circumferentiae ad diametrum) posse intelligi quadruplicem, nempe vel per calculum, vel per constructionem linearem, utrumque vel accurate vel propemodum. Quadraturam per calculum accuratum voco *Analyticam*; eam vero quae per constructionem accuratam fit, voco *Geometricam*, per calculum prope verum habetur *appropinquatio*, per constructionem prope veram *Mechanismus*. Appropinquationem longissime produxit Ludolphus; Mechanismos egregios Vieta, Hugenius aliique dedere.

Constructio Geometrica accurata haberi potest, qua non tantum circulum integrum, sed et quemlibet sectorem sive arcum metiri liceat motu exacto atque ordinato, sed qui curvis transcendentibus competat, quae per errorem alioqui Mechanicae censentur, cum tamen aeque sint Geometricae ac vulgares, licet Algebraicae non sint nec ad aequationes Algebraicas seu certi gradus reduci queant; suas enim proprias, etsi non-algebraicas, tamen analyticas habent. Sed ista hic pro dignitate exponi non possunt. *Quadratura Analytica* seu quae per calculum accuratum fit, iterum in tres potest dispesci: in Analyticam transcendentem, Algebraicam et Arithmeticam. Analytica *transcendens* inter alia habetur per aequationes gradus indefiniti, hactenus a nemine consideratas, ut si sit $x^x + x$ aeq. 30, et quaeratur x, reperietur esse 3, quia 3^3+3 est $27+3$ sive 30: quales aequationes pro circulo dabimus suo loco. *Algebraica* expressio fit per numeros, licet irrationales, vulgares seu per radices aequationum communium: quae quidem pro quadratura generali circuli sectorisque impossibilis est. Superest *Quadratura Arithmetica*, quae saltem per series fit, exhibendo valorem circuli exactum progressione terminorum, inprimis rationalium, qualem hoc loco proponam.

Inveni igitur (fig. 23)

Quadrato Diametri existente 1,

Circuli aream fore $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}$ etc., nempe quadratum diametri integrum demta (ne nimius fiat valor) ejus tertia parte, addita rursus (quia nimium demsimus) quinta, demtaque iterum (quia nimium re-adjecimus) septima, et ita porro, eritque

valor justo major	1	errore tamen existente infra $\frac{1}{3}$
minor	$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
major	$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$
minor	$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$
	etc.	etc.

Tota ergo series continet omnes appropinquationes simul sive valores justo majores et justo minores: prout enim longe continuata intelligitur, erit error minor fractione data, ac proinde et minor data quavis quantitate. Quare tota series exactum exprimit valorem. Et licet uno numero summa ejus seriei exprimi non possit, et series in infinitum producatur, quoniam tamen una lege progressionis constat, tota satis mente percipitur. Nam siquidem circulus non est quadrato commensurabilis, non potest uno numero exprimi, sed in rationalibus necessario per seriem exhiberi debet, quemadmodum et diagonalis quadrati, et sectio extrema et media ratione facta, quam aliqui divinam vocant, aliaeque multae quantitates, quae sunt irrationales. Et quidem si Ludolphus potuisset regulam dare, qua in infinitum continuarentur numeri 3. 14159 etc.

dedisset nobis quadraturam Arithmeticam exactam in integris, quam nos exhibemus in fractis.

Ne quis autem in his parum versatus putet, seriem ex infinitis terminis constantem non posse aequari circulo, qui est quantitas finita, sciendum est, multas series numero terminorum infinitas esse in summa quantitates finitas. Exempli facillimi loco sit series ab unitate decrescens progressionis geometricae duplae $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$ etc. in infinitum, quae tamen non facit plus quam 1. Nam in adjecta linea recta AB (fig. 24) quae sit 1, erit AC $\frac{1}{2}$, et residuum (CB) bisecando in D, habebis CD $\frac{1}{4}$; et residuum (DB) bisecando in E, habebis DE $\frac{1}{8}$; et residuum (EB) bisecando in F, habebis EF $\frac{1}{16}$; et ita continuando sine fine, nunquam egredieris terminum B. Idem in fractionibus numerorum figuratorum seu triangulo Harmonico fieri a me alibi ostensum est.

Multa notari possent circa hanc Quadraturam, sed quae nunc persequi non vacat; hoc tamen praeteriri non oportet, terminos seriei nostrae $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$ etc. esse progressionis harmonicae sive in continua proportione harmonica, ut experienti patebit; quin et per saltum $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{17}$ etc. est etiam series progressionis harmonicae, et $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{19}$ etc. est itidem series harmonice proportionalium. Itaque cum circulus sit $\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}$ etc. $-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{19}$ etc., posteriorem seriem partialem a priori subtrahendo, erit magnitudo circuli differentia duarum serierum progressionis harmonicae. Et quoniam quotcunque terminorum numero finitorum progressionis harmonicae summa compendio aliquo iniri potest, hinc appropinquationes compendiosae (si post Ludolphinam illis esset opus) duci possent.

Si quis in serie nostra terminos signo — affectos tollere volet, is duos proximos $+\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$, item $+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$, item $+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$, et $+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}$, et $+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}$, et ita porro, in unum addendo, habebit seriem novam pro magnitudine circuli, nempe $\frac{2}{3}$ (id est $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$) $+\frac{2}{35}$ (id est $\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$) $+\frac{2}{99}$ (id est $\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$), itaque

Quadrato inscripto existente $\frac{1}{4}$,

erit Area Circuli $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}+\frac{1}{195}+\frac{1}{323}$ etc.

Sunt autem numeri 3, 35, 99, 195, 323 etc. excerpti per saltum ex serie numerorum quadratorum (4, 9, 16, 25 etc.) unitate minutorum, unde fit series 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, 120, 143, 168, 195, 224, 255, 288, 323, 360, 399 etc., ex cujus seriei numeris quartus quisque post primum noster est. Inveni autem (quod memorabile est) seriei infinitae $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{63}+\frac{1}{80}+\frac{1}{99}$ etc. summam esse $\frac{3}{4}$; quin et simplici saltu excerpendo, nempe $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}$ etc., ejus seriei infinitae summa facit $\frac{2}{4}$ seu $\frac{1}{2}$. Sed si ex hac iterum simplici saltu terminos excerpamus, nempe $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ etc., ejus seriei infinitae summa erit Semicirculus, posito quadratum diametri esse 1.

Quoniam autem eadem opera *quadratura Hyperbolae arithmetica* habetur, placet totam harmoniam oculis subjicere:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20			
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400			
0	3	8	15	24	35	48	63	80	99	120	143	168	195	224	255	288	323	360	399			
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{99}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{143}$	$\frac{1}{168}$	$\frac{1}{195}$	$\frac{1}{224}$	$\frac{1}{255}$	$\frac{1}{288}$	$\frac{1}{323}$	$\frac{1}{360}$	$\frac{1}{399}$	etc.	aequatur	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{3}$	·	$\frac{1}{15}$	·	$\frac{1}{35}$	·	$\frac{1}{63}$	·	$\frac{1}{99}$	·	$\frac{1}{143}$	·	$\frac{1}{195}$	·	$\frac{1}{255}$	·	$\frac{1}{323}$	·	$\frac{1}{399}$	etc.		$\frac{2}{4}$
	·	$\frac{1}{8}$	·	$\frac{1}{24}$	·	$\frac{1}{48}$	·	$\frac{1}{80}$	·	$\frac{1}{120}$	·	$\frac{1}{168}$	·	$\frac{1}{224}$	·	$\frac{1}{288}$	·	$\frac{1}{360}$	·	etc.		$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{3}$	·	·	·	$\frac{1}{35}$	·	·	·	$\frac{1}{99}$	·	·	·	$\frac{1}{195}$	·	·	·	$\frac{1}{323}$	·	·	etc.	aequatur	circulo ABCD, cujus potentia
	·	$\frac{1}{8}$	·	·	·	$\frac{1}{48}$	·	·	·	$\frac{1}{120}$	·	·	·	$\frac{1}{224}$	·	·	·	$\frac{1}{360}$	·	etc.		inscripta Hyperbolae CBEHC, cujus quadratum ABCD est $\frac{1}{4}$

Sit in fig. 25 Asymptotis AF, AE sibi normalibus Hyperbolae curva descripta GCH, cujus vertex C, potentia vero Hyperbolae inscripta sive quadratum, quod rectangulo sub ordinata quacunque EH in suam abscissam AE semper aequale est, sit ABCD; circa hoc quadratum describatur circulus, et ponatur Hyperbola ita continuata a C usque ad H, ut sit AE dupla ipsius AB. Tunc posito AE esse unitatem, erit AB $\frac{1}{2}$, et ejus quadratum ABCD erit $\frac{1}{4}$, et Circulus, cujus potentia inscripta est ABCD, erit $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ etc., Hyperbolae vero (cujus potentia inscripta est idem quadratum $\frac{1}{4}$) portio CBEHC, quae logarithmum rationis ipsius AE ad AB (sive binarii) repraesentat, erit $\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{120}$ etc.

VII.

DE DIMENSIONIBUS FIGURARUM INVENIENDIS. *)

Signum est perfectae Analyseos, quando aut solvi problema potest, aut ostendi ejus impossibilitas: quod cum nemo hactenus praestiterit circa transmutationes curvilineorum in rectilinea, patet in hac parte imperfectio Geometriae, et ipsius Algebrae, quae uti hactenus tractata est, ad talia problemata non porrigitur. Excogitavi tamen jam a multis annis subsidium Analyticum, et amicis ostendi, quod huc redit: notum est interioris Geometriae peritis, (fig. 26) data qualibet curva AFC (ex illarum numero, quarum natura seu relatio inter ordinatam et abscissam per aequationem Algebraicam seu certi gradus exprimi potest, quas *Cartesius* appellat Geometricas, ego ob graves rationes potius Algebraicas appellare soleo) posse aliam inveniri curvam AGD etiam Algebraicam, cujus figura ope prioris possit quadrari; idque fieri potest multis modis, exempli causa data curva AFC, potest inveniri curva AGD talis naturae, ut rectangulum sub FE ordinata prioris curvae et recta constante H semper aequetur trilineo curvae posterioris seu figurae AEGA, vel ut rectangulum sub FE ordinata curvae prioris et abscissa ejus AF aequetur eidem trilineo, vel aliis modis infinitis. Priorem curvam AFC voco *Quadratricem*, posteriorem AGD *Quadrandam.* Sed hoc opus, hic labor est, data Quadranda Figura, invenire Quadratricem ejus aliquam, praesertim cum aliquando quadratricem invenire (Algebraice quidem exprimendam) sit impossibile. Ut ergo praestarem, quicquid in hoc genere fieri potest, talem methodum excogitavi, antea quod sciam non usurpatam, sed quae maximum et in aliis usum habere potest. Adhibeo aequationes Curvarum generales, quarum unaquaeque omnes curvas ejusdem gradus exprimit. Et talis curvae generalis, consideratae tanquam quadratricis, quaero quadrandam generalem secundum aliquem ex modis supra dictis, quem semper eundem servo, quia demonstrare possum, si non datur quadratrix secundum unum modum, nec eam secundum alium dari. Oblatae jam quadrandae specialis aequatio comparanda est cum aliqua ex formulis generalibus, quadrandarum naturam exprimentibus; sed si nulli comparari possit, manifestum

*) Zuerst gedruckt in den Act. Erudit. Lips. an. 1684.