tiones transcendentes. Est autem utique generalissima, quia om-
nibus curvis analyticis pariter ac transcendentibus communis est.
Eam quia breviter satis describere non possum et alioqui haec
epistola prolixissima est, alteri tempori servo. Tres ais methodos
quadraturarum a Te aestimari, unam qua Heuratius, Barrovius
aliique passim utuntur ope tangentium; alteram meam transmutandi
figuram unam in aliam ope calculi; tertiam tuam per diversas ejusdem
solidi sectiones. Ego vero omnes istas tres methodos pro partibus
habeo generalis Calculi mei Tetragonistici, cujus exemplum tan-
tum erat methodus illa transmutatoria, quam Tibi communicavi.
Nam et caetera omnia per calculum certum et constantem efficio;
unde plurima theoremata methodique a Gregorio aliisque data mihi
non habentur tanti, nam inter mea tantum rudimenta fuere; postea
vero ista omnia calculo consequi didici, et eadem opera nactus
sum multo majora. Itaque non sine causa optavi, ut in alia
potius inquireres momenti majoris, et quae nondum sunt in
potestate, veluti (1) demonstrationem impossibilitatis quadra-
turae portionis alicujus specialis, ex. g. Circuli integri; (2) Me-
thodum tangentium inversam, quando scilicet curva quaesita
est transcendens, nam quando est analytica, tunc etiam methodum
tangentium inversam universaliter in potestate habeo; in transcen-
dentibus autem calculus quidem meus tetragonisticus saepissime
satisfacit, sed supersunt tamen aliqua, quae nondum satis excussi,
adeoque nondum possum pronuntiare, me ea habere in potestate;
(3) Resolutionem aequationum, in quibus incognita in exponentem
ingreditur ac proinde inventionem radicis sive per valorem tran-
scendentem (literas vel numeros irrationales in exponente exhiben-
tem) sive per valorem communem (cum non nisi numeri rationales
exponentem ingrediuntur) quando id fieri potest. Hoc autem tertio
capite effecto, duo priora, quadratura scilicet et methodus tangen-
tium inversa, statim absoluta erunt; (4) Resolutionem problematum
Geometriae communis (quae scilicet ad aequationes ordinarias re-
vocantur) per calculos brevissimos et constructiones elegantissimas
lineares: huc pertinet ars contrahendi calculum ab initio, ut postea
non sit opus depressione; ars ex calculo concinnandi elegantes
constructiones lineares, imo ars perveniendi ad constructiones sine
calculo per analysin seu non tam magnitudinis (quae ad calculum
pertinet) quam situs, in quo mihi videntur aliquid habuisse Veteres,
quod obliteratum hodie restitui, ac forte longius produci posset.

Haec tractatio etsi minus sit grandisona quam priores, est tamen
magis captui communi accommodata nec minus ingenii desiderat
quam ulla aliarum; caeterum jam supra aliquid ex ea attigi;
(5) Resolutionem problematum Numericorum Diophanteorum, sed
in eo sum, ut hunc articulum expungam. Nam aliquot ab hinc
septimanes viam et facillimam et generalissimam reperisse videor,
omnia haec problemata resolvendi, et quando id in numeris ratio-
nalibus fieri non potest, demonstrandi impossibilitatem. Caeterum
haec quatuor aut quinque desiderata a Te examinari optarem. Haud
dubie enim multa in illis magni momenti detegeres; in aliis vero
quae jam in potestate nostra sunt, Te parciorem esse suaderem,
nisi ubi forte elegantes progressiones et pulchra theoremata re-
peries. Nam etiam quando aliquid in potestate habemus, non ideo
tamen pulchra theoremata in eo latentia eruimus atque animadver-
timus. Itaque tametsi utique manifeste habeamus in potestate enu-
merationem omnium curvarum analyticarum communem, quoniam
tamen calculus ad eam rem necessarius, nisi arte tractetur, satis
prolixus est, ideo pulchrum aliquid et difficile praestabis, si veram
curvarum hujusmodi progressionem in infinitum progredientem
nobis deteges. Saepe enim fit ut diversae inter se aequationes,
tamen ejusdem generis sint, ex. g. xy aequ. a^2 et $x^2 y^2$ aequ. b^2,
utraque aequatio est ad Hyperbolam; hoc autem in altioribus con-
stanti ac facili ratione detegere posse magni momenti foret. Illud
etiam nosse vellem, quomodo ut ais, triginta tantum quadraturis
determinatis, alias omnes exhibere confidas. Caeterum dum reli-
qua tuarum literarum percurro, obiter animadverto Te scribere:
„multi admodum falso credunt Artem Combinatoriam esse separatim
scientiam et ante Algebram ac alias scientias addiscendam, imo
sunt qui credunt Artem Combinatoriam plura in se continere quam
artem vulgo Algebram dictam, hoc est filiam plus scire quam ma-
trem, nam revera si nulla alia re id vel ex sola potestatum com-
positione patet Artem Combinatoriam ex Algebra addisci.“ Hacte-
nus verba tua, quae haud dubie in me diriguntur. Illi enim multi,
qui ita, ut Tu ais, putant, praeter me opinor pauci sunt; puto
autem Te recte sentire, quia me non videris percepisse. Nam si
combinatoriam habes pro Scientia inveniendi numeros variationum,
fatebor Tibi lubens eam scientiae Numerorum esse subordinatam
et per consequens Algebrae, quia et scientia Numerorum Algebrae
subordinata est, utique enim non invenies numeros illos nisi ad-

dendo, multiplicando etc. Multiplicandi autem ars ex scientia generali de quantitate, quam nonnulli Algebram vocant, descendit. Verum mihi aliud longe est Ars Combinatoria, scilicet scientia de formis seu de simili et dissimili, quemadmodum Algebra est scientia de magnitudine seu de aequali et inaequali, imo Combinatoria parum differre videtur a Scientia Characteristica generali, cujus ope characteres apti ad Algebram, ad Musicam, imo et ad Logicam excogitati sunt aut excogitari possunt. Hujus scientiae etiam portio est Cryptographia, quamquam in ea non tam componere quam resolvere composita et ut ita dicam radices investigare difficile sit. Nam quod radix in Algebra, id clavis in Cryptographia Divinatoria. Algebra a se ipsa tantum habet regulas aequalitatum et proportionum, sed quando problemata difficiliora sunt et aequationum radices valde involutae, cogitur mutuo sumere aliqua a scientia superiore de simili et dissimili seu a Combinatoria. Nam artificium comparandi aequationes similes seu ejusdem formae jam Cardano aliisque fuit notum et a Vieta distinctissime descriptum, proprie ex Arte Combinatoria petitum est, nec tantum cum de formulis magnitudinem exprimentibus atque aequationibus resolvendis agitur, sed etiam aliarum formularum nihil cum magnitudine commune habentium clavis involuta evolvenda est, adhiberi potest ac debet. Ars etiam quaerendi progressiones et condendi tabulas formularum est pure Combinatoria, neque enim tantum in formulis magnitudines exprimentibus, sed et aliis omnibus locum habent. Possunt enim etiam formulae exceptari exprimentes situm atque ductum linearum et angulorum, magnitudinibus licet non consideratis, cujus ope facilius utique elegantiores constructiones reperientur, quam per calculum magnitudinum. Quod Triangulorum eosdem angulos habentium latera sint proportionalia, hoc demonstrari potest ope theorematum Combinatoriorum (seu de simili et dissimili) longe naturalius, quam fecit Euclides. Fateor interim nusquam pulchriora, quam in Algebra, Artis Combinatoriae sive Characteristicae generalis specimina edita esse, ac proinde qui Algebram teneat, facilius Combinatoriam generalem constituturum, quia semper ad scientias generales facilius a posteriori ex specialibus exemplis, quam a priori pervenitur. Ipsam autem Combinatoriam seu Characteristicam generalem longe majora continere, quam Algebra dedit, dubitari non debet; ejus enim ope omnes cogitationes nostrae velut pingi et figi et contrahi atque ordinari possunt: pingi aliis ut doceantur;

figi nobis ne obliviscamur; contrahi ut paucis, ordinari ut omnia in conspectu meditantibus habeantur. Quamquam autem sciam Te nescio qua de causa praeoccupatum ab his meditationibus meis fuisse alieniorem, credo tamen, ubi serio rem examinaveris, mecum sensurum, generalem hanc Characteristicam incredibilis usus fore, cum et lingua sive scriptura ejus ope excogitari possit, quae paucis diebus disci possit et omnibus exprimendis, quae in usu communi occurrunt, sit suffectura et ad judicandum atque inveniendum mire valitura, exemplo characterum numeralium; utique enim facilius multo arithmeticis characteribus calculamus, quam Romanis idque vel calamo vel mente: haud dubie quia characteres Arabici commodiores sunt, id est genesin numerorum melius experimentes. Nemo autem vereri debet, ne characterum contemplatio nos a rebus abducat, imo contra ad intima rerum ducet. Nam hodie ob characteres male ordinatos confusas saepe notitias habemus, tunc autem ope characterum habebimus facile distinctissimas; erit enim in promtu velut Mechanicum meditandi filum, cujus ope idea quaelibet in alias, ex quibus componitur, facillime resolvi possit, imo charactere alicujus conceptus attente considerato, statim conceptus simpliciores, in quos resolvitur, menti occurrent: unde quoniam resolutio conceptus resolutioni characteris ad amussim respondet, characteres tantum aspecti nobis adaequatas notitias sponte et sine labore ingerent in mentem, quo nullum ad perfectionem mentis majus auxilium sperari potest. Haec ad Te paulo fusius perscribere volui, mi Amice, ut experirer plusne apud Te rationes, quam praejudicatae opiniones valerent; si dices, rem esse praeclaram sed difficilem, satis a Te obtinui. Nam difficultas me non terret, cum satis videam certas et ni fallor commodissimas superandi eam rationes. Spinosae opera posthuma prodiisse non ignorabis. Extat et in illis fragmentum de Emendatione intellectus, sed ubi ego maxime aliquid expectabam, ibi desinit. In Ethica non ubique satis sententias suas exponit, quod sic satis animadverto. Nonnunquam paralogizat, quod inde factum, quia a rigore demonstrandi abscessit; ego certe puto, utile esse in Geometricis discedere a rigore, quoniam in illis facile caventur errores, at in Metaphysicis et Ethicis summum demonstrandi rigorem sequendum puto, quia in illis facilis lapsus; si tamen Characteristicen constitutam haberemus, aeque tuto in Metaphysicis ac in Mathematicis ratiocinaremur. Ais definitiones

rerum esse traditu difficiles: intelligis fortasse conceptus quam
maxime simplices et ut ita dicam originarios, quos tradere fateor
difficile esse. Verum sciendum est ejusdem rei plures esse de-
finitiones, id est proprietates reciprocas rem ab aliis omnibus
distinguentes, et ex una quaque nos omnes ducere posse alias rei
proprietates, quod etiam non ignoras, sed ex his definitionibus
aliae aliis perfectiores sive primis atque adaequatis notionibus pro-
priores sunt. Et quidem certam habeo notam definitionis perfectae
atque adaequatae, quando scilicet percepta semel defini-
tione dubitari amplius non potest, utrum res, ea
definitione comprehensa, sit possibilis vel non. Ce-
terum qui Characteristicam seu Analyticam universalem constituere
velit, initio quibuscunque uti potest definitionibus, quia omnes
continuata resolutione tandem in idem desinunt. Quod ais in rebus
valde compositis opus esse calculo, in eo plane mecum sentis:
idem autem est ac si dixisses opus esse characteribus, nihil aliud
enim est Calculus quam operatio per characteres, quae non solum
in quantitatibus, sed et in omni alia ratiocinatione locum habet;
interea quando id fieri potest, magni aestimo ea quae sine calculo
prolixo, id est sine charta et calamo, sola vi mentis peragi pos-
sunt, quia quam minimum pendent ab externis, et in Captivi quo-
que, cui negatur calamus aut cui ligatae sunt manus, potestate
sunt. Itaque exercere nos debemus tum in calculando, tum in
meditando, et debemus conari ea quae calculo sumus nacti etiam
sine calculo postea sola meditatione demonstrare, quod saepe suc-
cedere expertus sum. Sed non dubito, quin de multis idem sen-
tiamus, et si differamus sequendi ratione, quam nolim dissensus
inter nos causam esse, quemadmodum nec dissensus amicitiam
minuet. Quare spero sinceritatem meam Tibi non ingratam fore,
qua sententiam de tua radicum ex aequationibus extractione expo-
sui; quoniam enim a scopo abludere putavi, volui id Tibi signi-
ficare, ut labori parceres. Vicissim de mea exspecto judicium
tuum, cui sane multum tribuo, nec dubito profiteri et plurima me
didicisse a Te et etiamnum discere posse, Teque egregiarum in-
ventionum esse capacem, et quae ab aliis atque etiam me jam
exhibita sunt, etiam per Te praestare posse, si animum attendas.
Malim tamen publici boni causa Te animum potius applicare ad
intacta, et quae nondum in potestate habemus; spero etiam prae-
judicia nonnulla, quae contra meas opiniones quasdam habere vi-

deris, magis magisque deletum iri. Quod superest, vale faveque
ac sanitatis pariter tuae statum ac studiorum egregiorum progres-
sum significa etc.

VII.

Tschirnhaus an Leibniz.

Me accingo, ut literis Tuis respondeam, et primo quoad Me-
thodum meam radices exhibendi non miror, quod talia profers,
hanc enim plane non percepisti, quod quidem ex Tuis literis mihi
clarissimum, ut postmodum ostendam. Duo autem video in causa
fuisse: primum quod non sufficienter satis demonstrationem illius
explicarim, hoc est nimis breviter, licet revera contineat omnia,
quae ad eam necessaria sunt, et revera haec praevidebam, adeoque
eandem bis repetii, quamque in superioribus exemplo, sed unico
saltem declararam; verum cum admodum prolixus fuerim in ante-
cedentibus, vix me tum longius extendere poteram; secunda fuit,
quod quia absque dubio principium attentius quam reliqua respe-
xisti, hoc est primam partem (in tres etenim partes divido, quae
Tibi circa haec communicavi) hicque quaedam occurrebant, quae
videbantur cum tuis cogitatis consentire, omnia sequentia illis ap-
plicasti, hoc est rebus quae ab iis diversissimae, adeoque non mi-
ror Te ea non assecutum; omnia enim illa quae in prima parte
explico, saltem accidentalia sunt hujus Methodi, sed ipsa essentialia
parte secunda continentur, et revera melius fecissem, si secundam
partem primo collocassem, quod certe si denuo eam in ordinem
redigere tempus erit, non omittam, ne aliis quoque id impedimento
sit, quominus eandem facile percipiant, quod fusius jam et claris-
sime ostendam. Dicis itaque primo, posito ab etc. $= y$, abc etc.
$= z$, a^4 etc. $= h$, a^4b^4 etc. $= e$, $a^4b^4c^4 = z^4$, invenire ipsam e ex
datis y, z, h aeque difficile esse quam invenire aequationis propositae
radicem etc., quae omnia si Tibi concedam, nihil hoc ad me, nam
quae hic habes et quae in sequentibus porro deducis, me nullate-
nus tangunt; tali enim ratione ego prorsus nego me procedere.
Et haec .... clarissime ostendunt Te Reductionem meam quo-
que non percepisse adeoque nec demonstrationem hujus Methodi

quae ea nititur. Adeoque vides Te hisce meam Methodum non destruere (siquidem verum est quod jam suppono; statim autem exemplo aliquo demonstrabo, me talem viam radices determinandi non inire), is enim qui hoc ostendere vult, debet meam demonstrationem aggredi quam bis repetii in fine tertiae partis, ubi ostendi quod hac Methodo infallibiliter radices habeamus; hanc autem ostendere falsam, judico impossibile, nam profecto licet authoritas mea hic non valeat, possum tamen dicere, quod licet attente respexerim ad rem, quae revera facilis, attamen nihil potuerim invenire quod non solide concludat; sed non tam facilis apparebit, nisi illis qui attente artificium considerabunt, quod tradidi, quo reductio aequationum (quae post comparationem restat peragenda) facile peragitur. Illi enim qui easdem aequationes reducere conabuntur, via ordinaria ac experto labore respicient mea et mecum calculabuntur, absque dubio percipient reductionis meae facilitatae formam ac qua ratione in eam inciderim ex notatis parte secunda, atque si tum dignabuntur respicere ad demonstationem meam, absque dubio hanc optime percipient, confidoque hanc firmissimam eos esse experturos. Verum propius ad ipsam rem accedo et pergo ostendere, quae effecere, quominus eandem perceperis. Dicis itaque: *facile errorem deprehendi, quia plane olim similia cogitabam, a quibus postea tempus et progressus meditandi me liberarunt*, et paulo post: *Res eo tota redire videtur, ut potestates exprimamus per rectangula ab, abc, abcd etc., haec ergo ratio mire mihi blandiebatur, quemadmodum et Tibi arrisisse video, sed tandem irritam deprehendi.* Hucusque tua verba; ad quae respondeo, me absolute negare, quod in eo consistat mea Methodus, quodque e contra ex ea pateat, qui tale quid aggrediuntur, scopum nullatenus posse attingere (et revera candide fateor, me nec de illis quidem quantum scio cogitasse) quod non melius ostendere potero, quam si breviter declarem, in qua consistit mea Methodus, illudque omne uno exemplo illustrem, quo nulla obscuritas remaneat. Sit itaque linea recta quam vocemus x, haec concipiatur divisa esse in duas partes, in tres, in quatuor etc. atque sic in infinitum, quas vocemus a, b, c, d etc.; erit itaque $x = a + b$, $x = a + b + c$, $x = a + b + c + d$ etc. Jam fiant a qualibet tali aequatione omnes potestates x (hic forte statim credes, hoc cum tuis cogitationibus alias habitis, ut certo loco tuarum literarum

innuis, consentire, sed quaeso ne properes, mox diversissima sentias, et qui hucusque saltem pervenit, quidem in via recta est, prout credo multos ad haec reflexisse, sed ad progrediendum infinitae viae se offerunt quibus in avia deducimur et fateor me in vera obtinenda diu hic laborasse et observasse, sed tandem in eam incidi quae talis). Sit ex. g.

$$\begin{array}{llllll} x^4 = & a^4 & + 4a^3b & + 6aabb & + 12aabc \\ & b^4 & b^3a & \text{etc.} & \text{etc.} \\ & c^4 & a^3c & & \\ & \text{etc.} & \text{etc.} & & \end{array}$$

Considerando hasce quantitates observavi 1. eas omnes aequaliter compositas esse; 2. hasce quantitates aequaliter compositas duorum generum esse, quaedam enim sunt primitivae quae non dividuntur nisi per se ac unitatem, aliae quae ab his derivatae ac divisionem patiuntur, prioris generis sunt $a^4 + b^4 + c^4 + \ldots$, $aabb + acc + bbcc$, posterioris $a^3b + b^3a$ etc., item aabc etc. 3. Inter quantitates primitivas denuo esse hanc differentiam, quod vel omnes termini, ex quibus constant, sint quantitates simplices ex. g. $a + b$, $a + b + c$, item $ab + ac + bc$ etc., $abc + abd + bcd + acd$ etc., et has primitivas simplicissimas voco, vel quod omnes termini, ex quibus constant, sint potestates $a^3 + b^3 + c^3$, $a^4 + b^4 + c^4$ etc., item $aabb + aacc + bbcc$, item $aabbcc + aabbdd$ etc. 4. Hinc jam mea intentio in ejusmodi potestatibus omnia reducere ad primitivas quantitates, adeo ut nullae adessent quae non sint primitivae, uti fit supra, ubi adest a^3b etc., aabc etc., quae non sunt primitivae quantitates. *Et in eo consistit essentiale meae Methodi*, de quo tamen ne quidem mentionem facis in responsione tua, quasi ne quidem hac de re locutus fuissem in principio partis secundae, et ac si absque eo Methodus illa consistere queat. Jam quae sequuntur accidentalia sunt et possunt variis modis fieri, sed simplicissimam credo qua usus, et quae directe ex prioribus sequitur. 5. Ut itaque id quod non est primitivum in ejusmodi potestatibus ad tales reducerem, id conatus fui efficere ope quantitatum primitivarum simplicissimarum, de quo supra annotat. 3. adeoque supposui praeter $x = a + b$, $x = a + b + c$, $x = a + b + c + d$ etc. etiam $y = ab + bc + ac$, $z = abc$ etc., quae omnes talis sunt conditionis, et qua ratione porro ex iis intentum meum obtinuerim, parte prima prolixe ostendi. Sed notandum, ut ibi etiam notavi, non necessarium esse licet optimum ad tale quid efficiendum, ut utamur quantitatibus primitivis simplicissimis, quibuscunque enim aliis suppositionibus, modo quantitates sint primitivae, poterimus efficere ut potestates superiores ex puris quantitatibus primitivis constent (quod etiam non attendis, cum loqueris quod sola rectangula adhibeam, cum tamen aliquot exempla in communicatis ostenderim); num vero semper potestates sic reductae ad primitivas quantitates adhibeant medium ad radices determinandas, eo demonstrationem tunc non extendi, quia nondum tempus habui haec ad finem optatum deducere, et quia ea ipsa quae tunc inveneram ad id sufficiebant determinandum. Ex quibus patet haec nihil aliud esse quam perfectionem Elementorum lib. 2. Euclidis; qui si bene processisset, nobis talia Theoremata debebat exhibere, ille saltem unicum communicat prout ego desidero ex. g.

$$\begin{array}{l} xx = aa + 2ab, \\ \quad\;\; bb \end{array}$$

ubi utique tota potestas ex puris primitivis. Ac tandem hinc parte tertia ostendo ope talium Theorematum quae tunc inveni, hoc est potestatum quae fiunt a linea recta secta in quotcunque partes et quae ex puris primitivis quantitatibus constant, non solum omnium aequationum radices universales determinari, sed et particulares quae eandem cum prioribus compositionem obtinent, quam demonstrationem si destruere valeas, magnum quid mihi praestabis. Ex quibus percipies, quantum haec differant a tuis cogitatis, primo enim potestates illas non refero ad rectangula, sed ad primitivas quantitates: quae quidem multum differunt, qui enim prius praetendit, aliquid suscipit quod impossibile est, ut facile ostendere possem, sed hoc labore me sublevas, dum hoc concedis; sed qui posterius, rem omnino possibilem, ut in iis quae Tibi transmisi potuisti videre et quae variis modis fieri potest; sic ex. g. prior potestas redacta ad puras primitivas est talis

$$\begin{array}{ll} x^4 - 4abxx + 4abcx + \text{ dupl. } & \square ab + ac + bc, \\ \qquad \text{etc.} & -a^4 - b^4 - c^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{item } x^4 - 2aaxx - 8abcx - 2aabb + a^4. \\ \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \quad \text{etc.} \end{array}$$

2. qui meam Methodum scit, per eam dirigtiur, quas formulas eligere debeat ac qua ratione his uti, nimirum ut potestates illas ad primitivas quantitates redigat; verum qui a formulis incipit, sane infinitas vias prae se habet, quibus non nisi tentando progreditur nec certo sit quam eligere debeat, quae unica causa est quare ad haecce quae mihi de hisce Parisiis dixisti nunquam attendi nec revera aestimavi, quia talia mentem non perficiunt. Sed ego iisdem aliquid constans tunc quaesivi et utique

obtinui viam aliquam, sed quae laboriosa admodum et specialissimus prioris Methodi casus, et illa omnia quae tunc a Te hausi et quae proprio labore tunc assequutus fui, si illis inhaesissem diutius, revera effecissent, ut nihil praestans unquam assecutus fuissem, cum mihi non poterant dare cognitionem quam supra explicavi. 3. hinc quoque quod supra promisi facile ostendam, nimirum sit

$$\begin{array}{lll} x^4 - 4abxx + 4abcx + \text{ dupl. } & & \square ab + ac + bc \\ \quad\; - 4ac & & -a^4 - b^4 - c^4 \\ \quad\; - 4bc & & \end{array}$$

ponatur $x^4 - pxx + qx - r - 0$, atque hinc comparatione instituta habebimus tres aequationes pro tribus literis a, b, c inveniendis, atque invenies aequationibus hisce reductis ad cubicam perveniri aequationem, atque sic x quod = supponitur $a + b + c$, habebitur, hoc est radix $\square$to = $\square$to aequationis ope cubicae, quae revera diversa sunt ab iis quae percenses, et vides quidem rem mihi optime succedere ad meum finem obtinendum, quare tua utique quae adfers me nullatenus tangunt, ut dixi. Verum quia reductio ordinaria via procedendo laboriosa, ego ostendi exemplo, qua ratione haec eo reducere valeamus, ut nihil aliud opus erit quam hanc quaestionem solvere $ab + ac + bc = p$, $abc = q$, $a^4 + b^4 + c^4 = r$, quod facillimum, et eo exemplo universalem viam, qua ratione semper res ad tales quaestiones resolvendas, ubi rectangula et potestates occurrunt, reducere possimus, quod fateor non facile intelligetur nisi quis mecum calculetur, tunc etenim videbit causam hujus reductionis ab hac aequatione pendere $x^4 - 4yxx + 4zx + 2yy - a^4 - b^4 - c^4$. Sit jam $x^4 - pxx + qx - r$, nam hinc statim patet comparatione facta esse $4y = p$, adeoque $y = \frac{p}{4}$, $4z = q$ adeoque $z = \frac{q}{4}$; jam $2yy - a^4 - b^4 - c^4 = -r$, in hac aequatione y potest restitui et habebitur $a^4 + b^4 + c^4 = r + \frac{pp}{8}$, adeoque reduximus rem eo, ut sola rectangula y, z adsint et potestates aequales cognitis quantitatibus, et hinc si velis respicere ad Theoremata A et B, observabis hoc necessario semper fieri posse, cum enim Theoremata illa aequalem dimensionem in omnibus suis terminis obtinent, sitque x, xx, x^3, x^4 etc., necessario aliqui termini esse debent ut solae quantitates y, z, t etc. adjungantur x, xx, x^3 etc. adeoque comparatione facta hae quantitates y, z, t aequales erunt cognitis p, q, r etc.

sique jam ubicunque occurrunt potestates y, z, t etc., restituantur cognitae p, q, r etc. quae ipsis aequales, res eo reducta erit, ut nihil supersit quam quaestionem solvere ubi rectangula et potestates dantur aequales cognitis, quod ultra modum aestimandum est. Qui haec percipiet, videbit me laboriosissimam rem ad maximam facilitatem reduxisse et hinc absque dubio meam demonstrationem facile intelliget, hoc ipso enim nititur. Quae quantum in me est, hic volui clarum reddere, ut a Te plane percipiatur, et tunc tuum judicium non reformido, scio enim Te candidi esse ingenii et inventi nunc praestantiam nosse aestimare. Hinc jam porro non difficulter respondere possum ad omnia reliqua quae habes; dicis Te vero tunc memini non rectangulis solis, sed aliquando et potestatibus uti solitum, sed nunc vero se rectangula etiam Tibi approbavere, quibus credo satis percipio, quid velis, uti et quando putes primam meam inquisitionem circa talia fuisse irrationalium ope (non vidisti quae multo antea circa regulam Hudenii qui quoque ponit $x = a + b$ laboraverim et quae adhuc reservo) et multa alia talia quae refers. Attamen de talibus disputare non mea ... consuetudo nec quoque credam circa ea me ulli unquam injustitiam fecisse, quapropter haecce relinquens sic respondeo. Causa in promptu est, quia tunc non sciebam potestates ad primitivas quantitates debere referri nec ab ullo haec audiveram et licet quis mihi dixisset rectangulis me uti debere, hoc tamen nihil mihi profuisset, si non dixisset rationem ob quam, hoc est quia quantitates primitivas simplicissimas repraesentant uti jam scio; porro quoque non scivissem cum rectangula sola non sufficiunt, quas insuper quantitates deberem assumere, ut hoc succederet, alias enim judicassem rem impossibilem et sic ab hoc opere penitus recessissem prout Tibi contigit; porro nec qui numeri his rectangulis praefigendi, absque eo enim res itidem successu destituitur, atque sic revera non multum mihi communicasset sua rectangulorum cognitione, quam in egregium tentationum labyrinthum praecipitando. Quoad Methodum vero qua ratione ipsa reductio fieri debet ad primitivas quantitates, hoc tanquam accidentale cuique relinquo, ut arbitrio suo disponat, mihi quidem brevissima visa fuit quam communicavi, sed forte alia re adhuc compendia offerrent, si revidendi tempus aderit, interim hactenus mihi non suffecit, nec jamdum, ut in praxi numerum saltem exemplorum cujusque formae determinarem, sed ipsa exempla quaeque adeo apponere ne-

cesse habui; alias equidem potestates quoque exprimo $x^3 = a^3 + 3a^2b + 6abc$, uti in Algebrae meae compendio haec cum aliis non contemnendis asservo. Observationes quae a parte assignare curasti sunt peregregiae et placuerunt, licet enim verum sit, quod qui generalem habet Methodum necessario haec, si ita se habeant, posse in praxi acquirere, attamen et perutile est tam generales reflexiones facere et quae mentem aptam reddunt, ut res quam abstractissime concipiat, quod apprime in Mathematicis necessarium. Quoad ultimam annotationem non necesse est ut multum labores in formis radicum determinandis; si enim ponamus $x = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, $x = \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b} + \sqrt[5]{c}$ etc., haec si liberentur a signis radicalibus radices universales omnium aequationum exhibent ut alias dixi; sed quia haec liberatio a signis perquam molesta est, hinc haecce ad superiorem Methodum reducta, quae omnia compendia signa radicalia breviter ablegandi in se continet, parvo labore haec poterimus et certo determinare. Atque haecce sufficiant hac vice circa hanc materiam.

Quoad quadraturas miror revera, quod mihi de novo affingis aliquid, quod tamen, cum viderem Te eo inclinare, posterioribus literis tam clare ostenderam, ut nauseam potuisset movere, et cum de tribus Methodis loquerer, quae mihi placerent, nonne expresse dixi, quod hanc Methodum aestimarem, quae in quavis quantitate (non saltem in solido) in sua Elementa resoluta (non tantum in superficies) omnibus modis quibus id fieri potest, haecce ad invicem adaequaret, et de hac Methodo dixeram, quod aeque late crederem illam se extendere, quam Tuae aequationes, quas appellare Tibi placet Tetragonisticas. Sed longum abest, si vellem omnia hic recensere, quae mihi in tuis literis affingis; sic eadem ratione revera non est mea sententia, quod improbem novitatem in definitionibus vocum hac ratione ut interpreteris, sed tantum inusitatum modum eas exprimendi, cum nulla inde utilitas et per alia magis usitata haec melius possimus efficere, et sic maxime laudo Vietam, quod potius literas alphabeti voluerit adhibere, quam nescio quae alia monstra characterum; sed maxime mihi in ipso displicet, quod tam pulchram scientiam foedarit talibus vocabulis: Hypobibasmus, Antithesis, Coefficiens, Gradus parodici, et infinitis aliis ineptiis, quae fateor si in libri alicujus lectione offendam, vix a me impetrare possim ut legam; quapropter Cartesius et Dn. Spinoza mihi ultra modum placent, quod a talibus abstinuerint, nam haec efficiunt, ut multi homines tales libros legere negligant, atque sic sapientiae augmentum damnum patitur et praeterea memoria oneratur superfluis. Quoad tuos characteres si utilitatem insignem afferant, non improbo, sed pro talibus reputavi, quia videbam in illis quae afferebas me aeque facile ac intelligibilius posse procedere, et saltem quatenus hominum ingenium expertus fui, observavi haec illis perquam molesta esse. Ac necdum probas satis praesentibus literis eorum utilitatem dum dicis, quibus problemata difficillima paucis lineis absolvo, ex. gr. invenire curvam talem ut intervallum AT (fig. 102) sit recta constans: nescio num mecum joceris, nonne hoc facillime et universaliter, sive AT sit constans sive quacunque ratione composita, Dn. Barrow Appendi. 3 p. 123 prop. 3 ostendit, et hoc ego absque illis characteribus alia methodo, quae quoque universalis, praesto tanta facilitate, ut statim absque ullo calculo pateat, qualis sit haec curva (sive convexam aut concavam versus CT desideres), et si calculo deberem uti, quatuor literis scriptis res peracta esset. Sed ut videas num vera loquar, exemplum tradam, ex quo cognosces, quanta sit ipsius facilitas, et num tui characteres Tibi majorem praebeant; etenim fere absque ut me servirem calculo, sequens solvi problema: sit BC perpendicularis ad BT Tangentem, quaerantur jam tales curvae, ut AT aut quaelibet ejus potestas multiplicata in AB aut quamlibet potestatem, item ut AC aut quaelibet ejus potestas multiplicata in AB aut quamlibet ejus potestatem sit = potestati convenienti a constante aliqua quantitate ex. gr. ut quadratum AT in AB sit aequale semper cubo a constante quantitate; dico omnes illas curvas esse geometricas. Et quoad Methodum tuam de differentiis, ubi hos ipsos characteres seu signa soles adhibere, quaeso, candide loquamur, nonne melius fecisses, illam hac aut simili ratione communicando (sit (fig. 103) curva HFGB quaecunque, sit HPML rectangulum, inveniatur jam curva BTQ, ita ut rectangulum JKNO erit aequale semper rectangulo DCRS, supponendo GE et FE esse indefinite parvas, hoc autem fiet si fiat ut AD (supponendo AF Tangentem esse) ad FD, sic constans KN ad DF), quam loquendo de curva differentiali et aliis talibus, quae credo pauci et non absque labore intelligant; ipse statim non intellexissem, nisi legissem, quae Barrow pag. 37 et 38 suarum Lect. circa haec habet et mihi notum fuisset ex eodem authore, quod modo indicavi, nec existimo Te fingere posse tuam Methodum ab iis quae dixi differre, haec enim

ex Tuis literis nimis aperta; et quicquid certe illa invenisti, ego hisce paucis eadem facilitate semper assequar. Sed jam ad ipsam Methodum accedo, nescio quare eam omnibus aliis praeferas; si hoc fieret ob eam rationem, quia natura nobis indicat, quod debeamus a simplicissimis incipere et rectangulum utique est simplicissima figurarum, quas scimus, utique Tibi assentirer, et hoc ipsum quidem Dn. Barrow bene perspexit, licet sero nimis, nam post multa superflua, quae nobis tradidit, observavit se eadem et multo praestantiora hoc unico observato (quod modo indicavi) posse acquirere; sed si ob aliam rationem hanc Methodum omnibus aliis praefers, plane diversum sentio, nam omnia quae ibi recenses, ego eadem ratione aliis infinitis modis possum praestare, cum eadem ratione sicuti ponendo rectangulum HLMP et assumendo omnes curvas geometricas aut analyticas BFH, determinare licet numerum curvarum BTQ quadrabilium; sic assumpta quacunque figura quadrabili loco trianguli, haec omnia eadem ratione assequi licet, atque hisce sufficienter ostendi, quare in aestimio habeam quaedam theoremata Dn. Barrow (fateor interim quod sua Theoremata infinities generaliora efficere potuisset, uti et Dn. Gregorius Scotus, qui haec sine dubio visu excepisset, existimabat, se Geometriam ad maximam universalitatem reduxisse, cum tamen sua Theoremata meorum, de quibus alias, perquam speciales casus existant). Et miror Te parvi facere eadem, et interim quae affers, nihil sunt, quam ea ipsa, ut jam fuse ostendi, aut ad minimum ego eadem hisce paucis praestare valeo. Et quaeso, nonne praeterea Dn. Barrow unico Theoremate, quod supra notavi pag. 123, omnes quadraturas ad Logarithmos reduxit? Ope hujus facillime Gregorii a S. Vincentio Theorema de hyperbola exhibetur (de aequalitate nimirum spatiorum, quatenus ad asymptotos refertur), ostenditur quadratricem hyperbolae esse Logarithmicam (quod Tu in Tua methodo desideras, quae tale quid ut fateris non exhibet). Ipsius Logarithmici spatii datur quadratura et infinita talia, quorum unumquodque aestimationem meretur. Atque sic me credo etiam ex Tuis ipsis literis deduxisse, quod mea aestimanda sint, licet verbis contrarium dicas. Dicis porro: et ita facile condi posset Tabula omnium Figurarum; ne haec Tibi persuadeas, fateor licet multa compendia adhibuerim, res tamen ultra modum laboriosa est; hunc interim fructum hinc obtinui, ut illa disquisitione, dum generalibus curvarum expressionibus omnes curvas quadrabiles determinare conabar, quod nimirum observavabam, qua ratione Resolutio Problematum Numericorum facillime sit expedienda ac generalissima ratione, et quando id in numeris non fieri potest, qua via demonstrandi impossibilitas innotescat; adeoque haecce postquam ad maximum compendium reduxi, ut inservire possent ali, qui forte talia suscipere ob prolixitatem non reformidaret, reliqui et me ad alia convertens perpendi haec multo facilius peragi posse, si rem sic aggrediamur. Sit curva quaecunque (fig. 104) et lineas AB et BC vocemus x et y (soleo autem, ut obiter hoc notem, characteres figurae sic ascribere, ut medium locum occupent intra duo puncta, quibus linea terminatur, quam repraesentant), si jam ex data x omnes compositiones possibiles faciamus (ex. gr. x, xx, x^3, x^4 etc. $\sqrt{x}$, $\sqrt{xx}$, $\sqrt{x^3}$ etc. $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{xx}$, $\sqrt[3]{x^3}$ etc., hasque deinde binas ac binas, ternas ac ternas etc. conjungendo signis $+$ et $-$ et extrahendo radices per gradus prout feci, et alia his similia) illasque aequales ponamus areae ABC, hincque jam per problema 7 pag. 25 Barrow. determinemus longitudinem lineae BC, habebimus seriem omnium curvarum quadrabilium et cujus omnia spatia constanti regula quadrantur, et hinc clarissime sequitur, curvae spatia quae hac ratione non quadrantur, veluti circulus, hyperbolae, tale quid non admittere; quid autem ego existimem, quod efficiendum sit, ut ad ultimam perfectionem circa quadraturas perveniamus, nondum hic omnes meas cogitationes in ordinem redegi ut Tibi ausim ea proponere, quanquam me hoc totum occupet, quantum per negotia, quibus premor, licet. Caeterum quod non opus habuerim aequationibus, quas transcendentes vocas, in quadraturis (nam alias cum Dn. Slusio et Cartesio in aliis problematibus haec observo, ut exponentem potestatum litera explicem), non credo inde evenisse, quod non satis generaliter analysin ac quisquam alius circa haec tractarim, cum quoque omnes curvas generalissime calculo exprimo, tam Geometricas, quam transcendentes ut vocas, meoque judicio admodum simplici, cum eadem expressione, qua Cartesius Geometricas exprimat, omnes conceptibiles curvas exprimam, hocque insuper hac expressione obtinens, ut omnium talium curvarum Tangentes eadem prorsus facilitate, imo iisdem legibus, prout Dn. Slusius praescribit, definiam; atque haec existimo esse validas rationes ad minimum ut Tibi quantum possum probabilissima concedam, non praejudicatas opiniones, quae effecere quominus Te in quibusdam non

secutus fuerim; interim tamen ingenue fateor quoad hanc tuam expressionem, me illam non vilipendere, revera enim ignoro num melior sit mea, sed illam saltem sit judicavi positis prioribus rationibus. Quodsi in continuatione meorum studiorum (quae sic mihi videor disposuisse ut certo me ad optatum circa talia finem sint deductura) mihi aliquid detegatur, quo cessent, liberrime Tibi manus dabo atque tum non intermittam haec ipsa quoque aggrediendo experiri quantum valeant. Atque hoc existimo majori utilitate fieri, quam si ipsas jam aggrederer ob rationes quae mihi incertae, atque certum ac fixum cogitationum filum (sic enim semper progrediendo soleo progredi, omnia alia inordinata studia magis menti obsunt quam prosunt) hisce interrumperem. Adde quod maximi momenti esse judicem: postquam quis aliquo modo scit, quid sit distincta cognitio, ac aliquatenus verae Methodi regulas perspexit, ut in quam proprias inclinationes sequatur, et contra ut nihil magis caveat quam aliorum inclinationes sequi, si cum ipsius non consentiant (licet non causas sciat), cujusque regulae praestantiam experientia et rationes novi, quibus non tam mea defendo quam author Tibi sum ut strenue talibus incumbas, quia Te eo inclinari sentis. Et licet itaque pateat quod non credam quod magnum inde damnum passus fuerim ea non sequendo, agnosco interim maximum quod mihi in meis disquisitionibus obtigit fuisse, quod me primo ad Radicum extractionem et quae huic sunt agnata conversus fuerim, atque sic non meam curvarum expressionem non solum respexerim omnibus reliquis omissis, hoc est quod nihil aliud quam simpliciter curvas solas considerarim; hinc enim cito omnium Radicum expressionem obtinuissem multo praestantiori ratione, quam fuit ea, quam Tibi supra communicavi, et quae intima harum rerum mysteria recludit, veluti jam scio Tangentium constructionem expeditissimam, quae ex ipsa curvarum natura fluit, ac alia non minoris momenti circa quadraturas. Methodum Tangentium inversarum jam quoque scio duplici via, absolute si curva Geometrica, quandoque si non talis; duplicem quoque viam qua portiones speciales quadrentur; priori vidi in Cycloide ADF (fig. 105) spatium DEF absolute quadrari, quando AB est quarta pars AC, illudque spatium esse = spatio ABD, quod Dn. Hugens quadravit; imo infinita quadrabilia spatia dari, si cyclois ad alia curva spatia refertur, prout jam relata ad quadratum; posteriori spatia particularia ad infinitas series reduco atque sic quandoque tales series se pa-

tiuntur ad finitas quantitates referri. Quae causa porro fuerit,
cur haecce Tibi transcripserim circa Artem combinatoriam, revera
jam me latet; certum est me ad Tua tunc non reflexisse, credo
tamen occassionem id mihi dedisse, quia imaginationem plenam de
iis tunc habebam ex conversatione Dn. Kircheri, qui praecipue me-
cum loquebatur de sua Arte combinatoria ejusque praestantia. Alias
per ipsam tunc non intellexi Artem quae recenset saltem numerum
variationum, sed et quae ipsas variationes exhibet, nam multipli-
catione potestatum ex formulis $x=a+b$, $x=a+b+c$ etc. utrumque
acquiritur. Dicis quae de Pascalio et Fabrio adfers, me Tibi hoc
sic interpretari videre ac si suspicarer etc. quod tamen Tibi ne
per somnium in mentem venit; respondeo quod mea intentio re-
vera quoque hoc non fuit. Atque quia vidi, quod me multa ex
praeconceptis opinionibus agere praesumis hocque Te sic judicare
credo (licet imbecillitatem meam profiteor) quia Tibi non semper
rationes, quare aliquid sustinuerim, aperte indicavi, coactus quo-
dammodo fui Philosophice i. e. liberrime, attamen vere amicali
responsione Tibi cogitationes meas hisce aperire, inter quae libere
exarata locum quoque concedes huic responsioni, dico itaque me
observasse quod admodum curiosus es in determinandis rerum in-
ventoribus, quodsi hoc facis eam ob causam, ut observes, qua
ratione augmentum sapientiae de seculo in seculum creverit, ac
alia quae hinc sequuntur, ut ita curiositati tuae satisfacias, haec ni-
hil ad me . . . . .

Quoad tandem Characteristicam Tuam dicis: Te nescio
qua de causa praeoccupatum ab his meis meditatio-
nibus fuisse alieniorem, quod revera in quantum differam
ignoro, nam credo me talia quaedam prioribus literis indigitasse,
quae quoque citas et confiteris me tecum sentire. Praeterea mul-
tum hac de re olim tecum locutus, in quibus aperte dixi, me in
praecipuis tecum convenire, licet non in omnibus. Ut autem per-
fecte hac de re judicare possis, meam sententiam clare hisce de-
clarabo. Cum aliquatenus Algebrae cognitionem mihi acquisiveram,
perplacebant in ea quod quasi ludendo tam remotae a nostra co-
gnitione veritates possent acquiri; hinc maxime tale quid in aliis
scientiis desideravi, sed cum non ita statim applicatio pateret, et
Cartesius loquebatur de sua Methodo, quasi haec se universaliter
ad omnia et aeque facile extenderet, ego credebam ipsum tale quid
habuisse, ac proinde maxime hoc in suis scriptis perquirebam, in

quibus evolvendis tum temporis maxime occupatus eram, sed nihil
revera inveni quod animo satisfaceret; interim tamen incidi paulo
post in Epistolam, in qua loquitur de lingua aliqua Philosophica,
qua Rusticus aeque facile posset (si recte memini) in veritatis in-
quisitione progredi ac magnus Philosophus, et alia plura his non
absimilia, quae admodum mirabar et utique inexpectata mihi erant.
Sed Linguae vocabulum mihi obfuit, ut haec non perciperem; sed
dum in demonstrationibus concinnandis admodum occupatus essem
ac delectarer me ipsum ex calculo Algebraico tanta facilitate illas
posse elicere, ad quas excogitandas legendo mathematica Scripta
divinum ingenium habuisse existimaram, observavi quod revera
eadem res utrobique peragatur eadem certitudine nisi quod Algebra
haec expeditius exsequatur, atque adeo nullam aliam differentiam
esse quam si quis duabus diversis linguis eadem loquatur; hic su-
bito reflexi ad ea quae inveneram in modo indicata epistola, et
haecce applicans vidi omnia perfecte consentire. Hinc existimabam,
me verum sensum Cartesii percepisse, adeoque in mea sententia
confirmatior factus auctoritate tanti Philosophi multas quidem post-
hac, sed frustra volvi cogitationes, adeoque quo mihi viam sterne-
rem ad illud acquirendum, mihi firmiter proposui Algebram ex
professo excolere, quia nimirum jam tale quid habebamus ut sic
bene iis perpensis, simul addiscerem applicationem ejusdem ad om-
nia. Hinc Algebram primo ex variis authoribus in unum corpus
collegi, ut sic omnia quae dispersa erant praecipua inventa, simul
contemplandi facilior occasio esset, quo deinde breve compendium
adornavi et alia multa peregi quibus recensendis hic supersedeo.
Deinde cum in cognitionem pervenissem Dn. Spinosae, Dn. Schulle-
rum rogavi ut ab ipso inquireret in veram methodum investigandi
veritatem (quia tunc temporis domum eram ex Hollandia reversus),
sed mihi in responsione retulit, quod ipsius praecipua cura fuerit,
ideam veram ab omnibus aliis ideis, falsa, ficta et dubia distinguere,
et hinc se incredibilem facilitatem in progressu veritatis acquirendae
ostendisse; cum demum in Hollandiam reversus, ipsum accessi et
post varia, quoque ostensa Cartesii epistola, quid de illa sentiret, roga-
bam, sed ille ridendo respondebat: credisne, mi Amice, omnia quae
Cartesius dixit, vera esse? dixi: non; bene dum replicavit, res ita-
que haec nobis non magnam solicitudinem causabit, et sic alia uti
solebat. Attamen fateor mihi vix probabile videbatur, quod Carte-
sius haecce, si non eorum solide persuasus fuisset, ad Mersennum

scripsisset, cum sciebat tunc literas suas a multis visum iri, quapropter hisce non dimovebar a mea opinione. Hanc Epistolam Tibi postea quoque, ut probe noris, monstravi et varia de hisce rebus collocuti fuimus, sed quantum jam recordor, in eo semper se terminabat discursus, quod viderem Te methodum hanc ad omnia, quae in Mundo sunt, extendere (nec video me deceptum, nam et adhuc es in ea sententia, ut clare tuae literae indicant, dicis enim: *ope ejus omnes nostrae cogitationes* etc., in quibus Tibi non contrarius sum, et revera perquam optarem, ut tale quid haberemus, et quis vellet de ejus praestantia dubitare?), sed mea cogitatio tunc erat, quod saltem in tali methodo occupatus essem acquirenda, ut problemata physica eadem ratione tractare possem et resolvere, ac problemata Mathematica ope Algebrae, et eo saltem conatus meos postea extendi. Verum deinde percepi, non opus esse ut progrederer ad ea, cum necdum habeamus in ipsa Algebra veram ac genuinam artem inveniendi; observavi enim nos mirum in modum omnes deceptos fuisse Algebrae speciositate, hancque esse confusissimam artem, quod magis magisque videbam, cum mihi illuxit verae Analyseos Idea, praesertim cum infinitis exemplis hac in re confirmatior factus. Dicam itaque Tibi me in talem methodum incidisse quae his praerogativis gaudet: 1. non posse dari faciliorem, hoc statim ex ejus forma et notione facillimae methodi patet; 2. nulla aequationum reductione hic opus esse; 3. nulla eorundem ad simpliciores depressione; 4. nulla radicum extractione; 5. nulla radicum electione, nam radice extracta non scimus statim alias, quae radix proposito problemati satisfacit; hisce ad eam perfectionem reductis, quantum temporis angustia mihi permisit, nondum tamen volui aggredi ipsa problemata physica, nisi prius problemata mechanica et quae motum spectant, quatenus is imaginationi subjiciatur, ad similem methodum reduxissem, et hic quidem observavi talia tam facile posse solvi, ut vix calculo ullo opus sit. Cumque tot viae non concurrant ad idem problema solvendum, quot in Geometricis, difficultas hic non tanta est, ut ibi ad omnium facillimam determinandam, adeo ut hic facile possint praescribi praecepta, quibus observatis, si centum idem problema solvendum susciperent, necessario tamen omnes per easdem vias cogitationes dirigerent ad ignotum determinandum, attamen si problemata nimis composita essent, vix absque calculi adjumento res procederet; considerans interim hic facilius multo causam, quam in Geometri-

cis, quare calculo opus sit, observavi scientiam aliquam nobis superesse, quae nullo calculo indigeat et qua bene in ordinem redacta, omnia particularia in Physicis absque calculo poterunt determinari, et huic scientiae convenit, quae dicis ut et in captivi, cui negatur calamus et cui ligatae manus, potestate sit, nec mirum, nam haec ea ipsa est, circa quam et post mortem poterimus esse occupati. Vix interim credo, quod quis talem scientiam (quae merito aeterna posset appellari, ut et omnes, quae ad hanc perfectionem possint reduci) nobis facile tradet, licet in hac ipsa credam problemata majori posse facilitate solvi, quam ulla analysi mathematica, nisi quis se suaque ad talem statum redegerit, ut quam minime a rebus externis dependeat. Atque hisce meas cogitationes circa haec, seu si mavis opiniones aut praeconcepta praejudicia (ab amicis siquidem quieto haec suscipio vultu) libere exposui.

VIII.

Leibniz an Tschirnhaus.

Constitui quaedam reponere literis, quas ex itinere scriptas nec ad me perlatas Tute, cum hac transires, reddidisti. Quanquam enim ex colloquiis ultro citroque habitis in plerisque, ubi Te haerere aut aliter sentire scripseras, satisfactum dubitationibus tuis opiner, quod Te ipsum ingenue agniturum et contraria tua libenter retracturum arbitror; utile tamen erit nonnulla denuo attingere, ut intelligam an apud Te profecerim, et ne amplius imposterum eadem discutere opus sit. Actum est inter nos de Radicibus Aequationum, de Quadraturis, de aliis Geometricis, de Metaphysicis, Logicis. *Radices aequationum tribus Methodis* assequi credidisti: *prima* est per enumerationes formularum irrationalium, tollendo irrationales, sed calculo opus esset immenso. Hanc methodum agitabas animo cum primum Parisiis mecum loquereris, quia tunc nondum constabat formulas generales pro qualibet aequatione dari posse; sed cum ostendissem imaginarias in speciem nihil obstare generalitate et specimine monstrassem quomodo ponendo $x \sqcap a + b$ series quaedam aequationum omnium graduum resolvi posset, et quomodo spes esset, assumendo plures partes, posse inveniri radices generales, merito mecum hanc methodum persecutus es. Cumque ego, considerans Formas

$$\begin{array}{ll} ab & abc \\ ac & etc. \\ etc. & \end{array}$$

quas rectangula voco, esse simplicissimas, ad eas revocassem potestates ab x, et inde suppositis valoribus ipsorum y, z ex cognitis quantitatibus per comparationem sumtis seu posito $a^5 + b^5$ etc. $\sqcap \ldots$, $ab +$ etc. $\sqcap \ldots$ et $abc +$ etc. $\sqcap \ldots$. et $abcd \sqcap \ldots$, sperarem invenire tales quatuor aequationes $a^5 + b^5$ etc. $\sqcap \ldots$, $a^5b^5 + a^5c^5$ etc. $\sqcap \ldots$, $a^5b^5c^5 +$ etc. $\sqcap \ldots$, $a^5b^5c^5d^5 \sqcap \ldots$, quibus repertis habuissemus $a^{20} + \ldots a^{15} + \ldots a^{10} + \ldots a^5 + \ldots \sqcap 0$ et per consequens quaesitum: Tibi tunc methodus ista mea se non satis probabat, quia ad meas operandi rationes non satis attenderas, neque opinor eam tunc perceperas; postea tamen de Tuo in eadem incidisti, multaque pulchra theoremata reperisti, atque haec est secunda tua Methodus pro aequationibus radicum. Sed ego interim deprehendi, istam methodum non posse ad exitum perducere, cumque Tu perstares successumque a Te demonstratum diceres et me dissentientem tua non intellexisse confidentissime assereres [his verbis: non miror quod talia profers', hanc enim plane non percepisti; item: ostendi quod hac methodo infallibiliter radices habeantur; hanc autem ostendere falsam, judico impossibile; item: quam demonstrationem si destruere valeas, magnum quid mihi praestabis etc.] cum tamen ego tuam methodum primo statim aspectu intellexissem, quippe mihi familiarissimam, quaedam etiam in tuis emendanda monuissem, ut quod pro $x \sqcap a + b + c$ alium calculum adhibes quam pro $x \sqcap a + b + c + d$, cum tamen unus sufficiat pro omnibus et in x^2 sufficiant duae literae, in x^3 tres etc. ad valores potestatum inveniendos pro literis quotcunque; itaque gratissimum fuit, quod eorum Te convincere potui tum de sinceritate tum de exactitudine in hoc genere mea: de sinceritate quidem, ut agnosceres me vere asseruisse, haec olim mihi cognita; de exactitudine, quia ni fallor agnovisti, me tuam methodum diligenter legisse et intellexisse et errorem deprehendisse, locum enim lineola signatum apud me vidisti. Itaque imposterum spero Te non ita facile monita mea insuper habiturum. Tertiam tuam methodum radices aequationum inveniendi, nempe si sit $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t \sqcap 0$, ponendo $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \sqcap q$, tollendo x per y et ope arbi-

trariarum b, c, d etc. auferendo terminos intermedios in aequatione proveniente $y^4 + \ldots$ etc. $\sqcap 0$, non puto succedere posse in altioribus nisi quoad casus speciales. Ejusque rei videor mihi habere demonstrationem: itaque autor essem ne ea tempus perderes. Utile esse potest ad aequationes transformandas, non tamen (generaliter) ad resolvendas.

Venio ad quadraturas et quae cum his connectuntur, ubi primum Apologiam texere cogor vocabulorum quae adhibui, quia ea sugillas. Nolim itaque putes ea esse inutilia; saepe enim hac ratione paucis lineolis exprimo theoremata generalissima, quibus alias explicandis opus esset replere paginam, quanquam necesse est Tibi et aliis quibus non distincte explicui apparere obscuriora. Sunt tamen pleraque ni fallor satis rebus significandis et memoriae juvandae apta, saltem me valde sublevant calculum, aequationem, problema, curvam etc. Algebraica voco, quando per potentias certi finiti rationalis exponentis exprimi possunt, alias voco Transcendentia. Quid sit Calculus tetragonisticus, patet, id est serviens ad tetragonismos. Curvam quadratricem voco, quae servit ad aliam figuram quadrandam. Curvam summatricem et differentialem voco, quarum ordinatae se habent inter se ut summae et differentiae. Calculus differentialis est, quem praeter literas x, y etc. ingrediuntur infinite parvae $d\overline{x}$, $d\overline{y}$ et similes. Invenire Tangentes curvae, reducitur ad hoc problema: invenire seriei differentias; invenire autem aream figurae, reducitur ad hoc: datae seriei invenire summas, vel (quod magis instruit) data serie invenire aliam, cujus differentiae coincidant terminis seriei datae. Ope hujus calculi differentialis omnia ista reperio, sine figurarum inspectione et linearum ductu, et per consequens ea, ad quae imaginatio per linearum ductus attingere nequit. Hinc inveni modum habendi tangentes sine sublatione fractionum et irrationalium, quam Te maximi facere testatus es, in quam non facile incidet nisi qui considerabit tangentes ad differentias reduci. Itaque nunc opinor non amplius dices, aliis methodis statim praestari, quod meo illo calculo differentiali. Nec possibile est generaliora praestari in hoc negotio, itaque ex quo mecum locutus es, non amplius opinor dices: quicquid ea methodo invenerim, Te per alias eadem facilitate praestiturum. Unum exemplum dabo, quod est ex utilissimis et mea methodo facillimis: Ex datis figurae partiumque ejus quarumcunque centris gravitatis invenire areas, quod ita solvo: Sit (fig. 106) figura trilinea orthogonia ABC (nam ad tales caeterae revocari possunt), quaeritur area portionis cujuscunque, ut ABC, dato portionis cujuscunque centro gravitatis. Quoniam descripta habetur curva et centrum spatii assignari potest ex hypothesi, demittatur ex quolibet centro L perpendicularis LH in AG tangentem verticis et ipsi LH sumatur in basi aequalis BM, idque facieudo ubique per omnia puncta M ducatur curva, quae utique haberi poterit algebraice, quia curva CC supponitur esse algebraica, et algebraice habentur puncta B, C, L, H. Jam ex puncto M educatur tangens (quod in curva Algebraica semper fieri potest) occurrens axi AB in T, et completo rectangulo ABCG ducatur per L ipsa SR aequalis et parallela ipsi BC, ajo aream ABC fore ad rectang. SBCR, ut est TB ad BM. Ex data autem area invenire centrum gravitatis, problema est quod generaliter sumtum algebraice impossibile est, quemadmodum facile demonstrare possum.

Curvam quam proponis, in qua (fig. 107) posita BT tangente sit quadratum AT in AB aequale cubo a constante, nullo negotio reperio; est enim ipsamet Hyperbola.

Caeterum tres habeo calculos transcendentibus etiam applicabiles, unum per differentias seu quantitates infinite parvas, alterum per series infinitas, tertium per exponentes irrationales, ex quibus novissimus habet aliquid prae caeteris, per ipsum enim solum demonstrare possum impossibilitatem quadraturae specialis ex. gr. circuli totius; per duos vero priores tantum invenire possum aut impossibilem demonstrare quadraturam generalem algebraicam alicujus figurae. Est autem generalis quadratura algebraica idem quod inventio curvae algebraicae quadratricis, cujus ope quaelibet figurae datae portio quadrari potest. Quoniam autem testaris Tibi difficile videri, invenire omnes figuras quadrabiles, ideo ostendam facilitatem. Proposita sit curva algebraica quaecunque, utique ejus aequatio continebitur sub hac generali: $0 \sqcap a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 +$ etc. (1), positis a, b, c etc. datis, quaeritur an ipsa sit capax quadraturae algebraicae generalis, id est quaeritur ejus curva summatrix, cujus aequatio sit $0 \sqcap l + mx + nz + pxz + qx^2 + rz^2 +$ etc. (2), erunt l, m, n etc. quaesitae. Ex nota methodo tangentium constat esse $\frac{z}{t} \sqcap \frac{m + pz + 2px \text{ etc.}}{n + px + 2rz \text{ etc.}}$ (3); ponatur $\frac{z}{t} \sqcap y$ (4) et ex aequ. (3) et (4) fiet: $ny + pxy + 2rzy$ etc.

$\sqcap m + pz + 2qx$ etc. (5), ex qua aequatione tollendo z ope aequationis (2) habebitur aequatio, in qua solae erunt indefinitae x et y, quae proinde coincidere debet cum aequ. (1) data, quod an possibile sit constabit ex comparatione terminorum, qua inveniemus valores literarum p, m, n etc. Atque ita calculo aliquot horarum habebimus universalem regulam pro quadratura generali algebraica figurae algebraicae cujuscunque. Et memini me Tibi jam haec Parisiis dicere, sed ut video non attendisti. Eadem et ad figuras transcendentes suo modo applicare et determinare possum, utrum datae figurae quadratura pendeat ex quadratura circuli aut hyperbolae vel utriusque; item ad problemata methodi tangentium inversae, quanquam tunc artificio adhuc aliquo nonnunquam opus sit. Haec facilia quidem, sed ideo difficilia visa autoribus, quia non solent aequationes generales adhibere pro curva qualibet ejusque tangentibus, ut inde regula unica pro omnibus inveniretur. Non est cur Reynaldum defendas; non enim soleo in talibus temere judicare. Ille utriusque sphaeroidis oblongi et lati superficiem se dedisse putat, ego puto ipsum dedisse neutrius. Pauci eorum, qui Methodum indivisibilium vulgarem intelligunt, intelligunt usum T r i a n g u l i c h a r a c t e r i s t i c i (ut ego vocare soleo), imo credo neminem in Italia eum intelligere, in Gallia vix quisquam praeter Hugenium, in Anglia plures. Bullialdus qui intelligit methodum indivisibilium et de ea librum scripsit ineditum, fassus est se non posse invenire superficiem Conoidis parabolici, quod tamen facillimum est. Vides quantum inter methodos indivisibilium intersit.

Subjiciam pauca de quibusdam aliis, quae ad Geometriam non spectant. Certum est haberi et a me certo determinari posse methodum praestandi omnia sine calculo. Opus est tamen signis aliis, sub quibus ego comprehendo imagines et verba. Optima signa sunt imagines, et verba ut apta sint, debent imagines accurate repraesentare. Quod cum in Geometricis non faciat Algebra, ideo illi meum calculum geometricum praefero, quem Tibi ostendi. Non experior eam, de qua quereris, in optimis definitionibus reperiendis difficultatem; possum enim hoc problema certa analysi solvere: D a t i s o m n i u m t e r m i n o r u m p r o p r i e t a t i b u s r e c i p r o c i s s e u d e f i n i t i o n i b u s q u a l i b u s c u n q u e , i n v e n i r e d e f i n i t i o n e s o p t i m i g e n e r i s. Per definitiones optimi generis intelligo eas, ex quibus constat rem definitam esse possibilem, quia alioqui nihil tuto ex definitionibus concludi potest, nam de impossibilibus possunt duo contradictoria simul concludi. Itaque ad hanc necessariam et primam definitionis bonae notam ipsa me cogitandi methodus duxit, id enim denique satis bonum est, quod usum praestat quem desideramus. Hujus notae corollarium est tantum, ut causa efficiens includatur in eorum definitionibus, quae causam efficientem habent. Hinc patet etiam, quod definitiones non sint arbitrariae, ut putavit Hobbius.

Annum agens aetatis decimum octavum scribensque libellum de Arte Combinatoria, quem biennio post edidi, certum meditandi filum inveni, admirabile verae analyseos arcanum, cujus corollarium est lingua vel characteristica rationalis. Hanc nemo credo alius intellexit, alioqui qui eam intellexisset, omnibus aliis missis eam fuisset persecutus, nihil enim majus ab homine praestari potest.

Haec sunt quae Epistolae tuae respondenda potius putavi, quam Tibi, nam ex quo collocuti sumus, Tibi fallor jam satisfeci.

Zur weiteren Charakterisirung der Unterredung, die Tschirnhaus auf seiner Rückkehr nach Deutschland mit Leibniz zu Hannover hatte, mögen noch einige Stellen aus einem Schreiben Leibnizens folgen, das jene Unterredung zum Theil frischer wieder giebt, von dem aber der Anfang fehlt:

Habes historiam quarundam mearum meditationum quam ideo enarravi, ne ut aliquando facis, varias methodos longe differentes habeas pro iisdem aut me dissimulare putes, per quos profecerim, quanquam credam Te, ex quo nuper mecum locutus es, longe aliter de plerisque meis sentire, quam fecisti, cum novissimas literas ex itinere scriberes. Agnosces etiam me non temere judicasse de tuis circa extractionem radicum ex aequationibus methodis; neque ex vanitate dixisse me credes, quod quaedam talia jam antea quaesiissem, sed eo consilio ne me tua descripsisse aliquando suspicareris; et cum Tibi in memoriam revocavi eorum, quae Parisiis ostenderam, non id fecisse, quasi crederem Te mea sumsisse, scio enim quid per Te possis, sed ut facilius Tibi probarem, me non fuisse in his plane novum. —

Agnosces credo nunc, ex quo mecum locutus es, me non jocatum, cum dixi meum calculum differentialem praestare, quae Barrovius et Gregorius, aliique ut ipsi talia concipiunt, non potuissent; unde quod Barrovius habet de problemate illo suo generali, ex quo caetera pendent, quod Phrygia sapientia sibi occurrisse fatetur post caetera, id mihi statim ab initio methodo mea necessario occurrit, imo consistit in una ex aequationibus mei calculi differentialis. —

Risi, cum Barrovium dixisti omnes quadraturas revocasse ad logarithmos locumque indicasti. Ille enim dicit ibi, quae jam ex Gregorio a S. Vincentio et Wallisio notissima sunt, nimirum ipsius Hyperbolae et ab ea pendentium figurarum quadraturam per logarithmos haberi. Quae ego in hoc genere habeo aut quaero, ab his infinite distant; sed calor objiciendi mihi aliquid, quo reprehensas tuas radicum methodos ulciscereris, eo Te abripuerat. Ego Barrovium magni facio, sed non puto me illi injuriam facere, cum dico esse mihi in promtu infinities majora non in eo tantum ut generalius enuntiem ab ipso prolata, quod Tu quaeris, sed ut ea praestem, ad quae ex ejus methodis nullus patebat aditus. Quadraturae Hyperbolae reductio ad logarithmos non habetur ope solius Trianguli characteristici, nisi alia praeterea consideratio accedat. Itaque cum indicavi, usum communem quadraturarum per tangentes eo non attingere, non ideo exclusi a me correctum. Habeo enim ego methodum generalem pro quadraturis Paraboloidum omnium et Hyperboloidum, qua et Hyperbolae ipsius quadratura exhibetur (scil. per logarithmos) in qua non considerantur tangentes, sed tantum differentiae et summae. Nam methodus tangentium correcta reducitur ad methodum differentiarum.

Jucundum etiam fuit videre, quomodo affectaveris nominare Cartesium et Slusium, cum de aequationibus meis transcendentibus loqueris, quasi illi quicquam dixissent ad rem meam faciens. Scilicet illi non utuntur literis in exponente, nisi cum sunt numeri rationales. Ausim quovis pignore contendere, Slusium ipsum si ei dicerem quomodo illis utor ad supplendum id quod Algebrae communi deest solvendaque problemata quae calculum alioqui respuunt, fassurum nihil tale a se somniatum, sed Tu par pari referre voluisti, quia quaedam ob quae Cartesiani Cartesium jactant, jam apud alios extare dixeram.

Das nächste Schreiben, welches von Tschirnhaus vorhanden ist, ist datirt: Kiesslingswalda 5 Decembr. 1679, und enthält nur Mittheilungen über seine häuslichen Einrichtungen.

IX.

Tschirnhaus an Leibniz.

. . . . habe einen sonderbahren Methode gefunden, Spiegel in grosser Grösse und mitt leichter Mühe zu machen, die vielleicht einen grössern effect, als der in des Königs Bibliothek zu Paris erweisen werden. Sonsten habe in der that erfahren, dass wen excavatae sphaericae superficiei ex ligno (quae facile paratur) agglutinantur superficies rotundae et planae ex vitro hujus magnitudinis ○ solche perfect als wie andere Brenspiegel brennen, doch nicht mitt solcher force. Habe auch weil mit dieser materie umbgangen, diess problema solviret: sit (fig. 108) curva circularis AEC; supponantur radii paralleli solis DE reflecti per EF; quaeritur quae sit curva FRC, quae ex reflexorum radiorum intersectionibus formatur? et inveni curvam hanc esse Geometricam, ut has vocat Cartesius; imo data quacunque curva Geometrica AEC, invenitur etiam curva Geometrica FRC. Vellem scire, num talia ab aliquo Mathematicorum hactenus determinata, praecipue a Dn. Hugens cujus Dioptrica nunc lucem forte vidit. Caeterum adinveni methodum multo faciliorem Slusiana (qua nec credo facilior existit), ope cujus non solum Geometricarum curvarum, sed et Mechanicarum Tangentes statim determinantur, atque similia plura, de quibus alias.

Kiesslingswalda d. 7 Aprill 1681.

X.

Leibniz an Tschirnhaus.

ohnweit Northausen den 13 Maji 1681.

Dessen ohnverhofftes sowohl als angenehmes habe heut erst erhalten, und weil ich eben auf der reise begriffen, und mich in einem Dorff am Harz befinde, gleich darauff antworten wollen. M. H. meldet von einem seiner schreiben an mich, so mir aber nicht zu handen kommen, gleich wohl erhalte ich sonsten die briefe, die mir gerad nach Hanover adressirt werden. Nach absterben Herrn Herzog Johann Fridrichs hochseel. andenkens bin ich

zwar in meinen officiis conserviret worden, aber man hat nicht mehr die vorige curiosität, daher ich auch lange Zeit nicht erfahren, was in Frankreich und England passiret, ausgenommen dass man ein mittel in England gefunden, die beine also zu praepariren dass sie essbar seyn.

M. Hrn. curvam cujus puncta designantur intersectionibus radiorum reflexorum qui in datam curvam parallele inciderant, verstehe ich nicht recht, nam quilibet radius reflexus quemlibet alium intersecat, et nullum est punctum in plano, quod non duorum quorundam radiorum a data curva in eo plano existente post parallelam incidentiam reflexorum intersectio intelligi possit. Itaque locus intersectionum non est linea, sed superficies, nempe totum planum. Credo Te peculiarem quandam determinationem in animo habuisse, sed hanc non exprimis.

Circa Methodum Tangentium generalem ex calculo ductam nihil praestari posse puto ultra eam qua utor, communem curvis analyticis et transcendentibus, rationaliter vel irrationaliter expressis; cujus rei fundamentum Tibi coram explicui. Quoniam enim idem est tangentes curvarum et differentias serierum investigare, hinc licet valor ordinatae sit ex multis partibus irrationalibus utcunque involutis compositus, nihilominus non opus habeo sublatione irrationalium, nam differentiae totorum componuntur ex differentiis partium. Eodem modo et cum curvis transcendentibus procedo. Una tamen superest difficultas, quam nondum satis ex sententia superavi, scilicet invenire tangentes, quando incognita seu indeterminata ingreditur exponentem, ex. gr. sit curva ejus naturae, ut posita abscissa x et ordinata y et recta constante a, habeatur aequatio hujusmodi: $y^x + x^y$ aequ. a^{xy} (necesse est autem dari quandam rectam constantem praeter a, quae exprimat unitatem) quaeritur modus inveniendi curvae tangentem. Si haec haberentur, haberemus etiam quadraturas quales sunt, scilicet vel analytice, quando id fieri potest, vel transcendenter.

De speculis urentibus saepe cogitavi et expertus sum laminam vitream, scutellae cupreae impositam, calore accedente emollitam sese sic satis scutellae applicare; hanc methodum puto earum quas novi optimam; an aliquid facilius habeas, scire velim.

Ego hac aestate occupabor in absolvendis tandem meis molendinis ventaneis, quae fodinis applico, de quo memini me Tibi coram locutum. Si qua naturae experimenta vel artis inventa