,,per probl. 4, ea ducatur in productum A, quodque ita producitur,
,,dicemus B. Jam si res capitis nullam habet homogeneam extra
5 ,,caput, *productum B erit quaesitum.* Si res capitis habet homoge-
,,neam tantum extra caput, non vero intra, productum B multipli-
,,cetur numero rerum homogenearum, si saepius sunt homogeneae,
,,factus ex numero homogenearum priorum multiplicetur numero
,,homogenearum posteriorum continue, et *factus erit quaesitum.*
6 ,,Sin res capitis habet homogeneam intra caput et extra, numeren-
,,tur primo res homogeneae intrinsecae et extrinsecae simul, et sup-
,,ponantur pro Numero complicando; deinde res datae homogeneae
,,tantum intra caput supponantur pro exponente. Dato igitur nu-
,,mero et exponente quaeratur complexio per probl. 1, et si sae-
,,pius contingat homogeneitas, ducantur complexiones in se invicem
,,continue. Complexio vel factus ex complexionibus ducatur in pro-
7 ductum B, et *factus erit quaesitum.*" Hoc problema casuum mul-
titudo operosissimum effecit, ejusque nobis solutio multo et labore
et tempore constitit. Sed aliter sequentia problemata ex artis
principiis nemo solvet. In illis igitur usus hujus apparebit.

Probl. VIII.
VARIATIONES ALTERI DATO CAPITI COMMUNES REPERIRE.

8 ,,Utrumque caput ponatur in eandem variationem, quasi esset
,,unum caput compositum (etsi interdum res capitis compositi sint
,,discontiguae) et indagentur variationes unius capitis compositi per
,,probl. 10, productum erit quaesitum."

Probl. IX.
CAPITA VARIATIONES COMMUNES HABENTIA REPERIRE.

9 ,,Si plura capita in variatione ordinis in eundem locum inci-
,,dunt vel ex toto, vel ex parte, non habent variationes communes. 2,
,,Si eadem res monadica in plura capita incidit, ea non habent va-
,,riationes communes. Caetera omnia habent variationes communes.

Probl. X.
CAPITA VARIATIONUM UTILIUM AUT INUTILIUM REPERIRE.

10 *Capita in universum reperire expeditum est.* Nam quaelibet
res per se, aut in quocunque loco per se, aut cum quacunque

alia aliisve, quocunque item loco cum alia aliisve, breviter omnis
complexio aut variatio proposita minor et earundem rerum, seu quae
tota in altera continetur, est caput. Methodus autem in disponen-
dis capitibus utilis, ut a minoribus ad majora progrediamur, quando
v. g. propositum nobis est omnes variationes oculariter proponere,
quod Drexelius loco citato, Puteanus et Kleppisius et Reinerus ci-
tandis factitarunt. Caeterum ut *Capita utilia vel inutilia reperian-* 11
tur, adhibenda disciplina est, ad quam res variandae, aut totum
ex iis compositum pertinet. Regulae ejus inutilia quidem elident,
utilia vero relinquent. Ibi videndum, quae cum quibus et quo loco
conjungi non possint, item quae simpliciter quo loco poni non possint
v. g. primo, tertio etc. Inprimis autem primo et ultimo. Deinde
videndum, quae res potissimum causa sit anomaliae (v. g. in ver-
sibus hexametris proteis syllabae breves). Ea ducenda est per
omnes caeteras, omnia item loca, si quando autem de pluribus
idem judicium est, satis erit in uno tentasse.

Probl. XI.
VARIATIONES INUTILES REPERIRE.

,,Duae sunt viae: (1) per probl. 12 hoc modo: Inventa 12
,,summa variationum utilium et inutilium per probl. 4, subtrahatur
,,summa utilium per probl. 12 viam secundam; residuum erit quae-
,,situm; (2) absolute hoc modo: Inveniantur capita variationum
,,inutilium per probl. 10, quaerantur singulorum capitum variatio-
,,nes per probl. 7, si qua capita communes habent variationes per
,,probl. 9, numerus earum inveniatur per probl. 8, et in uno so-
,,lum capitum variationes communes habentium relinquatur, de
,,caeterorum variationibus subtrahatur; aut si hunc laborem subtra-
,,hendi subterfugere velis, initio statim capita quam maxime com-
,,posita pone, conf. probl. 8; Aggregatum omnium variationum de
,,omnibus complexionibus, subtractis subtrahendis, erit quaesitum."

Probl. XII.
VARIATIONES UTILES REPERIRE.

Solutio est ut in proxime antecedenti, si haec saltem mutes, 13
in via 1. loco problem. 12 pone 11 etc. et subtrahatur summa
inutilium per probl. 11 viam secundam. In via 2. inveniantur
capita variationum utilium. Caetera ut in probl. proximo.

Usus Problem. 7. 8. 9. 10. 11. 12.

14 Si cui haec problemata aut obvia aut inutilia videntur, cum
ad praxin superiorum descenderit, aliud dicet. Rarissime enim vel
natura rerum vel decus patitur, omnes variationes possibiles utiles
esse. Cujus specimen in argumento minus fortasse fructuoso, in
15 exemplum tamen maxime illustri daturi sumus. Diximus supra
Proteos versus esse *pure* proteos, id est in quibus pleraeque varia-
tiones possibiles utiles sunt, ii nimirum qui toti propemodum
monosyllabis constant; vel *mixtos*, in quibus plurimae incidunt
16 inutiles, quales sunt qui polysyllaba, eaque brevia continent. In
hoc genere inter veteres, qui mihi notus sit, tentavit tale quiddam
idem ille, de quo probl. 6, Publilius Porphyrius Optatianus, et
Erycius Puteanus Thaumat. Piet. lit. N. pag. 92 ex aliis ejus de
Constantino versibus hos refert:

Quem divus genuit Constantius Induperator
Aurea Romanis propagans secula nato.

Ex illis primus est Torpalius, vocibus continue syllaba crescenti-
bus constans, alter est Proteus sexiformis, si ita loqui fas est:

Aurea Romanis propagans secula nato
Aurea propagans Romanis secula nato
Secula Romanis propagans aurea nato
Propagans Romanis aurea secula nato
Romanis propagans aurea secula nato.

17 Verum plures habet primus ille Virgilianus:

Tityre tu patulae recubans sub tegmine fagi,

quem usus propemodum in jocum vertit. Ejus variationes sunt
hae: pro *tu, sub* 2, pro *putalae, recubans* 2, et *Tityre* jam initio,
ut nunc, jam *tegmine* initio, jam *Tityre tegmine* fine, jam *tegmine*
Tityre fine, $4 \frown 2 \frown 2$ f. 16. Verum in Porphyrianaeis non sin-
guli Protei, sed omnes, neque unus versus, sed carmen totum tali-
bus plenum admirandum est. Ejusmodi versus compondituro danda
18 opera, ut voces consonis aut incipiant aut finiant. Alter qui et
nomen Protei indidit, est Jul. Caes. Scaliger, vir si ingenii ferocia
absit, plane incomparabilis, Poët. lib. 2. c. 30 pag. 185. Is hunc
composuit, formarum, ut ipse dicit, innumerabilium, ut nos, 64:

Perfide sperasti divos te fallere Proteu.

Plures non esse facile inveniet, qui vestigia hujus nostrae compu-
tationis leget. Pro *Perfide fallere* 2, pro *Proteus, divos*, $2 \frown 2$
f. 4. *Sperasti divos te* habet variationes $6 \frown 4$ f. 24. *Divos*

perfide Te sperasti habet var. 2. *Divos Te sperasti perfide* habet
$6+2+2$ f. $10 \frown 4$ f. $40+24$ f. 64. Observavimus ex Virgilio
aeque, imo plus variabilem Aen. lib. 1. v. 282: *Queis* (pro His)
ego nec metas rerum nec tempora pono. Nam *perfide* una vox est;
queis ego in duas discerpi potest. Venio ad ingeniosum illum 19
Bernhardi Bauhusii, Jesuitae Lovaniensis, qui inter Epigrammata ejus
exstat, utque superior, vid. probl. 4, de Christo, ita hic de Maria
est:

Tot tibi sunt dotes virgo, quot sidera coelo.

Dignum hunc peculiari opera esse duxit vir doctissimus Erycius
Puteanus libello, quem *Thaumata Pietatis* inscripsit, edito Antver-
piae anno 1617, forma 4ta, ejusque variationes utiles omnes enu-
merat a pag. 3 usque ad 50 inclusive, quas autor, etsi longius
porrigantur, intra cancellos numeri 1022 continuit, tum quod toti-
dem vulgo stellas numerant Astronomi, ipsius autem institutum
est ostendere dotes non esse pauciores quam stellae sunt; tum
quod nimia propemodum cura omnes illos evitavit, qui dicere vi-
dentur, tot sidera coelo, quot Mariae dotes esse, nam Mariae dotes
esse multo plures. Eas igitur variationes si assumsisset (v. g. Quot
tibi sunt dotes virgo, tot sidera coelo) totidem, nempe 1022 alios
versus ponendo *tot* pro *quot*, et contra, emersuros fuisse mani-
festum est. Hoc vero etiam in praefatione Puteanus annotat pag. 12;
interdum non sidera tantum, sed et dotes coelo adhaerere, ut coe-
lestes esse intelligamus, v. g.

Tot tibi sunt coelo dotes, quot sidera virgo.

Praeterea ad variationem multum facit, quod ultimae in *Virgo*
et *Tibi* ambigui quasi census et corripi et produci patiuntur, quod
artificium quoque infra in Daumiano illo singulari observabimus.
Meminit porro Thaumatum suorum et Protei Bauhusiani aliquoties 20
Puteanus in apparatus Epistolarum cent. I. ep. 49 et 57 ad Gis-
bertum Bauhusium, Bernardi Patrem; add. et ep. 51. 52. 53. 56
ibid. Editionem autem harum epistolarum habeo in 12. Amstelo-
dami anno 1647; nam in editione epistolarum in 4to, quia jam
anno 1612 prodiit, frustra quaeres. Caeterum Joh. Bapt. Ricciol. 21
Almag. nov. P. 1. lib. 6. c. 6. schol. 1. f. 413 peccato *μνημο-
νικῷ* Versus Bauhusiani Puteanum autorem praedicavit his verbis:
*quoniam vero vetus erat opinio a Ptolemaeo usque propagata, stel-
las omnes esse* 1022, Erycius Puteanus *pietatis et ingenii sui mo-
numentum posteris reliquit, illo artificiosissimo carmine, Tot tibi,*

etc. qui tamen non autor, sed commentator commendatorque est.

22 Denique similem prorsus versum in Ovidio, levissima mutatione, observavimus hunc Metam. XII. fab. 7. v. 594:

Det mihi se, faxo triplici quid cuspide possim
Sentiat etc.

Is talis fiet:

Det mihi se faxo trina quid cuspide possim.

23 Nam etiam ultima in *mihi* et *faxo* anceps est. Exstat in eodem genere Georg. Kleppisii, nostratis Poëtae laureati, versus hic:

Dant tria jam Dresdae, ceu sol dat, lumina lucem,

cujus variationes peculiari libro enumeravit 1617; occasionem dedere tres soles, qui anno 1617 in coelo fulsere, quo tempore Dresdae convenerant tres soles terrestres ex Austriaca domo: Matthias Imperator, Ferdinandus Rex Bohemiae, et Maximilianus Archidux, supremus ordinis Teutonici Magister. Libellum illis dedicatum titulo Protei Poëtici eodem anno edidit, quem variationum numerus sig-
24 nat. Omnino vero plures sunt variationes quam 1617, quod ipse tacite confitetur autor, dum in fine inter Errata ita se praemunit: fieri potuisse, ut in tanta multitudine aliquem bis posuerit, supplendis igitur lacunis novos aliquot ponit quos certus sit nondum habuisse. Nos ut aliquam praxin proximorum problematum exhibeamus, variationes omnes utiles computabimus. Id sic fiet, si inveniemus omnes inutiles. Capita variationum expressimus notis quantitatis, sic tamen ut pro pluribus transpositis unum assumserimus, v. g. — —.—.—.◡◡. etiam continet hoc: —.— —. —.◡◡ etc. Punctis designamus et includimus unam vocem.

25 Summa omnium variationum utilium et inutilium . . 362880

Catalogus Variationum inutilium:

1. ◡◡. v. g. *tria* dant jam Dresdae ceu sol dat lumina lucem 40320
2. — —.◡◡. *Dresdae tria* dant jam ceu sol etc. 10080
3. —.—.◡◡. *dant jam tria.* 14400
4. — —.—.—.◡◡. *Dresdae dant jam tria.* 28800
5. — —.— —.◡◡. *Dresdae lucem tria.* 1440
6. —.—.—.—.◡◡. *dant jam ceu sol tria.* 2880
7. — —.— —.—.—.◡◡. *Dresdae lucem ceu sol tria.* 28800
8. — —.—.—.—.—.◡◡. *Dresdae dant jam ceu sol tria* 7200
9. — —.— —.—.—.—.—.◡◡. *Dresdae lucem dant jam ceu sol tria* 7200

10. in fine ◡◡. v. g. *tria* 40320

Summa variationum ob vocem *Tria* inutilium, quae exacte constituit dimidium summae Variationum possibilium 181440 26

11. ab initio: —.—◡◡. *dant lumina* 1800
12. —.— —.—◡◡. *dant Dresdae lumina.* 9600
13. —.—.—.—◡◡. *dant jam ceu lumina.* 4320
14. —.—.—.—.—.—◡◡. *dant jam ceu sol dat lumina.* 240
15. —.— —.— —.—◡◡. *dant Dresdae lucem lumina.* 2160
16. —.—.—.— —.—◡◡. *dant jam ceu lucem lumina.* 5760
17. —.—.—.—.—.— —.—◡◡. *dant ceu jam sol dat lucem lumina.* 0
18. —.—.—.— —.— —.—◡◡. *dant ceu jam Dresdae lucem lumina.* 1200
19. —.—.—.—.—.— —.— —.—◡◡. *dant ceu jam sol dat lucem Dresdae lumina.* 0
20. fine —◡◡. v. g. *lumina* 11620

Summa variationum ob solam vocem *Lumina* inutilium 52900 27

21. ubicunque: —◡◡.◡◡. *lumina tria.* 40320
22. —◡◡.—.◡◡. *lumina Dresdae tria.* 14440
23. —◡◡.—.—.◡◡. *lumina ceu jam tria.* 4800
24. —◡◡.—.—.—.—.◡◡. *lumina ceu jam sol dat tria* 1440
25. —◡◡.— —.— —.◡◡. *lumina Dresdae lucem tria* 480
26. —◡◡.—.—.— —.◡◡. *lumina ceu jam Dresdae tria* 4800
27. —◡◡.—.—.— —.— —.◡◡. *lumina ceu jam Dresdae lucem tria* 4080
28. —◡◡.—.—.—.—.— —.◡◡. *lumina ceu jam dat sol lucem tria* 532
29. —◡◡.—.—.—.—.— —.◡◡. *lumina ceu jam dat sol lucem Dresdae tria.* 2978

Summa variationum inut. ob complicationem *Lumina* et *Tria*, illo praeposito. . . . 59870 28

30. —.◡◡.—.—.◡◡. *dant tria jam lumina.* 2400
31. —.◡◡.—.— —.—◡◡. *dant tria jam Dresdae lumina.* 3840

32. —.◡◡.—.—.—.—◡◡. *ceu sol.* 1440
33. —.◡◡.—.—.—.——.—◡◡. *dant tria jam ceu sol lucem lumina* 5760
34. —.◡◡.—.—.—.——.——.—◡◡. *dant tria jam ceu sol lucem Dresdae lumina* 9360

Summa variationum inut. ob complic. *Tria* et *Lumina*, illo praeposito 22800
59870
52900
181440

Summa summarum Var. inut. . . . 317010
subtrahatur de summa universali . . 362880
remanet

29 Summa utilium variationum versus Kleppisii admissis spondaicis . . . 45870

Spondaicos reliquimus ne laborem computandi augeremus, quot tamen inter omnes variationes utiles et inutiles existant spondaici, sic invenio:

1. si in fine ponitur —.——. v. g. dant lucem 100800
2. ——.——. v. g. Dresdae lucem 10080
3. —.—.—. v. g. dant seu sol 43200

Summa omnium spondaicorum util. et inut. . . . 154080

30 Exstat praeterea versus nobilissimi herois Caroli a Goldstein:

Ars non est tales bene structos scribere versus,

in arte sibi neganda artificiosus, qui 1644 variationes continere dicitur. Aemulatione horum, Kleppisii inprimis, prodiit Henr. Reimerus Lüneburgensis, Scholae patriae ad D. Johannis Collega, Proteo instructus tali:

DapIe ChrIste UrbI bona paX sIt teMpore nostro.

qui idem annum 1619, quo omnes ejus variationes uno libello in 12.
31 Hamburgi edito inclusi prodierunt, continet. Laboriosissimus quoque Daumius, vir in omni genere poematum exercitatus, nec hoc quidem intentatum voluit a se relinqui. Nihil de ejus copia dicam, qua idem termillies aliter carmine dixit (hic enim non alia verba, sed eorundem verborum alius ordo esse debet) quod in hac sententia: fiat justitia aut pereat mundus, Vertumno poëtico Cygneae anno 1646. 8. edito praestitit. Hoc saltem adverto, quod et autori

annotatum, in Millenario 1. num. 219 et 220 versus Proteos esse. Hi sunt igitur:

v. 219. Aut absint vis, fraus, ac jus ades, aut cadat aether.
v. 220. Vis, fraus, lis absint, aequum gerat, aut ruat orbis.

Nacti vero nuper sumus, ipso communicante, alium ejus versum 32
invento sane publice legi digno, quem merito *plus quam Protea* dicas, neque enim in idem tantum, sed alia plurima carminis genera convertitur. Verba enim haec: *O alme* (sc. Deus) *mactus Petrus* (sponsus) *sit lucro duplo*; varie transposita dant Alcaicos 8, Phaleucios 8, Sapphicos 14, Archilochios 42, in quibus omnibus intercedit elisio. At vero sine elisione facit pentametros 32, Jambicos senarios tantum 20, Scazontes tantum 22, Scazontes et Jambos simul 44 (et ita Jambos omnes 64, Scazontes omnes 66); si syllabam addas fit Hexameter, v. g.

Fac duplo Petrus lucro sit mactus, o alme!

variabilis versibus 480. Caeterum artificii magna pars in eo con- 33
sistit, quod plurimae syllabae, ut prima in *duplo, Petrus, lucro,* sunt ancipites. Elisio autem efficit, ut eadem verba, diversa genera carminis syllabis se excedentia efficiant. Alium jam ante anno 1655 dederat, sed variationum partiorem, nempe Alcaicum hunc:

Faustum alma sponsis da Trias o torum!

convertibilem in Phaleucios 4, Sapphicos 5, Pentametros 8, Archilochios 8, Jambicos senarios 14, Scazontes 16.

Sed jam tempus equum spumantia solvere colla: 34
si quis tamen prolixitatem nostram damnat, is vereor, ne cum ad praxin ventum erit, idem versa fortuna de brevitate conqueratur.

DE

QUADRATURA ARITHMETICA

CIRCULI, ELLIPSEOS ET HYPERBOLAE.

Leibniz hat zu jeder Zeit offen bekannt, dass er erst während seines Aufenthaltes in Paris in den Jahren 1672 bis 1676 die höhere Mathematik, durch Hugens dazu ermuntert und angeleitet, zu studiren begonnen habe. Er vertiefte sich in die Cartesianische Geometrie, die er bisher nur sehr oberflächlich kannte; besonders aber erregte die Synopsis Geometrica des Honoratus Fabri, die Schriften des Gregorius a S. Vincentio, die Briefe Pascal's über die Cycloide seine Aufmerksamkeit: sie eröffneten ihm das bis dahin ganz unbekannte Gebiet der höheren Mathematik und machten ihn mit den damals üblichen Methoden der Quadraturen und Cubaturen zuerst bekannt. Indess dem von Jugend auf gehuldigten Grundsatze getreu, zugleich mit der Erweiterung des Umfanges seines Wissens immer auch die Bereicherung der Wissenschaft anzustreben, versuchte Leibniz sofort auf neuen Wegen zu neuen Resultaten zu gelangen. Bisher war man gewohnt, zum Behuf der Quadraturen die krummlinig begränzten Ebenen durch parallele Ordinaten in Rechtecke zu theilen, deren Summe die gesuchte Quadratur darstellte; Leibniz verfiel darauf, eine krummlinig begränzte Ebene von einem Punkte aus in Dreiecke zu theilen, die auf irgend eine Weise mit einander verbunden, eine andere ebene Figur hervorbrachten, deren Inhalt der in Rede stehenden Figur gleich sein musste. War nun das Verhältniss eines solchen Dreiecks zur gegebenen krummlinig begränzten Ebene bekannt, oder was dasselbe ist, war der Inhalt eines solchen Dreiecks durch die Coordinaten der Curve ausgedrückt, so war auch der Inhalt der aus der Zusammensetzung der Dreiecke entstandenen Figur bestimmt. Dies Verfahren nannte Leibniz die Methode der Transformation.

Die erste Frucht dieser Studien war, dass es Leibniz gelang, den Inhalt des Kreises, dessen Durchmesser $=1$, durch die unendliche Reihe $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ etc. auszudrücken. Sie trägt noch gegenwärtig seinen Namen, wie Hugens, dem Leibniz die Entdeckung zuerst mitheilte, es ihm sofort voraussagte*).

Es konnte Leibniz nicht entgehen, dass dasselbe Princip auf die übrigen Kegelschnitte, so wie auch auf die Cycloide, mit Erfolg sich anwenden liess, und in der That er fand, dass, wenn man von dem Scheitel eines Kegelschnitts aus einen beliebigen Curvenbogen abschneidet, die Endpunkte mit dem Mittelpunkt verbindet und durch dieselben Endpunkte Tangenten legt, der entstandene Sector einem Rechtecke gleich ist, welches aus der halben grossen Axe (semilatus transversum) und einer geraden, durch die unendliche Reihe $t \pm \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 \pm \frac{1}{7} t^7$ etc. ausgedrückt, construirt werden kann, wo t das Stück der Tangente des Scheitels bezeichnet, das zwischen dem Scheitel und dem Durchschnittspunkte der Tangente des andern Endpunkts des Curvenbogens liegt, und das Rechteck aus der halben grossen und halben kleinen Axe der Einheit gleich gesetzt ist. Durch die bedeutende Tragweite des in Rede stehenden Princips wurde Leibniz ohne Zweifel veranlasst, dieses ganze Gebiet, das für die damalige Zeit den grössten Theil der Lehre von der Quadratur der ebenen Curven enthielt, einer eingehenden und umfassenden Durcharbeitung zu unterwerfen und den Stoff mit Benutzung aller Hülfsmittel, welche die Analyse der damaligen Zeit darbot, zum Gegenstand einer selbstständigen Schrift zu formen.

Dies ist der Ursprung der Schrift über die arithmetische Quadratur des Kreises, deren Leibniz so oft in späterer Zeit gedenkt. Ihr vollständiger Titel ist: De Quadratura Arithmetica Circuli, Ellipseos et Hyperbolae, cujus corollarium est Trigonometria sine Tabulis. Autore G. G. L. L. Sie war vollendet und druckfertig, als Leibniz im Jahre 1676 Paris verliess, um nach Deutschland zurückzukehren. Er übergab das Manuscript einem Agenten, welcher den Druck in Paris überwachen sollte. Der sofortigen Ausführung traten indess, wie es scheint, Hindernisse entgegen, so dass der Beginn des Druckes sich verzögerte. Da nun auch der darin behandelte Gegenstand in Folge des von Leibniz entdeckten

*) Siehe die Correspondenz zwischen Leibniz und Hugens (Leibniz math. Schriften, Theil 2. S. 16): vous ne laisserez pas, schreibt ihm Hugens, d'avoir trouvé une proprieté du cercle tres remarquable, ce qui sera celebre à jamais parmi les geometres.

Algorithmus der höhern Analysis von Tag zu Tag an Umfang zunahm, besonders aber *weil* die ursprüngliche Anlage der ganzen Schrift und die darin zu Grunde gelegte Behandlung sich noch auf die alten, durch die Entdeckung des Algorithmus der höhern Analysis beseitigten Methoden stützte, so hielt Leibniz nach Verlauf weniger Jahre es nicht mehr an der Zeit, die in Rede stehende Abhandlung durch den Druck zu veröffentlichen*). Einen Augenblick scheint er den Gedanken gehabt zu haben, die ganze Schrift in kürzerer Fassung, bloss die darin vorkommenden Lehrsätze zum Theil mit Benutzung der höhern Analysis als ein „Compendium Quadraturae Arithmeticae" bekannt zu machen; indess auch dieser Plan blieb unausgeführt. Als späterhin die Acta Eruditorum Lipsiensium zu erscheinen anfingen, hat er den wesentlichsten Inhalt in den Abhandlungen: De vera proportione Circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus, und: Quadratura Arithmetica communis Sectionum Conicarum, quae centrum habent, indeque ducta Trigonometria Canonica ad quantamcunque in numeris exactitudinem a Tabularum necessitate liberata etc. veröffentlicht.

Obwohl Leibnizens Entdeckung der Reihe für die Quadratur des Kreises nur der erste Schritt auf der Bahn voll der glänzendsten Triumphe war, und obwohl die dadurch veranlasste Abhandlung nur als ein Erstlingsversuch zu betrachten ist, so bildet die letztere dennoch ein nicht unwichtiges Moment in dem mathematischen Entwickelungsgange ihres Verfassers. Vor allem ist zu bemerken, dass Leibniz dadurch veranlasst wurde, die damals üblichen Methoden zur Quadratur der Curven nicht allein zu studiren, sondern auch in Betreff ihrer Brauchbarkeit und ihres wissenschaftlichen Werthes mit einander zu vergleichen. Auf diese Weise wurde Leibniz mit den Lehren der höheren Mathematik auf's innigste vertraut, was bisher von allen denen viel zu wenig beachtet worden ist, die auf das hartnäckigste fortfahren, in Bezug auf die

*) Jam anno 1675 compositum habebam Opusculum Quadraturae Arithmeticae ab amicis illo tempore lectum, sed quod materia sub manibus crescente limare ad editionem non vacavit, postquam aliae occupationes supervenere: praesertim cum nunc prolixius exponere vulgari more, quae Analysis nostra nova paucis exhibet, non satis pretium operae videatur. Leibniz zu Anfang der Abhandlung: Quadratura Arithmetica communis Sectionum Conicarum etc.

Entdeckung der höheren Analysis in Leibniz nur einen Plagiarius zu sehen. Sie halten Leibniz, wie er so oft selbst von sich erzählt, für einen Neuling in der Wissenschaft, der wenige Monate vor jener Entdeckung noch ganz unwissend in der Mathematik war, ohne zu bedenken, dass er eben durch diese Durchgangsperiode auf's gründlichste dazu vorbereitet wurde.

Von den folgenden Nummern erscheinen die unter I bis IV hier zum ersten Mal gedruckt. Sie enthalten ausser der oben erwähnten grössern Abhandlung Leibnizens alles das, was über die arithmetische Quadratur des Kreises unter den Leibnizischen Manuscripten auf der Königlichen Bibliothek zu Hannover als zum Druck geeignet sich vorfindet.

Nr. I, ein Brief, höchst wahrscheinlich an den Herausgeber des Journal des Savans gerichtet, ist insofern von besonderem Interesse, als Leibniz sich darin über den Ursprung seiner Entdeckung offen und ohne Rückhalt ausspricht.

In Nr. II folgt die Vorrede zu der grössern Abhandlung, die Leibniz während seines Aufenthaltes in Paris zum Druck vorbereitet hatte; es ist daraus zu ersehen, wie er über das Verhältniss seiner Entdeckung zu dem bisher Bekannten dachte, und welches die Tendenz der Abhandlung war.

Nr. III enthält unter der Aufschrift: Compendium Quadraturae Arithmeticae, den von Leibniz selbst verfassten Auszug aus der grössern Abhandlung. Es finden sich darin alle Lehrsätze der letztern wieder, nur einige wenige in anderer Fassung, wie es an den betreffenden Stellen bemerkt ist. Die Zeit der Abfassung dieses Auszuges ist nicht angegeben; sie fällt vielleicht in die Jahre 1678 oder 1679, in welchen die Ausbildung des Algorithmus der höheren Analysis bereits bedeutend vorgeschritten war.

Nr. IV enthält eine Zuschrift an einen Leibniz eng befreundeten Gelehrten und eifrigen Verehrer der mathematischen Wissenschaften, der, obwohl sein Name nicht genannt wird, kein anderer sein kann, als der Freiherr von Bodenhausen, den Leibniz während seines Aufenthaltes in Italien kennen gelernt hatte. Derselbe war deutscher Herkunft; er stammte aus einer hessischen Familie und lebte, nachdem er Convertit geworden, unter dem Namen eines Abbé Bodenus als Erzieher des Erbprinzen von Toskana in Florenz.

Jedenfalls war in den Unterhaltungen zwischen ihm und Leibniz die Rede auf die höhere Analysis gekommen, und Leibniz versucht nun in dieser Zuschrift das Wesen derselben an einem Beispiel ihm klar zu machen. Er wählt hierzu die Quadratur eines cycloidischen Abschnitts, und indem er dieselbe an das Fundamentaltheorem anlehnt, durch welches er die Quadratur des Kreises gefunden hatte, reproducirt er zunächst das Verfahren nach Art der Exhaustionsmethode der alten Geometrie, mittelst dessen er in seiner grössern Abhandlung den Beweis jenes Theorems geführt hatte; alsdann folgt dasselbe mit Hülfe des Algorithmus der höheren Analysis. Leibniz bedient sich hierbei sehr bezeichnend des Ausdruckes „Characteristica mea"; es fällt dadurch ein Streiflicht auf den Ursprung des Algorithmus der höheren Analysis. — Obwohl die Abfassung dieser Nummer offenbar in ein späteres Jahr fällt, als die folgenden bereits gedruckten, so schien es doch angemessen, dieselbe an dieser Stelle einzureihen, insofern sie sich an das Vorausgegangene unmittelbar anschliesst.

Die folgenden Nummern V bis VIII sind sämmtlich bereits gedruckt. In Bezug auf das Bruchstück V ist zu bemerken, dass der Schluss desselben, so wie er im Journal des Savans sich vorfindet, unverständlich ist; er ist hier in der ursprünglichen Gestalt nach dem Originalmanuscript abgedruckt.

I.

Monsieur

La quadrature Arithmetique du Cercle et de ses segments ou secteurs, que j'ay trouvée et communiquée à plusieurs excellens Geometres il y a déjà quelques années, leur a paru assez extraordinaire, et ils m'ont exhorté d'en faire part au public. Mais comme je n'aime pas d'écrire un volume farci d'un grand nombre de propositions repassées pour donner une seule qui soit nouvelle et considerable, j'ay recours à Vostre Journal qui nous donne le moyen de publier un theoreme sans faire un livre.

Quadrature Arithmetique est, qui exprime la grandeur de la figure proposée par un rang infini de nombres rationaux ou commensurables à une grandeur donnée, ce qui suffit pour l'Arithmetique lorsqu'on ne le sçauroit faire par un nombre rationel fini, car l'arithmetique ne connoist les nombres irrationaux qu'autant qu'elle les peut exprimer par les rationels soit finis soit infinis. Et il n'est pas difficile de donner même un rang infini de nombres rationaux égal à une racine sourde, ce que je croy d'avoir fait le premier, en......*) la division dans une extraction continuée.

La quadrature Arithmetique du Cercle et de ses parties peut estre comprise dans ce theoreme: Le rayon du Cercle estant l'unité, et la tangente BC de la moitié BD d'un arc donné BDE estant appellée b, la grandeur de l'arc sera: $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11}$ etc. Or les arcs estant trouvez, il est aisé de trouver les espaces, et le corollaire de ce theoreme est que le Diametre et son quarré estant 1, le Cercle est $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. L'usage de cette quadrature est qu'outre la beauté d'un theoreme aussi simple et aussi surprenant que celuy-ci, vous avons un moyen de trouver les angles par les costez et à rebours; item les espaces ou portions des Cercles, Ellipses, Cones, Spheres, Spheroides et de leur sur-

---

*). Ein unleserliches Wort.

faces, le tout par une simple. addition de nombres rationaux ou grandeurs commensurables au defaut même de tables toutes calculées, et sans polygones, dont le calcul demande une extraction perpetuelle de racines, outre qu'ainsi on approchera bien viste; car si *b* par exemple ou BC estoit $\frac{1}{10}$ du rayon, b^{11} seroit $\frac{1}{100000000000}$ et par consequent toutes les puissances plus hautes pourront negligées hardiment. Ce qui serviroit à continuer les tables, et à les rendre plus exactes sans beaucoup de peine.

Or comme il n'y a rien de si important que de voir les origines des inventions qui valent mieux à mon avis que les inventions mêmes, à cause de leur fecondité et par ce qu'elles contiennent en elles la source d'une infinité d'autres qu'on en pourra tirer par une certaine combinaison (comme j'ay coûtume de l'appeller) ou application à d'autres sujets lors qu'on s'avisera de la faire comme il faut; j'ay crû estre obligé de faire part au public de l'origine de celle-cy. J'ay donc consideré, que les quadratures que nous avons trouvées jusqu'icy par l'analyse ordinaire, dependent des regles Arithmetiques de trouver les sommes des rangs reglés, ou des progressions de nombres rationaux. Mais les ordonnées du cercle estant irrationelles, j'ay taché de transformer le cercle en une autre figure, du nombre de celles que j'appelle rationelles, c'est à dire dont les ordonnées sont commensurables à leurs abscisses. Pour cet effect j'ay fait le dénombrement de quantité de Metamorphoses, et les ayant essayées par une combinaison tres aisée (car je pourrois par ce moyen écrire en une heure de temps une liste de plus de 50 figures planes ou solides, differentes, et neantmoins dependentes de la circulaire) j'ay trouvé bientost le moyen que je m'en vays expliquer. J'ay crû cependant à propos de remarquer cecy en passant pour justifier ce que j'avois dit autresfois de l'utilité des combinaisons pour trouver des choses que l'algebre et si vous voulez, l'analyse même telle que nous l'avons ne sçauroit donner. Or le moyen que les combinaisons m'ont offert sert à trouver un nombre infini de figures commensurables à une figure donnée. Pour cet effect je me suis servi de ce lemme: Trois paralleles BC, GE, HF (fig. 1), passant par les trois angles d'un triangle BEF et un des costez EF estant prolongé jusqu'à la rencontre d'une des paralleles en C, le rectangle sous l'intervalle BC entre le point de rencontre C et l'angle B, par lequel passe cette parallele, et sous GH, la distance des deux autres paralleles

GE, HF, c'est à dire le rectangle PGH (en supposant BGH normale à BC, et CP égale et parallele à BG) sera le double du Triangle BEF. De même, si HQ égale à BM, le rectangle QHN sera égal au double Triangle BFL. Et si ces bases EF, FL etc. sont infiniment petites, et continuées pour remplir*) tout l'Espace EB((E))LFE à la courbe EFL((E)), et de même si GH, HN etc. sont infiniment petites afin que les rectangles BGH, QHN etc. remplissent tout l'espace PG((G))((P))QP à la courbe PQ((P)), tout cet espace sera le double de l'autre espace. Et puisque FEC, LFM, ((E))((C)) seront les touchantes de la premiere courbe, le theoreme se pourra enoncer generalement ainsi: Si d'une courbe E((E)) on mene à un costé AB d'un angle droit ABC les ordonnées EG, ((E))((G)), à l'autre costé BC les touchantes EC, ((E))((C))), alors la somme des interceptées BC, ((B))((C)) entre le point de l'angle B et le point de la rencontre des touchantes C ou ((C)) appliquées normalement à l'axe AB ou GP, ((G))((P)), c'est à dire la figure PG((G))((P))QP sera le double de l'espace EB((E))E compris entre une portion de la premiere courbe et les droites qui joignent les extremités de cette portion au point B.

Ce theoreme est un des plus considerables et des plus universels de la Geometrie. Et j'en ay tiré quelques consequences qui meritent d'estre touchées en passant. Premierement par ce theoreme on peut demonstrer Geometriquement et sans induction de nombres (que Mons. Wallis a donnée dans son excellent ouvrage de l'Arithmetique des infinis) toutes les quadratures parfaites que nous avons jusqu'icy. Car nous n'avons que celles des Paraboles, sçavoir de celles dont les equations sont $x^z a^v \sqcap y^{z+v}$, et celles des Hyperboloeides dont les equations sont $x^z y^v \sqcap a^{z+v}$, supposant x et y ordonnée et abscisse, a grandeur constante, z et v exponents des puissances de ces grandeurs, car il est aisé de faire voir par les methodes que nous avons *de maximis et minimis* ou *des touchantes*, que dans toutes les Paraboles et Hyperboles, les interceptées BC ou GP gardent une raison constante à leurs ordonnées GE (comme par exemple dans la parabole ordinaire GP est la moitié de GE) donc la figure B((G))((P))PB ou sa moitié, sçavoir le segment B((E))EB aura une raison connue à l'espace B((G))((E))EB, c'est à dire au segment même plus une grandeur

*) Es scheint hier zu fehlen: par les Triangles BEF, BFL etc.

connue, sçavoir le triangle B((G))((E)), donc ce segment sera connu aussi bien que cet espace.

L'autre Corollaire que je dire du Theoreme general est la dimension absolue d'un certain segment de la Cycloeide, sans supposer la quadrature du cercle, [sçavoir si une droite AV parallele au plan RT, sur lequel roule le cercle generateur RBER, passe par le centre du cercle A, et coupe la cycloeide en V, joignant BV, le segment cycloeidal BVB, dont la base joint le sommet de la cycloeide B et le point d'intersection V, sera égal à la moitié du quarré du rayon du cercle ou au triangle BAE]. *)

Le troisieme Corollaire est la quadrature Arithmetique du Cercle. Car la courbe E(E)((E)) estant un arc de cercle, la courbe des interceptées, sçavoir BP(E)((P)), se pourra rapporter a l'angle droit RBC par cette equation $\frac{2az^2}{a^2+z^2} \sqcap x$, appellant BG ou CP, x et BC ou GP, z, c'est à dire RB sera à BG en raison doublée de AC à BC, comme il est aisé de demonstrer. D'ou il s'ensuit premierement que celuy qui trouvera une regle de donner par abregé la somme d'un tel rang, quoyque fini, de nombres rationaux: $\frac{2,1}{1+1}$ ou $\frac{2}{2}$, $\frac{2,4}{1+4}$ ou $\frac{8}{5}$, $\frac{2,9}{1+9}$ ou $\frac{18}{10}$, $\frac{2,16}{1+16}$ ou $\frac{32}{17}$ etc. sans estre obligé de les adjouter ensemble l'un apres l'autre, aura achevé la quadrature du cercle, parceque c'est la progression des ordonnées CP de la figure BCPB, dont la quadrature donneroit celle du Cercle. Mais à present ce n'est pas encor la quadrature Arithmetique. Et pour y arriver il faut se servir de la belle methode de Nicolaus Mercator, selon laquelle, puisque a estant l'unité et $\frac{x}{2}$ égal à $\frac{z^2}{1+z^2}$, la même x sera égale à $z^2 - z^4 + z^6 - z^8$ etc. à l'infini, et la somme de toutes les x égale à la somme de toutes les $z^2 - z^4$ etc. Or la premiere de toutes les z estant infiniment petite, et la derniere estant d'une certaine grandeur, comme BC que nous appellerons b, la somme de toutes les z^2 sera $\frac{b^3}{3}$, et la

*) Leibniz pflegte die Stellen, die in der Reinschrift seiner Briefe wegbleiben sollten, in Klammern einzuschliessen.

somme de toutes z^4 sera $\frac{b^5}{5}$ etc. (par la quadrature des paraboles), donc la somme de toutes les x ou l'espace BCPB, ou la difference du rectangle CBG et du double segment du cercle BEB sera $\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9}$ etc. donc (par une suite assez aisée de la Geometrie ordinaire) l'arc BDE sera $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7}$ etc. le rayon estant 1 et BC, touchante de la moitié de l'arc, estant appellée b. Ce qu'il falloit demonstrer. J'avoue que cette demonstration ne pourra pas estre entendue de tout le monde, parcequ'elle suppose bien des choses qui ne sont connues qu'à ceux qui sont versez dans les nouvelles decouvertes et qui sçavent manier les characteres ou symboles. Mais il n'y en a que trop pour ceux-cy: et il faudroit un volume pour satisfaire aux autres. On pourroit prouver aussi le rapport qu'il y a entre la figure des interceptées B((G))((P))PB et le cercle, en supposant la quadrature de la Cissoeide trouvée par Mons. Hugens, comme il m'a fait remarquer. Mais la demonstration que je viens de donner m'a servi de principe d'invention et est feconde en theoremes nouveaux. S'il y a lieu d'esperer qu'on pourra jamais arriver à une raison analytique, exprimée en termes finis, du Diametre à la circonference, je croy que ce sera par cette voye, car quoyque les expressions soyent infinies, nous ne laissons pas quelques fois d'en trouver les sommes: et pour cet effect je donneray pour conclusion l'observation suivante, qui me paroist tres curieuse:

$\frac{1}{3}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{35}\ \frac{1}{48}\ \frac{1}{63}\ \frac{1}{80}\ \frac{1}{99}\ \frac{1}{120}$ etc. dont la somme $\sqcap \frac{3}{4}$ la progression estant continuée à l'infini

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{35} \cdot \frac{1}{63} \cdot \frac{1}{99} \cdot$ etc. . . . . . . $\sqcap \frac{2}{4}$

$\cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{48} \cdot \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{120}$ etc. . . . . . . $\sqcap \frac{1}{4}$

$\frac{1}{3} \cdot \cdot \cdot \frac{1}{35} \cdot \cdot \cdot \frac{1}{99} \cdot$ etc. . . . . . . $\sqcap$ pendet ex quad. circl.

$\frac{1}{8} \cdot \cdot \cdot \frac{1}{48} \cdot \cdot \cdot \frac{1}{120}$ etc. . . . . . . $\sqcap$ pendet ex quad. hyperbol.

II.

PRAEFATIO OPUSCULI DE QUADRATURA CIRCULI ARITHMETICA.

Quoniam Problema de Quadratura Circuli in omnium ore versatur et ardentibus quaerentium studiis etiam apud homines Geometriae prorsus expertes celebre redditum est, operae pretium erit naturam quaestionis paucis exponere, ut appareat quid ab omni aevo quaesitum sit, quid ante nos praestitum, quid a nobis adjectum quidque agendum supersit posteritati.

Cum Pythagoras ejusque discipuli Geometriae rectilinea Elementa absolvissent, quae postea ab Euclide in unum corpus redacta sunt, jamque id effectum esset, ut cuilibet figurae rectilineae planae datae exhiberi posset quadratum aequale, quod scilicet omnium figurarum rectilinearum simplicissimum et quodammodo caeterorum mensura est; cogitari coepit an non posset circulo exhiberi aequalis figura rectilinea, adeoque et aequale quadratum. Et hoc est illud, quod Circuli quadratura vulgo vocatur; nam si Triangulum quoddam aut aliud Polygonum quodcunque Circulo aequale describi posset, utique et quadratum ei aequale esset in potestate. Et quoniam Archimedes ostendit, Triangulum rectangulum, cujus altitudo sit radius, basis autem sit circumferentia in rectam extensa, fore circuli duplum, ideo si quis inveniet rectam quandam circumferentiae circuli aequalem, daret nobis quadraturam.

Hic nonnullis, qui explicationem audiunt, mirari subit, an rem, ut ipsis videtur, facillimam tamdiu quaesierint Geometrae; quid enim facilius quam rectam circumferentiae aequalem invenire, circulo materiali filum circumligando idque postea in rectum extendendo ac mensurando. Eodem jure dicere possent, facile quadrari circulum, si cerea massa primum circularis, postea ad quadratam figuram redigatur, aut si aqua ex cylindro cavo in trabem quadratam excavatam transfundatur, nam ex aquae altitudine apparebit, quomodo circulus, qui est basis cylindri, sit ad quadratum, quod est basis trabis sive prismatis excavati, et si eadem aqua duplo vel triplo altius assurgat in prismate quam in cylindro, erit quadratum circuli dimidium vel triens, adeoque aliud quadratum, quod hujus duplum triplumve sit, quale per Geometriam nullo negotio invenitur, erit circulo aequale. Verum sciendum est, tale quiddam a Geometris non quaeri, sed viam ab illis investigari, per quam sine ullo circulo materiali ejusve transformatione aut ad planum applicatione, certa arte ac regula instrumentove quod dirigere sit in potestate, qualia sunt, quibus Circulus aut Ellipsis aliave linea describitur, inveniri ac designari possit recta circumferentiae aequalis, vel etiam latus quadrati circulo aequalis. Itaque per filum in rectum extensum, aut etiam per rotam in plano provolutam aut regulam circumferentiae materialis partibus successivo contactu applicatam non quaeritur quadratura circuli. Hinc etiam quadratura circuli per contactum Helicis ab Archimede exhibita non est illa quae quaeritur, neque pro tali eam venditavit Archimedes. Nimirum Helix est curva linea, quae describitur a stylo, qui per radium circa centrum euntem a centro versus circumferentiam incedit et planum subjectum immobile apice suo attingit inque eo vestigium motus sui, ex recto circularique compositi, relinquit; modo intelligatur motum radii circa centrum et styli in radio esse uniformes aut proportionales. Talis autem linea non est in potestate, neque enim (sine circulo materiali) effici hactenus a nobis potest, ut aequali aut proportionali velocitate moveantur semper radius circa centrum et stylus in radio. Deinde si descripta jam esset, deberet huic helici materialiter ex plano excisae regula quaedam tangens applicari, cujus ope recta circulo aequalis determinaretur.

Porro Problemati de Quadratura Circuli connexum est problema de sectione Angulorum universali, sive Trigonometria Geometrica, cujus ope scilicet Anguli tractari possint instar linearum rectarum, ut possit inveniri angulus, qui ad alium datum habeat rationem datam numeri ad numerum, vel etiam rectae ad rectam, item ut ex datis lateribus Trianguli inveniri possit quantitas anguli seu arcus eum subtendentis ratio ad circumferentiam suam totam, et ut vicissim uno angulo et duobus lateribus, vel duobus angulis et uno latere dato, caetera in Triangulo geometrice inveniantur. Haec autem omnia praestari sine Tabulis possent, si plena Circuli daretur Quadratura, *plena*, inquam, id est circuli et omnium ejus partium, segmentorum scilicet, ut CEFC (fig. 2), atque sectorum ut ABDC, ita enim etiam cuilibet circumferentiae portioni sive arcui, ut BDC, aequalis inveniri posset recta, quemadmodum ostendit Archimedes, ac proinde arcus (et qui illis respondent anguli) instar linearum rectarum tractari possent, quod longe utilius foret, quam ipsamet circuli quadratura sola. Hoc enim modo sine ullis Sinuum Tabulis omnia problemata Trigonometrica efficere possemus; Trigo-

nometriae autem quantus sit in omni re mathematica usus, nemo ignorat.

Porro plena pariter ac minus plena Circuli Quadratura vel empirica est vel rationalis: Empirica, quae filo extenso aliisque transformationibus ac tentamentis fieret, et hanc jam rejecimus; Rationalis, quae arte quadam invenitur et secundum regulam ex rei natura ortam procedit. Rationalis autem est vel exacta vel appropinquans, utraque vel per calculum vel per ductum Linearum: per calculum vel finitum vel infinitum, et vel per numeros rationales vel per irrationales. Omnis quadratura appropinquans appellatur *Mechanica*, sive fiat per ductum linearum, quales ingeniosissimae Willebrordi Snellii et imprimis Christiani Hugenii aliaeque nonnullae, sive fiat per calculum, quemadmodum Archimedes, Metius, Ludolphus a Colonia, Jac. Gregorius Scotus, aliique fecere. Et Archimedes quidem vidit ope Polygonorum inscriptorum et circumscriptorum, quantumvis ad circuli magnitudinem accedi posse. Si enim Polygona duo similia, qualia delineare docet Euclides, ut Trigonum, Hexagonum, aliave circulo inscribantur, poterunt angulis quos comprehendunt bisectis (bisectio enim anguli per Elementa fieri potest) alia duo duplum laterum vel angulorum numerum habentia inscribi ac circumscribi, idque in infinitum continuari, circulo semper inter ultimum inscriptum et circumscriptum cadente. Nempe si a trigono incipias, sequetur hexagonum, dodecagonum, 24^{gonum}, 48^{gonum}, 96^{gonum}, inscriptum pariter et circumscriptum. Et hoc modo procedi potest, quousque voles, et quoniam cujuslibet polygoni geometrice per has bisectiones inventi area semper haberi potest in numeris satis exactis, ideo semper duae habebuntur areae, intra quas circulus cadet, quae propius semper accedent, et ita fieri potest, ut error sit minor quovis dato, id est si quis a me postulet numerum, qui rationem circumferentiae ad diametrum tam prope exprimat, ut non differat a vero centesima millesima, aliave unitatis parte, id continuatis bisectionibus efficere possum. Hanc methodum Archimedes coepit, Metius longius, sed longissime omnium incredibili labore produxit Ludolphus a Colonia, qui si scivisset compendia hodie nata, utique magna laboris parte fuisset levatus. Ex proportionibus autem inventis ad usum in minimis sufficit Archimedea, quod scilicet circumferentia sit ad diametrum ut 22 ad 7, in mediis Metiana, quod sit ut 355 ad 113, in magnis satis est adhiberi partem Ludolphinae, quod sit ut . . . .

ad . . . . Inventa autem ratione diametri ad circumferentiam potest facile omnis alius arcus quilibet mensurari ope Tabulae Sinuum. Nam si quis ex tabulis excerpserit sinum dimidii minuti ac duplicaverit, habebit chordam minuti, seu ipsius arcus qui sit 21600ma pars circumferentiae, quae chorda, cum mediocris exactitudo desideratur, potest arcui suo aequalis poni, adeoque ad arcus exempli causa septem graduum inveniendam longitudinem, quoniam is 420 minuta continet, suffecerit chordae unius minuti longitudinem ex Tabulis inventam per 420 multiplicari. Si quis exactius adhuc procedere velit, sinu minuti secundi eodem modo uti potest.

Et haec quidem Circuli ejusque partium quadratura, etsi Rationalis sit, Mechanica tamen appellatur. Exacta autem est, quae quaesitam Circuli aut arcus magnitudinem exacte exhibet, eaque aut *Linearis* aut *Numerica* est, scilicet vel ductu linearum, vel expressione valoris. Valor exprimi potest exacte, vel per quantitatem, vel per progressionem quantitatum, cujus natura et continuandi modus cognoscitur: per quantitatem, ut si quis numerum aliquem sive rationalem, sive irrationalem, sive etiam Algebraicum, aequationi cuidam inclusum daret, quo valor arcus circuli exprimeretur; per progressionem, si quis ostendat progressionem quandam, cujus continuandae in infinitum regula datur, totam simul sumtam arcus vel circuli valorem exacte exprimere. Prior expressio a me vocatur *Analytica*, posterior vero, cum progressio procedit in numeris rationalibus, jure *Quadraturae Arithmeticae* titulo censeri posse videtur, ut cum dico: Si quadratum diametri sit I, circulum aequari toti progressioni fractionum sub unitate imparium alternis affirmatarum et negatarum, nempe $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ etc. in infinitum, ut in hoc opusculo demonstrabitur, ubi negari non potest, exactum quendam circuli valorem expressionemque magnitudinis ejus aliquam omnino veram esse repertam. Ipsa enim series horum numerorum tota utique non est nihil, potest enim augeri ac minui, possunt multa de ea theoremata evinci. Et quomodo, obsecro, possibile est, eam esse nihil, si valorem circuli exprimit, nisi hunc quoque nihil esse putemus. Quodsi ergo est aliquid, utique aliquem circuli valorem exactum deprehendimus. Et si quis aliquando reperiret progressionem characterum, qua semel cognita Ludolphi expressio sine novo calculo continuari posset in infinitum (qualem progressionem utique regula quadam certa constare necesse est) quod

foret pulcherrimum, is haberet quadraturam circuli Arithmeticam in integris, quemadmodum nos dedimus in fractis. Sed hanc regulam et difficillimam fore arbitror, et valde compositam, et minus pulchrum theorema exhibituram, ac nostra, in qua mira quaedam naturae simplicitas elucet, uti illi ipsi numeri, qui sunt differentiae omnium ordine quadratorum, circuli ad quadratum a diametro rationem exprimant, ut adeo vix ipsa analytica circuli expressio una quantitate facienda, si quando reperietur, pulchrior futura videatur. Praeterquam quod eadem regula non circulus tantum, sed et quaelibet ejus portio, nec circumferentia tantum, sed et quilibet arcus inveniatur, quod expressione analytica aequabili fieri impossibile est. Regula nostra generalis, adeoque *Quadratura Arithmetica plena* huc redit, ut Tangente, quae radio non major sit, posita b, radio Unitate, arcus ipse scil. quadrante non major sit $\frac{b}{1}-\frac{b^3}{3}+\frac{b^5}{5}-\frac{b^7}{7}+\frac{b^9}{9}-\frac{b^{11}}{11}$ etc. Unde Trigonometrica problemata sine tabulis efficienda oriuntur. De quo postea.

Supersunt adhuc Quadraturae exactae duae, altera Linearis sive Geometrica, altera Analytica. Equidem nec omne Analyticum Geometricum est; possunt enim exprimi magnitudines quaedam, quae per cognitas artes non possunt ductis lineis exhiberi, contra lineae designari possunt instrumentis, quarum expressio nondum sit in potestate. Ostendam enim aliquando esse Lineas Geometricas, quae non minus facile ac Cartesianae motibus regularum certa quadam ratione incedentium describantur et aeque geometricae sint ac parabolae et hyperbolae, et ad certa quaedam problemata solvenda unice necessariae sint, calculo tamen ad aequationes quasdam certasque dimensiones revocari nequeant. Perfecta autem quadratura illa erit, quae simul sit Analytica et linearis, sive quae lineis aequabilibus, ad certarum dimensionum aequationes revocabilibus, construatur. Hanc impossibilem esse asseruit ingeniosissimus Gregorius in libro *de Vera Circuli Quadratura*, sed demonstrationem tunc quidem, ni fallor, non absolvit. Ego nondum video, quid impediat circumferentiam ipsam aut aliquam determinatam ejus portionem mensurari, et cujusdam arcus rationem ad suum sinum, certae dimensionis aequatione exprimi. Sed *relationem arcus ad sinum in universum aequatione certae dimensionis explicari impossibile est*, quemadmodum in ipso opusculo demonstrabo, unde