II.

Tschirnhaus an Leibniz.

Mochte wiessen ob den Hrn. ein modus Generalis bekandt: ex data alicujus spatii, curva Geometrica terminati, mensura centrum gravitatis in axe determinandi, es würde mir in gewiesser inquisition dienen. Es hatt wohl der des Cartes einen ingenieusen modum hierin den Schotenio communicirt, so in dessen Commentarien enthalten, aber nicht universal beglaube zu sein. Meine letzte exercirung damitt meine studia mathematica beschlossen, hatt mich auff einen so leichten Methodum, omnium curvarum quantitatum hactenus cognitarum mensuram zuerhalten gebracht, als mir nicht wiessend, massen solches solo calculo (ohne inquisition der Tangenten, noch supposition indefinitae alicujus parvae lineolae neque centri gravitatis cognitio) eoque facillimo, duobus aut tribus saltem lineolis constanti beschiehet. Mochte wiessen ob man die quadratur dieser spatiorum, deren natur in folgenden aequationen

$$\begin{array}{lll} y = \sqrt{xx - x^4} & y = \sqrt{x^6 - x^8} & y = \sqrt{x^{10} - x^{12}} \\ y = \sqrt{x^4 - x^7} & y = \sqrt{x^{10} - x^{13}} & y = \sqrt{x^{16} - x^{19}} \\ y = \sqrt{x^6 - x^{10}} & y = \sqrt{x^{14} - x^{18}} & y = \sqrt{x^{22} - x^{26}} \end{array} \quad \text{atque sic in infinitum}$$

welche alle ad mensuram reduciret, wie auch infinita andere, so surdis signis miris modis implicirt, ... solche nicht meinen, das circuli quadratura sehr probabel .... weil die quadratura dieses spatii $y = \sqrt{xx - x^4}$ seu $y = x\sqrt{1 - xx}$ bekandt, nehmlich $= \frac{2}{3}$, und ad circuli quadraturam nichts mehr zu finden nöthig, als summa omnium $\sqrt{1 - xx}$.

III.

Tschirnhaus an Leibniz.

Rom d. 27 Januar. An. 1778.

Tam amplas literas jam dum ante duos menses ad Te*) transmisi, ut mihi viderer omnem scribendi modum excessisse, et

*) Leibniz hat bemerkt: non vidi.

quia binarum literarum quas ope Dn. Paluzii ad Te magno abhinc temporis spatio destinaram, nondum tamen responsum accepissem, eas potius ad Dn. Schüllerum misi, ut Tibi hac ratione et secure et citius redderentur. In iis autem ad omnia quae tunc desiderabas, quantum vires permisere, respondi et inter alia Methodum communicavi, qua omnium quantitatum possibilis proportio determinatur, omnesque quantitates irrationales ad infinitas series reducuntur, ubi ostenditur $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} + \frac{1}{60} - \frac{1}{348}$ etc. et alia hujus generis. Hoc solum hic addam 1) quod haec Methodus facilius multo intelligatur, si explicetur per continuas subtractiones et prout quoque primo adinveni, sed prolixior mihi visa illius explicatio, adeoque malui alteram per divisionem ipsi praeferre; 2) quod data aliqua serie infinita, statim ejus conversa (uti sic eandem soles vocare) possit inveniri; ostendi enim ibi, qua ratione data aliqua serie haec ad infinitas aequationes possit transferri, comparando omnes terminos hujus seriei cum terminis generalis cujusdam seriei, et quod ex hisce aequationibus duae semper series infinitae possint elici, prout altera quantitatum cognita aut incognita supponitur. Siquidem tempus id permittet ut haecce omnia denuo accuratius retractare possim, tentabo quae conversa series, supposita tua circuli quadratura, proveniat hac methodo et alia quae ad ultimam perfectionem hujus Methodi desiderantur. Porro circa Metaphysica quoque quaedam erunt ibi exposita, sed rudiora forte quam quae Tibi placere possint. Interim gaudeo quod Virum offenderis, ex cujus conversatione satisfactionem circa talia habere possis, sed nescio sane, ob quam rationem nomen ejus mihi retices, quod mihi utique pergratum esset cognoscere, uti et aliquando quae circa haec inter Vos peracta. Stenonem cognovi Virum admodum religiosum esse et certe ingenio pollentem, interim tamen non miror, quod Te disserentem haud assecutus fuerit, cum aliquatenus interiora ejus penetrare mihi licuit et ratio Tua circa haec allata praeprimis Ipsi conveniens esse videtur. In Oldenburgero nostro utique multum perdidimus, et vellem libenter per Te addiscere, quis ei successurus sit, uti et alia quae in Anglia jam curiosa occurrunt, quia literarum commercium inter me et illos hac ratione interruptum.

Pat. Gottignies in sua Logisticae Idea An. 1677 hic impressa pag. 207 hisce verbis quadraturam suam circuli mundo annunciat: Nemo hactenus inventus est, qui in rigore Geometrico solverit quadraturam circuli, tametsi certo constat solvi posse; utrum legitimam ejus solutionem ego invenerim, tunc alii statuent, quando publici juris facta erunt, quae hactenus inter privata mea scripta delitescunt. Multoties contuli cum Ipso, sed multas conjecturas habeo, quae mihi contrarium suadent, et revera si obtinuisset, eas non video, quare non publici juris faceret; sed forte probabilitate deceptus possibilitatis incidens in talia problemata, quae solutum facilia videbantur, quaeque circuli quadraturam supponebant, prout quaedam Ipse in praedicto Tractatu recenset, et revera mihi non saepe (credo facile et aliis has materias tranctantibus) talia sé obtulere, quanquam nunquam probabilius specimen sequente: Sit (fig. 91) Parabola ADE, cujus axis AD, sitque DE = AD; jam fiat AB = DN et ductis lineis BM et QN parall. ad AH fiat BG = OQ et NO = GM; idem fiat utique et exsurget spatium AHLEFA = Parabolae ADE; dico jam dato solido, quod fit a figura HLE circa axim HE (seu ut dicis, momentum figurae HLE) dari quadraturam circuli. Quis primo intuitu non existimaret, hoc possibile esse, cum 1) quadratura spatii HLE detur, 2) solidi dimensio, quod fit a figura HKL circa axim KL, ac cum 3) spatium hoc HLE tantam affinitatem habeat cum Parabola, cujus quadratura datur; hac probabilitate allectus me ad hoc solvendum accinxi et vidi statim, totam difficultatem in eo consistere, ut centrum gravitatis hujus figurae HLE determinetur in axe KL, adeoque inquisivi in Methodum Generalem ex datae figurae quadratura centrum gravitatis determinandi, et cum non videretur juxta vota progressus, ad Te confugi et revera non potuisses aptius respondere, quam referendo idem prorsus exemplum, in quod incidi (ut perfacile ex applicatione apparebit, licet primo intuitu diversa videantur) loco responsionis cum annexa ingeniosa reflexione ex tua Cyclometria, quod tam generalis circuli quadratura non possit dari, cum (prout, si recte memini, ibi recenses) hinc alias Anguli trisectio ope circuli possit exhiberi et similia, seu quod idem, aequationes cubicae ac superiorum dimensionum horum angulorum sectiones exprimentes possent ad quadraticam reduci, quod utique non possibile videtur, licet nullam hac de re demonstrationem habeam nec adhuc videam impossibilitatem hujus solidi dimensionem impetrandi aut certae cujusdam partis saltem, hicque obiter velim scias: per hoc ipsum instrumentum, quo me vidisti Angulum datum in quotvis aequales partes posse

dividere, quoque me jam, invariato prorsus eodem, quotcunque medias proportionales designare posse. Quae de Fractionum reductione ad numeros decimales innuis, bene percepi et ut omnia universalia, magni admodum facio, ac si per tempus licebit, non ad decimalem, sed ad quamcunque ejusmodi divisionem, ut binalem, trinalem, septinalem etc. applicabo; verum non omni ex parte percepi, qua ratione hinc curvarum quadraturae possint derivari nec quod alio loco scribis, Te idem negotium per Logarithmos posse absolvere, et horum cognitio mihi pergrata esset. Quoad Methodum, in quam incidi, ope cujus majori facilitate, quam hactenus vidi, quadraturas curvarum quantitatum exhibeo, non credo displicebit ejus communicatio; sequentia autem circa illam annoto. 1) Non existimo me dixisse ipsam absolvi absque Methodo indivisibilium, ut vulgo vocant, sed saltem non opus esse ut consideremus rectangula cujusdam altitudinis indefinite parva; fateor enim considerandas esse vel solas lineas rectas aut superficies planas, ut solet Cavallerius, vel universalius cum Cartesio nihil aliud considerandum esse quam solam relationem, qua ille solet uti ad curvarum naturas calculo designandas, prout statim apparebit. Interim si hisce non directa Methodo quadraturas curvarum quantitatum obtineri credis, utique nec Methodus mea hoc praestabit; ostendam autem hic prius ex occasione, quomodo didici quadraturam Lunulae Hippocratis posse demonstrari per simplicem linearum transpositionem absque Euclideo illo Theoremate quod insinuas: Sit circulus EABD (fig. 92) centro C et radio CA descriptus; ductis jam diametris AD et EB normaliter se intersecantibus in C, ac linea recta AB, tunc fiat (ducta ad libitum MN parallela AC) ML = KN, et sic ubique, eritque spatium CKOB hinc proveniens = spatio AMBL; fiat denuo KO parallela CB ac semper aequalis FJ, eritque hinc productum spatium EFHC aequale spatio AMBL adeoque semilunula EPAHFEH = triangulo ACB seu ECD, et facile hinc porro possem ostendere, EFH curvam esse arcum circuli radio DE descriptum, ac proinde semilunulam EPAHF esse eandem quam Hippocrates considerat. Sed hoc Tecum agendo, utique superfluum esset. Hoc ex occasione noto, si AMB sit curva Parabolica et fiat continue ac ubique ML = KN et hinc KO = FJ, FQ esse quarta parte QP adeoque spatium ACBM ad triangulum ut 4 ad 3, et sic in quibusvis figuris, hoc applicando aut quadraturas datorum spatiorum assequi licet aut quadraturas ad minimum semper alicujus alterius spatii. Sed haec forte non recenseri merebantur. 2) Itaque me ad Methodum modo promissam, quam breviter ac clare potero, explicandam accingo: Sit (fig. 93) figura quaecunque CBD, jam concipiatur alia figura quaecunque CBA perpendiculariter erecta supra lineam CB, atque sic ex infinitis rectangulis FJG formetur solidum quoddam; dico jam infinitas intersectiones hujus solidi secundum lineam JG parallelam BD aequari infinitis intersectionibus hujus solidi secundum lineam HG parallelam BC, seu quod idem, omnia rectangula FJG aequari omnibus spatiis ABJF. In hoc unico et tam facili consistit haec Methodus; quod qui bene perceperit, in reliquis nullam difficultatem experietur. Et mirum posset videri, haec tam facilia non potuisse alicui in mentem venire, cum ingeniosissima hujus seculi extent inventa, nisi viderem tam infinita numero praeclara Theoremata tanta facilitate hinc posse deduci, quorum permulta ab aliis, sane non difficiliori Methodo, fuissent exhibita, si haecce ipsis nota fuissent; sed infinita cum extent facilia, ad quae nimirum penetranda non multum requiritur ingenii et quae tamen maximi usus, non mirum est ut nos, quibus infinita percurrere non datum, quaedam subterfugiant, licet et facillima et perquam utilia; et posito quoque haec nota extitisse aliis, ut vix dubitare possum, non forte ipsis quoque notum fuit haec tam utilia esse ad quadraturas eruendas; et praeterea ea plerumque magni aestimamus, ad quae elicienda multum ingenii requiritur, videtur adeoque quae imaginationem late afficiunt ac admirationem in nobis excitent, potuisse homines ad tam sublimia pertingere; ea vero proinde parum aut nullius fere momenti quae quam maxime universalia et facilia quaeque ideo ordinarie solemus negligere: sed satis praefati (ne ridiculum videatur me velle rem, primo intuitu nullius momenti, in tantum extollere) ad rem ipsam propius accedamus. Formetur primo tale solidum ex quadrato ABLK (fig. 94) et triangulo BLC, sitque BL vel LC $= 1$; jam fiat $BG = x$ ad primam sectionem HGF calculo exprimendam; secundo ponatur quoque $LD = x$ (Nota: si linea LC major aut minor BL, potius LD litera y aut simili signanda est ob confusionem evitandam) ad secundam sectionem, ut supra dixi, JMLK calculo exprimendam, haecque generaliter in omnibus sequentibus notanda. Jam itaque

$$m\left\{\begin{array}{ll} HG = 1 & JM = 1 \\ GF = x & ML = 1 - x \end{array}\right\} m^{*)}$$

jam omnes intersectiones HGF aequantur omnibus rectangulis JML, hoc est omn. $HGF = x = 1 - x =$ omn. JMLK adeoque $2x = 1$ et omnes $x = \frac{1}{2}$.

Sit secundo corpus ex duobus triangulis BLC et BLK (fig. 95); jam sit

$$\left.\begin{array}{l} HG = x \\ FG = x \end{array}\right\} m \quad \left.\begin{array}{l} ABLK \text{ juxta priora } = \frac{1}{2} \\ BMJ \text{ juxta eadem } = \frac{xx}{2} \end{array}\right\} s$$

eritque $xx = \frac{1 - xx}{2}$ adeoque $3xx = 1$ et tandem omn. $xx = \frac{1}{3}$. Per haecce tam pauca et facilia exhibetur trianguli, circuli, cum ad triangulum reducatur, Cycloidis, Parabolae, Coni, Sphaerae, Spiralis, Conoidis Parabolici, Conoidis Hyperbolici dimensio, id est praecipua inventa Veterum ac infinita numero recentiorum; sed ulterius progrediamur.

Sit tertio solidum constans (fig. 96) ex triangulo seu Figura, ubi $GF = x$ et Figura BLK, ubi $GH = xx$, jam

$$m\left\{\begin{array}{ll} HG = xx & KLB \text{ per priora } = \frac{1}{3} \\ GF = x & JMB \text{ per eodem } = \frac{xx}{3} \end{array}\right\} s$$

eritque $x^3 = \frac{1 - x^3}{3}$, adeoque $4x^3 = 1$ et $x^3 = \frac{1}{4}$, atque sic progrediendo eadem facilitate invenies $x^4 = \frac{1}{5}$, $x^5 = \frac{1}{6}$, atque sic in infinitum, ubi notes posse eadem inveniri, si figura BLK in secunda et tertia invertatur, uti et tam haec quam omnia sequentia posse quasi innumeris modis inveniri.

Sit jam porro solidum (fig. 94) constans ex duabus superficiebus BLKA et BLC, in quibus $GH = 1$ et $GF = xx$, jam uti supra

$$m\left\{\begin{array}{ll} HG = 1 & JM = 1 \\ GF = xx & ML = 1 - \sqrt{x} \end{array}\right\} m$$

et erit $xx = 1 - \sqrt{x}$ adeoque $\sqrt{x} = 1 - xx$ et hinc per priora

*) Die Buchstaben m und s drücken Multiplication und Subtraction aus.

omn. $\sqrt{x} = \frac{2}{3}$. Sit jam (fig. 95) GH $= x$ et GF $= xx$, jam

$$m\left\{\begin{matrix} HG = x & BLK = \frac{1}{2} \\ GF = xx & BMJ = \frac{1}{2}\sqrt{xx} \end{matrix}\right\}s$$

et erit $x^3 = \frac{1-\sqrt{xx}}{2}$, adeoque $\sqrt{xx} = 1 - 2x^3$, hoc est $\sqrt{xx} = \frac{2}{4}$. Jam assumendo GH $= xx$ et GF $= xx$, invenies $\sqrt{x^3} = \frac{2}{5}$, assumendo vero GH $= x^3$ et GF $= xx$, invenies $\sqrt{x^4} = \frac{2}{6}$, et sic porro $\sqrt{x^5} = \frac{2}{7}$, $\sqrt{x^6} = \frac{2}{8}$, atque sic porro in infinitum. Tertio si assumamus HG $= 1$ et GF $= x^3$, 2) HG $= x$ et GF $= x^3$, 3) HG $= xx$ et GF $= x^3$, 4) HG $= x^3$ et GF $= x^3$, atque sic porro inveniemus $\sqrt[3]{x} = \frac{3}{4}$, $\sqrt[3]{xx} = \frac{3}{5}$, $\sqrt[3]{x^3} = \frac{3}{6}$, $\sqrt[3]{x^4} = \frac{3}{7}$, atque sic indefinite. Eadem ratione invenio sic progrediendo $\sqrt[4]{x} = \frac{4}{5}$, $\sqrt[4]{xx} = \frac{4}{6}$, $\sqrt[4]{x^3} = \frac{4}{7}$, $\sqrt[4]{x^4} = \frac{4}{8}$, item $\sqrt[5]{x} = \frac{5}{6}$, $\sqrt[5]{xx} = \frac{5}{7}$, $\sqrt[5]{x^3} = \frac{5}{8}$, atque sic in infinitum. Semper aequales erunt tales quantitates fractioni, cujus numerator exponens signi radicalis, denominator summa exponentis signi radicalis et exponentis quantitatis x. Et hisce paucis me existimo 1) omnium Parabolarum, Spiralium et Conoidum Parabolicarum dimensionem ac infinitarum praeterea superficierum ac solidorum dimensionem ea facilitate exhibuisse, qualem hactenus non vidi; 2) quoque omnium quantitatum, quae ab harum compositione exsurgunt, uti sunt omnia Conoidea Parabolica a Parabolis infinitis circa basin genita atque infinitae aliae tales quantitates; 3) quia compositarum ex surdis quantitates infinitis modis possunt exprimi, ab unica tali compositione infinitarum quantitatum mensura dependet ex. gr. $\sqrt{x} + \sqrt{x^3} =$ juxta priora $\frac{2}{3} + \frac{2}{4} = \frac{6}{7}$; verum haec quantitas infinitis modis potest exprimi ex. gr. multiplicando in se quadratice, cubice etc. et extrahendo radicem quadraticam, cubicam etc.; sic multiplicando in se quadratice

hanc quantitatem et extrahendo radicem erit $\sqrt{x + x^3 + 2\sqrt{x^4}} = \frac{7}{6}$ etc., ubi notandum, quod quandoque egregia hinc assequuntur, si extractio procedit, velut in praesenti exemplo, erit enim $\sqrt{x + x^3 + 2xx} = \frac{7}{6}$ (Nota: quid probabilius, jam hinc dari $\sqrt{x + 2xx}$, cum detur $\sqrt{x + 2xx + x^3}$, hoc est hyperbolae quadratura, sed probabilibus in hoc negotio non credendum, interim ad minimum interpolationis negotium a Wallisio exhibitum multum hinc adjuvabitur). Quot jam existimas quantitatum mensuram dari, conjungendo tali ratione omnes binas, ternas, quaternas etc.? Attamen in eo non terminatur Methodus, sed progressum jam scio in infinitum haec continuandi, ad binomiorum, trinomiorum etc. impetrandi mensuram, et cum jam omnium curvarum possibilium nunc determinarim (ut ex receptis a me literis Te intellexisse spero) et facile in hoc negotio omnes possibiles combinationes determinare liceat, credo si tempus haberem, me posse hinc determinare tam omnes possibiles quadraturas, quam quae non quadraturam admittunt, et alia quae ad ultimam hujus Methodi perfectionem requiruntur. Verum ut aliqua saltem Tibi communicem exempla quantitatum compositarum, in quae incidi ulterius progrediendo, observavi omn. $x\sqrt{1-xx} = \frac{2}{2,3}$, omn. $xx\sqrt{1-x^3} = \frac{2}{3,3}$, omn. $x^3\sqrt{1-x^4} = \frac{2}{4,3}$ etc.; item omn. $x^3\sqrt{1-xx} = \frac{8}{4,15}$, omn. $x^5\sqrt{1-x^3} = \frac{8}{6,15}$, omn. $x^7\sqrt{1-x^4} = \frac{8}{8,15}$ etc.; omn. $x^5\sqrt{1-xx} = \frac{48}{6,105}$, omn. $x^8\sqrt{1-x^3} = \frac{48}{9,105}$, omn. $x^{11}\sqrt{1-x^4} = \frac{48}{12,105}$, atque sic talia magno numero communicare possem. Jam interim ad alteram partem hujus Methodi me convertam, quae constitit ut dato aliquo spatio mensura ejus detegatur (loquor saltem de superficie, quia omnes aliae quantitates ad has reduci possunt) tuncque sic procedo: conjungendo primo rectangulum cum proposita figura, formo solidum hinc ut antea, et siquidem hinc non mensura patet progrediendo ut supra, assumo alias ac alias figuras quadrabiles et efficio hinc solida priori aequalia et tunc, ut antea, progredior formando semper aequationes inter diversas illas sectiones, cumque semper spatia illa quadrabilia in certa progressione assumo, debent provenientia quoque semper in certa progressione progredi, adeoque ut facile videam, num hac methodo intentum assequi liceat. Ostendam speciminis loco, qua ratione circuli et aliarum figurarum novas hac Methodo detexerim quadraturas. Primo sit (fig. 97) semicirculus DMI et assumamus rectangulum DACI ita ut radius $JO = DA$; sed cum hac ratione nihil invenimus, quod tendat ad nostrum scopum, ut tentanti constabit, assumo triangulum FHD, in quo $FH = DH$, et efficio solidum priori aequale, hoc est efficio, ut rectangulum MKB semper aequale sit rectangulo EGL; ponamus itaque in hunc finem $IK = x = HG = NL$ et posito $OI = a$, erit DK seu $FG = 2a - x = EG$. Jam sit HN seu $GL = z$ et fiat rectangulum MKB = rectang. EGL eritque $a\sqrt{2ax - xx} = 2az - xz$, quibus reductis invenitur $x = \frac{2azz}{aa+zz}$, ex quibus patet curvam hanc HLS esse eandem, qua egregie circulum quadrasti. Sed videamus, qualis quadratura ex hac Methodo proveniat. Cum itaque jam omnia rectangula EGL juxta superiora aequalia sint omnibus spatiis DHGE supra NL, hoc si calculo exprimo $DEGH = FHD - FGE$, hoc est $DEGH = \frac{4aa}{2} - \frac{4aa - 4ax + xx}{2} = \frac{4ax - xx}{2}$, restituatur jam x et erit $\frac{8azz}{aa+zz} - \frac{4aaz^4}{\overline{aa+zz}^2}$, hoc est $\frac{8a^4zz + 4aaz^4}{a^4 + 2aazz + z^4}$, hoc si dividatur per 2 et erunt omn. $a\sqrt{2ax - xx} = \frac{4a^4zz + 2aaz^4}{a^4 + 2azz + z^4}$; quodsi in hac fractione loco $2aaz^4$ esset $4aaz^4$, posset haec fractio dividi per $aa + zz$ atque sic in tuam quadraturam inciderem, quod aliquando examinabo, num possibile sit, hinc quoque educendi; qua ratione vero jam haec fractio ad infinitam seriem reduci debeat, Tibi notius jam est ex Dn. Mercatoris Methodo, quam ut prolixior eo sim; annoto saltem, si ponamus FG seu $DK = x$ (quod in sequentibus quoque facio), invenietur $a\sqrt{2ax - xx} = \frac{2a^6}{a^4 + 2aazz + z^4}$. Sit secundo curva DMI talis, cujus natura $\sqrt[3]{2axx - x^3}$ eritque, supposito $a\sqrt[3]{2aax - x^3} = xz$, $x = \frac{2a^4}{a^3 + z^3}$; jam omnes FGE supra PL aequales omnibus rectangulis EGL, hoc est $\frac{xx}{2} = \sqrt[3]{2axx - x^3}$, hoc est restituto x, erit $a\sqrt[3]{2axx - x^3} = \frac{2a^8}{a^6 + 2a^3z^3 + z^6}$. Eadem ratione invenies $a\sqrt[4]{2ax^3 - x^4} =$

$\frac{2a^{10}}{a^8 + 2a^4z^4 + z^8}$, atque sic in infinitum infinitas quadraturas per series infinitas non ineleganter expressas. Possem jam ulterius progredi et eadem facilitate ostendere, tam quae Parabolis infinitis analoga, quam alia innumerabilia spatia indefinitae longitudinis ad finitam mensuram reducendi; sed credo haec ex superioribus satis abunde constare. Hoc interim adjungam, cum tota haec Methodus saltem in eo consistat, ut Relationes ejusdem quantitatis ad diversas lineas adaequemus (atque proinde reflectendo ad pag. 39 Geomet. D. des Cartes, mihi certo persuadeo hanc ipsam ipsius quadraturas investigandi methodum adfuisse, quam, cum tam facilis existebat, potius indigitare volebat, quam prolixe explicare, prout ipsi familiare erat circa talia) hocque sic praecise spectatum non saltem solidis applicabile, in hoc siquidem tali occasione incidi: sit (fig. 98) linea $AB = a$, jam $AC = x$ et $CB = y$, hinc $a = x + y$, $aa = xx + 2xy + yy$, $a^3 = x^3 + 3xxy + 3xyy + y^3$, atque sic in infinitum; demonstraveram autem omn. x = omn. y, omn. xx = omn. 2xy = omn. yy; item omn. x^3 = omn. 3xxy = omn. 3xyy = omn. y^3, atque sic in infinitum semper continuam aequalitatem intra hasce infinitas quantitates existere; verum demonstratio haecce, cum difficilis esset, eo ipso mihi displicuit, quapropter in faciliorem inquirens vidi primo facile patere, quasvis infinitas dignitates ab alia parte hujus lineae incipiendo aequari infinitis dignitatibus eadem ratione compositis incipiendo ab altera ejusdem parte, ac proinde omn. x = omn. y, omn. xx = omn. yy, omn. x^3 = omn. y^3 etc. item omn. xxy = omn xyy, atque sic quoad similia, adeoque saltem demonstrandum faciliori via omn. xx = omn. 2xy, item omn. x^3 = omn. 3xxy, atque sic continuo aequalitatem intra diversi generis dignitates. Variis autem tentatis viis res sic facillime successit. Dico itaque 1) omn. 2xy = xx seu omnia rectangula AHF aequari omnibus quadratis AH (in fig. 99) et sic demonstro: omnia enim rectangula AHF bis aequalia sunt omnibus rectangulis EHD bis, hoc est solido a triangulo ABF et triangulo altero AFG perpendiculari ad AF, hoc est omnibus intersectionibus CD bis ejusdem solidi, hoc est omnibus triangulis AHE bis, hoc est omnibus quadratis AH. Q. E. D. Dico 2) omn. 3xxy = x^3 et sic demonstro: omnia enim producta ex quadratis AH (fig. 100) in HF ter aequalia sunt omnibus productis ex quadratis EH in HD ter, hoc est aequalia solido ex triangulo AFB et figura altera AFG perpendiculari ad lineam AF ter, hoc est omnibus intersectionibus secundum lineam CD parall. AF ter, hoc est omnibus spatiis AHE ter, hoc est omnibus rectangulis AHE, hoc est omnibus cubis AH. Q. E. D. Atque sic porro progrediendo cum tantam facilitatem haecce sic demonstrandi observarem, hisce insistens in jam modo communicatam Methodum incidi. Verum cum omnia, quae contra consuetudinem fiunt, ordinarie risum movent, non dubito quin eadem ratione tam extraordinariam parenthesin excipias, quod nec absque usu fiet, si quidem nimia attentio circa talia studia plerumque efficit, ut vultus nostri constitutio tristitiae statui vicinior esse appareat quam hilaritatis. Idem quoque tentavi in superficiebus, et non contemnendum observavi successum; attamen recordatus, quod Cavalerius solas lineas et superficies considerando, in superficiebus et corporibus sibi ipsi impedimento fuerit, quominus curvarum ac superficierum curvarum dimensiones exhiberet atque sic suam Methodum ad summam perfectionem reduceret, quod post ipsum egregie ab Aliis praestatum, considerantes in superficiebus rectangula, cujus altitudo indefinite parva atque sic in aliis quantitatibus semper homogenea indivisibilia: reflectens, inquam, ad ea, vidi haec optime succedere, quanquam ob temporis brevitatem impossibile mihi fuit, haec ex professo pertractare, quod ad quietiorem statum reservo. Jam vero mentem meam sic explico: sit (fig. 101) AHK quaecunque figura sitque AB = x, BC = y, BD seu CF = 0 seu quantitas omni assignabili minor, qua utitur Fermatius et Multi post ipsum ad Tangentes determinandas, Tu vero ad quasvis quantitatum transmutationes in alias solo calculo peragendas, AH = 1 = HK, hincque HD seu FG = 1 — x — 0; porro calculi facilitas maxima erit, si postquam quantitas 0 certam dimensionem acquisivit, omnes quantitates includentes plures ejusdem 0 dimensiones omittamus. Sit itaque primo natura hujus spatii hac aequatione expressa y = x adeoque

I.

$$\left.\begin{array}{l} DE = 0 + x \\ BC = x \end{array}\right\} s$$

$$\left.\begin{array}{l} FE = 0 \\ FG = 1 - x - 0 \end{array}\right\} m \qquad \left.\begin{array}{l} BC = x \\ CF = 0 \end{array}\right\} m$$

jam omn. rectang. GFE = $10 - x0 = 0x$ = omn. rectang. BCF adeoque $2x = 1$ et $x = \frac{1}{2}$.

II.

Sit $y = xx$ adeoque

$$\left.\begin{array}{l} DE = xx + 20x \\ BC \text{ seu } DF = xx \end{array}\right\} s$$

$$\left.\begin{array}{l} FE = 20x \\ FG = 1 - x - 0 \end{array}\right\} m \qquad \left.\begin{array}{l} BC = xx \\ CF = 0 \end{array}\right\} m$$

omn. rectang. GFE = $20x - 20xx = 0xx$ = omn. rectang. BCF, ergo $2x = 3xx$, hoc est juxta priora $xx = \frac{1}{3}$.

III.

Sit $y = x^3$, jam

$$\left.\begin{array}{l} DE = x^3 + 30xx \\ DF = x^3 \end{array}\right\} s$$

$$\left.\begin{array}{l} FE = 30xx \\ FG = 1 - x - 0 \end{array}\right\} m \qquad \left.\begin{array}{l} BC = x^3 \\ CF = 0 \end{array}\right\} m$$

omn. rectang. GFE = $30xx - 30x^3 = 0x^3$ = omn. rectang. BCF, adeoque $3xx = 4x^3$ et hinc juxta priora $x^3 = \frac{1}{4}$,

atque sic in infinitum. Sed haec etiam alia adhuc via ac faciliori possunt exhiberi. Et haec ad explicationem superiorum sufficiant; ubi animadvertere licet, hanc viam per superficies solas in eo superare priorem, quod hic ad quantitatum dimensionem obtinendam non opus alterius diversae superficiei dimensione habere, sed solam naturam superficierum nobis datam, et credo hanc ultimam esse perfectionem quam desiderare possunt Mathematici circa quantitatum mensuras, veluti aliquando me spero ostensurum. Circuli Tui quadraturam statim hinc deduco et quaecunque hactenus vidi egregia, ac mihi persuadeo, quicquid humanitus potest deduci circa hanc materiam (licet subridendo forte existimabis me hancce Phrasin contraxisse a Viro, quem me scis magni admodum aestimare et qui reliqua captum humanum superantia credidit, quae tamen recentiorum industria detexit). Nec hinc Gregorius amplius Algebrae defectum incusaret circa quantitatum mensuras, prout facit in Praefatione Geometriae suae Universalis. Ultimo possem hic ostendere, tam qua ratione per eandem Methodum hinc deduxerim duo Theoremata Tibi transmissa, ad centra gravitatis curvarum quantitatum determinanda, quam qua ratione ope horum centra gravitatis majori facilitate ac supra curvarum quadraturae assignari possint; sed brevitatis causa haec omitto cumque haec non difficulter jamjam pateant. Tuam Cyclometriam omnes maxime desiderant, quibus insinuavi inventa quae continet, ac optat praeprimis Dn. Nanzarius, ut quam primum hujus Tractatus exemplar possit impetrari, qua de re ut et circa hactenus desiderata a Te literae hisce inclusae pleniorem spero instructionem exhibebunt. Dn. Fabri nondum visitavi ob multas rationes, attamen non discedam Ipso insalutato. De Borellio non dissimile mihi judicium vestro; Kircherum vero multoties salutavi ob diversas rationes; in Musicis impetravi quaedam eorum quae reticet in sua Musurgia; jam Artis suae Combinatoriae secundus Tomus, qui dicitur Ars analogica, Amstelodami imprimitur; in Hetruria describenda modo occupatur. Caeterum adeo ejus interiora penetravi tam ex lectione quam Ipsius conversatione, ut quousque ipsius Methodo pertingere liceat, quaeque paradoxa hinc deducere, me credam aliquatenus videre, de quibus, ut spero, aliquando oretenus. Auzout non Romae est; Francisc. Levera vero mortuus. Cassini inventa de duobus aliis Planetis circa Saturnum praeter Hugenianum hic in dubium vocantur. Caeterum quoad optica vitra et hic et alibi egregia vidi; Divini vero non est Romae; Bacone Genuae occupatur in scribendo certo libro. Vidi librum Francis. Bayle Tolosae impres. An. 77 hoc titulo: Problemata Physica et Medica, in quibus varii Veterum et Recentiorum errores deteguntur; item Dissertationes ejusdem Physicae; non potui eo ob certas rationes nisi duarum horarum spatio frui; inter multa quaedam nova quoque indigitabat, quaedam circa refractionis materiam et tam defectus demonstrationis Fermatii, quam Cartesii in hoc negotio mihi videbatur ingeniose detegere ac emendare. Posses submonere Dn. Hugenium hac de re, quem meo nomine officiosissime salutes; licet non libenter talia literis committam, attamen ob ea quae tam praestanti Viro debeo, non possum quin indicem, Italos de ipso admodum male judicare ac conqueri ipsum ultra viginti propositiones ex Gallileo hausisse in suo Horologio oscillatorio, nec ipsius tamen mentionem fecisse; desiderat quoque Dn. Riccius ab eo jam a longo tempore responsum. Dicunt huc allatum esse horologium ex Gallia, quod praestantius sit ultima inventione Dn. Hugenii; spero hoc me brevi visurum. Perhibetur quoque Becklinium, quae circa viventia sub aquis in lucem emisit, curiosa esse.

IV.

Leibniz an Tschirnhaus.*)

Venio ad ea quae de dimensionibus curvarum habes, peringeniosa more tuo. Sed nolim putes ad eorum demonstrationem opus esse rectangulis exiguae altitudinis. Nam ex multis planis non fit solidum nec ex multis lineis spatium, sed ex multis rectangulis vel parallelepipedis exiguis. Ea quam explicas in literis methodus tua est affinis ductibus figurae in figuram, quos primus invenit et cum fructu adhibuit P. Gregorius a S. Vincentio, postea generalius adhibuit Pascalius. Ego talia et innumera alia calculo solo complector, ex. causa sit y aequ. $\sqrt{x^2+b^2}$, z aequ. $\sqrt{bx+b^2}$, et yz aequ. ω aequ. $\sqrt{bx^3+b^3x+b^2x^2+b^4}$, erunt plana solidi ductu ordinatarum y, z in se invicem facti proportionalia seu homogenea planis seu, ut ita dicam, ordinatis solidi ductus**). Si jam solidum alio modo secari possit quomodocunque et alia figura plana curvilinea reperiatur, cujus ordinatae v sint proportionales planis sectionis, patet cum solidum diversis modis sectum semper sit idem, summam omnium v haberi posse ex data summa omnium ω, vel contra. Eadem methodo usus est P. Honor. Fabri in suis Geometriae Elementis ad demonstrandas quadraturas, sed plerasque dudum notas. Sed neminem autorem vidi, qui hujus rei pariter ac multarum aliarum vim animo complexus sit. Te certe unum hunc ductuum usum satis universaliter considerasse arbitror. Unus olim P. Gregorius a S. Vincentio aliquid hujusmodi quasi per nebulam vidisse videtur, sed calculi defectu latius extendere non potuit. Sed nonnulla ex his variosque alios vastissimos conceptus Tibi aliquando in schedis meis dudum notatos monstrabo, si modo Tibi tanti vi-

*) Von der Antwort Leibnizens fand sich nur das folgende Bruchstück.

**) Leibniz macht hierbei die Marginalbemerkung: Methodum illam tuam per solidorum ductuum diversas sectiones hac complector aequatione transcendente $\int \overline{zy\,d\overline{x}}$ aequ. $\int\overline{\int \overline{z\,d\overline{x}\,d\overline{y}}}$, ubi tantum ipsarum z et y relationem ad x in ipsarum locum substitui oportet. Unde infinitae deduci possunt quadraturae absolutae vel hypotheticae, sed infinitas alias ejusmodi aequationes habeo non minus feraces, ut intelliges calculo meo intellecto.

detur. Caeterum omnes hujusmodi methodos puto imperfectas, habent enim aliquid a casu. Et data problemata earum ope solvere non possumus, nisi condita Tabula. Nescio an demonstrare possis ope Tuae methodi (sectionis ductuum) omnes quadraturas possibiles provenire, puto tamen multas pulcherrimas progressiones ejus ope provenire posse. Ego (si methodos hujusmodi sequi libet) methodum per differentias habeo pro perfectissima, ejus enim ope omnes curvas quadrabiles in Tabula exhiberi posse certum et demonstrabile **est**, quod me Tibi alias dicere memini. Altera pars quoque Methodi tuae pulcherrima haud dubie theoremata et progressiones exhibebit. Puto autem hanc methodum tuam fore aptissimam ad Wallisianas interpolationes demonstrandas et universaliores reddendas. Caeterum annotare operae pretium est ad tuam Methodum nos devenire sine ulla solidi contemplatione, hoc unum tantum adhibendo, quod s u m m a s u m m a r u m i d e m s i t cum m o m e n t o f i g u r a e a l i c u j u s v e l s e r i e i.*) Et similia theoremata etiam ad imaginarias dimensiones produci possunt, cum scilicet aequalitates sectione alicujus figurae imaginationi exhibere non licet. Calculum autem habeo pro talibus theorematis eruendis peculiarem, qui cum calculo, quo ad tangentes utor, convenit. Caeterum hujus calculandi rationis circa transcendentia ne primi quidem aditus Cartesio fuere noti, non defectu ingenii, sed (ut in aliis hominibus) defectu reflexionis. Quare non potui non risitare nonnihil, cum putes Cartesio methodum investigandi Quadraturas tuam innotuisse. Pari jure poteris dicere eam innotuisse Cavalerio, aut nescio cui non. Ego pro certo habeo, Cartesium in his rebus non multo longius fuisse provectum, quam Cavalerium, nam Cavalerii tantum more quaerebat summas ordinatarum in figuris. Si vero intellexisset satis Archimedeam Geometriam, nunquam dixisset, non posse inveniri lineam curvam rectae aequalem, facile enim judicasset dari posse curvam, in qua (polygoni infinitanguli instar considerata) latera procederent ut ordinatae parabolae alteriusve figurae quadrabilis; potuisse autem talia invenire, si se applicuisset, non dubito, non tam vi methodi suae, quam vi ingenii. Caeterum progrediendo in lectione literarum tuarum video te subjecisse pulcherrimas quasdam et universalissimas contemplationes, ex quibus illa semper mirifice placuit, quod omn. x^2 aequ. omn.

*) Leibniz hat am Rande bemerkt: id est $\int \overline{zydx}$.

$2xy$ aequ. omn. y^2, et ita de caeteris, posito AB (fig. 98) esse constantem seu $y+x$ aequ. a, et AC aequ. x et CB aequ. y. Haec contemplatio penitus nova est et te digna: nec enim hoc theorema alibi videre memini, et gaudeo id a te facile demonstrari, est enim momenti maximi. Non vidi illa duo theoremata circa centra gravitatis curvarum, quae mihi transmisisse ais. Ego non dubito, si ita pergis, quin tandem ad intima atque universalissima sis perventurus, in quo si tibi sparsae et variae, atque ut ita dicam, desultoriae meditationes meae utiles esse possunt, quas in his rebus habeo, equidem mihi gratulabor. Vicissim a te multa et pulcherrima mihi ignota expecto. Optime facies, si quae de periodis fractionum ad numeros decimales reductarum innuis, etiam ad alias progressiones . . . . .

V.

Tschirnhaus an Leibniz.

Romae d. 10. Aprilis An. 1678.

Literas tuas binas recepi easque gratissimas; ad priores non licuit prius respondere, cum responsum ad meas ex Patria nondum receperam; jam vero ad quid determinatus sim, paucis significabo.*) —

Jam autem Tua venia ad Mathematica me converto; et primo quoad Methodum, qua usus fui ad quadraturas, quamque ultimis literis communicaram, responsio Tua efficit, ut sequentia adhuc annotare necesse habeam: Gregorius a S. Vincentio non solum tam universaliter, ut hoc explicas, sed neque tam generaliter, prout ego percipio, haec intellexit, uti statim dicam; porro nec aliquid essentiale meae Methodi habet, quod enim talia solida considerat, id quoque a Cavalerio factum et saltem accidentale hujus Methodi, ex quo patet, quod prorsus hancce Methodum non sciverit, ut clarius ex infra dicendis constabit, ac proinde ut non videam, quare ipsi hoc attribuendum; ac idem de Pascalio judico, cum revera si haec ipsi perspecta fuissent, non subticuisset, cum tanta facilitate res

*) Im Folgenden verbreitet sich Tschirnhaus mit grosser Weitläuftigkeit über Pläne zu weitern Reisen und über seine zukünftige Stellung im Vaterlande.

peragatur ac universalitate, quod utrumque de sua Methodo ostendere ipsius intentio erat. Fabri Synopsin Geometricam nunquam legeram, sed hujus rei admonitus ab Dn. Nanzario impetratam totam evolvi; fateor praeter alia multa satis bona, quod quoque aliquarum parabolarum dimensionem tradit (nam omnium sane mensuram non exhibet) quodque in quibusdam earum solidis iisdem mecum utatur, quodque haec solida in eadem elementa resolvat, ut ego; sed quod inde mecum concludit, prorsus diversa ratione efficit, cum non elementa omnia ad invicem adaequet, ut ego, ac via prolixiori, cum alio diverso insuper ad hoc probandum Theoremate opus habeat, quod mihi nullatenus necessarium; praeterea semper quantitates in Heterogenea Elementa resolvit, quod meae Methodi saltem particularis casus est, veluti statim dicam, licet credebam, me hoc sufficienter in literis meis indicasse. Quod autem praeterea addis, quod putes, Te dudum ea de re mecum locutum, utique nescio, ad quae referas; hoc certus sum, quod de illis omnibus, quae Tibi transmisi hanc Methodum concernentia, nunquam aliquid mihi indicaras, imo nec ipse eo tempore adhuc ad illa reflexeram, et revera admodum contra mores meos esset tale quid committere, licet quoque variam tam ipse, quam ex aliis mihi compararim cognitionem circa quadraturas, attamen non mihi hac in re prorsus satisfeci. Fateor interim quod tres Methodos praecipue aestimo: prima est, qua vidi Dominum Heuratium uti ad curvarum in rectas transmutationem, quam sincere et universaliter explicat, ejusdem Methodi deinde Dn. Barrow varia exempla suppeditavit satis egregia; secunda Methodus est Tua, qua solo calculo soles unam figuram in aliam transmutare exprimendo calculo quantitatem rectanguli altitudinis indefinitae parvae, efficiendoque hoc alteri aequale, quam ex Te addiscere licuit, prout in meis literis ingenue, prout mea est consuetudo: confessus et qua fateor me admodum delectatum fuisse, cum non solum hinc quadraturae, sed et Tangentes ac alia egregia deducantur; tertia est haec ipsa, quam Tibi transmiseram, qua cujuscunque quantitatis (adeoque vides, quod de solidis dixi, quoque saltem corrolarium meae Methodi esse) elementa homogenea (Heterogenea etenim specialem saltem casum constituunt non secus ac Cavalerii Methodus harum trium Methodorum saltem corrolarium existit) omnibus modis, quibus ut diversa considerari possunt, sibi ad invicem adaequantur, atque sic ope aequationum quadraturas elicui; quae revera si Tibi nota fuerit, saltem non

mihi unquam indicasti, uti probe scies, hanc autem satis clare me exemplis indicasse putem. Nec porro Parabolarum quadraturas saltem dedi, in solidis Heterogenea Elementa, hoc est omnes superficies horum ad invicem adaequando, sed et in ipsis superficiebus homogenea elementa, hoc est rectangula altitudinis indefinite parvae ad invicem comparando, quod a nullo addidici, et variis admodum modis hoc idem et alia similia hac methodo praestare possum. Ulterius si sit quantitas quaedam, primo quoque Elementa ejus varie ad invicem adaequando, hoc universali ratione efficio, sed diversa a Tua expressione, qua tres sectiones differentes solidorum a me consideratorum exhibes, meoque judicio magis intelligibili ac ordinaria, cum novitatem in definitionibus vocum quantum possum effugio, hoc enim nihil aliud est quam scientias difficiles reddere, nec deinde quoque opus habeo in similibus quantitatibus ad figuras earum reflectere, licet a principio ad tales aequationes efficiendas hoc apprime necessarium: sed hoc saltem compendium est Methodi, non ipsa Methodus, et quorum alia adhuc et majoris momenti scio. Si autem jam memorata Methodo facilior ac universalior existit, qua uteris ope Logarithmorum quadraturas exhibendi, ejus communicationem apprime desiderarem, uti et omnia quae a Te proficiscuntur, nec non Methodum, qua infinitas series elicis ex infinitis aequationibus. Videbis mea recepta (quod non dubito, cum ne unica litera ad Schullerum data jam per quatuor annos perdita fuerit), in quantum consentiat cum Tua, estque illa corollarium illius Methodi, qua omnem possibilem rationem seu proportionem duarum quantitatum determino. Tales aequationes vero, in quibus incognita exponentem ingreditur, non opus habui adhuc resolvere; interim hoc jam video plures tales posse resolvi omnium aequationum radicibus universaliter determinatis; nunc omnes nondum examinavi. Tria alias existimavi mihi superanda difficilia admodum in Mathematicis, quibus intentis me aliorum omnium adhuc desideratorum participem fieri posse persuasi, aut quae cum horum respectu facilia, quoque iis superandis me non imparem futurum; primum est: Omnium quantitatum quadraturas una et generali Methodo determinare, in quo licet varia sciam, imo rem eo reduxerim, ut saltem triginta quantitatum quadraturis determinatis omnium exhibuerim, nihil tamen hactenus conceptibus meis correspondens. Sed reliqua duo penitus absolvi et ultimum juxta propria vota est; autem secundum: Omnium curvarum possibilium (determinatio, quod credo Te jam percepisse ex literis, quarum tam saepe mentionem feci, et licet quaedam adhuc ad ea perficienda desiderari possint, haec jam omnia in mea potestate esse scio, modo occasio detur me hisce applicandi. Tertium est: Generalis Methodus omnium aequationum radices exhibendi et in iisdem literis tres methodos hoc ipsum exsequendi transmiseram; verum primam non amplius pro mea cognosco, cum meliorem scio, ut statim dicam, cujus illa saltem corollarium, praeterea prolixa admodum, cum calculus, quo aequationis quinti gradus radicem universalem exhibeo, et quem Parisiis Dn. de Graaff in Hollandiam perficiendum miseram, vix octiduo absolvi possit, cum jam horae spatio rem eandem peragere sciam, altera methodo adjutus. Dicam itaque me non ita pridem in talem Methodum incidisse, quae mihi omnimodo satisfecit, credo et Tibi; haec praeter magnam facilitatem in respectu priorum hoc etiam peculiare habet, quod omnis calculus, qui ad eam acquirendam adhibetur, non inutilis prorsus, uti in prioribus et quod praecipue rem taediosam efficit, sed totius Algebrae praecipua Elementa ac Compendia et primaria Theoremata exhibet ac primas ejusdem quaestiones compendiosa admodum reductione resolvit. Hanc hic sincere Tibi ac distincta quam fieri poterit (nullum laborem respiciens ac temporis jacturam, quo licet premar) quasi explicatione describere constitui, iisque compendiis (primariis tamen) quibus intra quatuordecim dies (imo intra admodum breve tempus, si saltem generales radicum expressiones desideremus) ipsam absolvi posse crediderim (hoc est, usque ad duodecimum gradum, hinc enim, credo, progressio patebit) quaeque talia sunt et tam necessaria, ut sine his ordinaria via procedendo non eo perduci posset, si decem homines seculum in eo calculando consumerent, imo nullatenus cum papyrus hujus terrae non sufficeret, ut facile ostendere possem, hanc autem rigidissimis tuis censuris subjicio.*) —

Tandem ut ad ea revertar, quae loqueris de lingua Philosophica ac aliis similibus, non utique haec percipio, nec quoque quod dicis de lingua quadam Geometrica, qua Dn. Desargues sub-

---

*) Es folgt hier eine sehr weitläufige Darstellung der Methodus Generalis omnium aequationum radices exhibendi; da Tschirnhaus selbst sie in den Act. Erudit. 1683 bekannt gemacht hat, so kann dieselbe hier füglich wegbleiben.

tilissimas ratiocinationes instituit sine figuris et calculo, nunquam sane haec vidi, nisi quae de Sectionibus habet conicis perpulchra, sed quae aliquo modo imaginationem fatigant. Hoc quidem mihi persuasi et certus sum, nos posse in rebus philosophicis ad veritates incognitas indagandas eadem ratione calculo uti simili Algebraico; sed hic primo definitiones rerum tradendae, quae satis perspicax ingenium desiderant, nec ad eas formandas praestantiora praecepta unquam vidi, quam quae habet Dn. Spinoza de Emendatione intellectus, quod manuscriptum a Dn. Schulero mihi transmissum penes me habeo; utinam omnia reliqua ejus opera! Et in eo totus ero postquam mihi in Mathematicis satisfecerim, si quidem fata, concedant. Sed quod non adeo facile sit, definitiones rerum tradere accuratas, id vel ex hoc solo constat, quod et in Mathematicis non semper tales traditae; sic ne unicum vidi qui veram definitionem tradiderit proportionis, imo quod magis mirandum rei simplicissimae, hoc est, lineae rectae nullam accuratam definitionem, nisi per solas proprietates, quod nimirum sit brevissima eosdem terminos habentium, quod extrema obumbrent omnia media etc. *)

Auf dieses Schreiben liess Tschirnhaus sehr bald ein anderes, datirt Rom den 30. April 1678, folgen, in welchem er Leibniz anzeigt, dass er Rom verliesse, um Sicilien und Malta zu besuchen. Er hofft in zwei Monaten zurück zu sein, und spricht den Wunsch aus, bei seiner Rückkehr nach Rom einen Brief Leibnizens vorzufinden.

VI.

Leibniz an Tschirnhaus. **)

Ex quo Tibi scripsi, binas a Te accepi, priorem prolixam, qua Methodum inveniendi aequationum radices describis, alteram

---

*) Das Folgende ist dadurch, dass ein Stück Papier abgerissen ist, zu verstümmelt, als dass es hier wiedergegeben werden könnte.

**) Leibniz hat bemerkt: Romam ad Dn. Tschirnhusium fine Maji 1678. — Tschirnhausius accepit Epistolam, nam respondit et in responsione verba mea allegat. In hac Epistola explicui jam Tschirnhusio brevem, qua iter tuum significas; respondissem priori statim nisi vetuisses ob iter instans tuum. Nunc respondeo, quia ita posterioribus jussisti. Spero Te ex Siculo itinere salvum reversum aut mox reversurum. Quanquam autem sciam Te satis in itineribus circumspectum esse, quia tamen multis casibus expositi sunt peregrinantes, non desinam de Te esse solicitus, donec Te reversum intellexero. Schillerus noster jam sex et ultra mensibus nihil a Te accepisse scribit, quare vereor, ne literae Tuae ad me, quas Schillerianis inclusisse scribis, cum illis perierint. Certe eas, quibus exposuisse scribis methodum exprimendi quamvis rationem vel proportionem per seriem infinitam, non accepi; quare nec illud vidi, quod illic ais a Te descriptum modum investigandi numerum omnium curvarum. Quod Methodum tuam aequationum Radices inveniendi tam ample et distincte non sine labore mihi describere voluisti, multum me Tibi debere profiteor. Legi diligenter et ni fallor intellexi et deprehendi tandem, nondum omnino rem absolutam esse, imo si quid judico hac quidem via ne absolvi quidem posse. Nimirum tota res huc redit: Sit aequatio $x^4 + qx^2 + rx + s$ aequ. 0. Ponitur x aequ. $a + b + c$, unde aequationem aliam excitas, quam priori comparando facis: $ab + ac + bc$ aequ. m, abc aequ. n, $a^4 + b^4 + c^4$ aequ. l. Hinc derivare vis sequentes aequationes: $a^4 + b^4 + c^4$ aequ. l, $a^4 b^4 + a^4 c^4 + b^4 c^4$ aequ. e, $a^4 b^4 c^4$ aequ. n^4. His tribus novissimis obtentis fateor haberi quaesitas a, b, c adeoque et x. Verum ajo ipsas et nominatim aequationem penultimam sive quantitatem desideratam e, valorem scilicet cognitum ipsius $a^4 b^4 + a^4 c^4 + b^4 c^4$, ex prioribus assumtis deducere impossibile esse, nisi forte per aequationem aeque difficilem ac est resolvenda. Cujus sententiae meae demonstrationem in adjecta charta explicui, addidique qua ratione mihi ad aequationum radices perveniri posse videatur, ubi et demonstrationem futuri successus adjeci. De quo sententiam tuam expecto. Certe haec sola est via mihi nota, quae secum fert successus demonstrationem. Intelligis etiam inde non pauca eorum, quae in literis tuis exposuisti, et mihi jam olim fuisse explorata sive tentata, et inprimis illam methodum tuam ex aequationibus $ab + ac + bc$ aequ. m, abc aequ. n, $a^4 + b^4 + c^4$ aequ. l inveniendi e et per consequens x, olim mihi quoque miri-

---

generalem meam methodum investigandi quadraturas: item notam definitionis realis, quae est possibilitas. Ipse post utrumque sibi ascripsit.

fice blanditam, sed postea irritam deprehensam. Pulchra habes theoremata circa formas ex literis similiter se habentibus ortas, in quo genere et ego multum laboravi, de quo et prioribus literis Tibi scribere memini. Ex. gr. tabulam habeo, per quam statim apparet, quot cujuscunque formae sint exempla in dato literarum numero, v. g. formae ab, datis tribus literis, exempla sunt 3, ab, ac, bc. Hacc tabula secundum quandam regulam facilem conditur, quam tamen et Tibi satis animadversam ex literis tuis apparet, ni fallor. Aliam habeo majoris momenti circa multiplicationem formae in formam v. g. a^2b in ab, positis literis 4, a, b, c, d:

$$\begin{array}{lcccccc} & ab & ac & ad & bc & bd & cd \\ a^2b) & a^3b^2 & a^3bc & a^3bd & a^2b^2c & a^2b^2d & a^2bcd \\ & \frac{12}{12}=1 & \underbrace{\frac{12}{12}=1 \quad \frac{12}{12}=1}_{2} & & \underbrace{\frac{12}{12}=1 \quad \frac{12}{12}=1}_{2} & & \frac{12}{4}=3 \end{array}$$

seu a^2b in ab dat

$$a^3b^2 + 2a^3bc + 2a^2b^2c + 3a^2bcd.$$

Nimirum non tantum omnia exempla unius formae in unum exemplum alterius duco (quemadmodum et Tu notasti) ad formas provenientes inveniendas, sed et ad numeros formis provenientibus praefigendos cuilibet formae provenienti subscribo quotientem ex divisione numeri exemplorum formae multiplicantis, hoc loco a^2b (qui numerus est hic 12) per numerum exemplorum cujusque formae provenientis, ut a^2bcd in literis 4 exempla sunt 4, et 12 per 4 dat 3. Si forma saepius proveniat, multiplicandus quotiens per numerum repetitionum. Notabile est, in quibusdam casibus quotientem esse fractionem, sed eam postea semper multiplicatione per numerum repetitionum tolli. Hujus autem regulae ope Tabulam condere coepi, cujus ope primo aspectu statim formae in formam ductus sciri possit, et vero pulchras illa habet progressiones, quarum magnam partem jam video. Porro in Algebra quoque pulcherrimos ea Tabula usus habebit, non tantum in problematibus illis, ubi literae incognitae se eodem habent modo, sed et in aliis omnibus, quia problemata omnia tandem reduci possent ad problemata incognitarum se similiter habentium. Quod est utilissimum, quia tunc plerumque pulchra compendia se proferunt et (quod sane magni momenti est) una aequatio omnibus illis incognitis simul inveniendis servit, et diversae illae incognitae sunt aequationis ultimo inventae radices: unde semper summae earum et summae rectangulorum ex ipsis et parallelepipedorum seu rectangulorum solidorum summa etc. inveniri potest. Ex ipsa nimirum aequatione ultimata; nam in ea secundus terminus aequatur summae radicum, tertius summae rectangulorum etc., cumque radices aequationis ultimatae sint eaedem cum indeterminatis seu incognitis pluribus in problemate resolvendo adhibitis, patet de illis hoc verum esse quod earum summa et summa rectangulorum etc. habeatur. Ex. g. si $x + y$ aequ. a et xy aequ. b^2, fit aequatio $y^2 - ay + b^2$ aequ. 0, cujus aequationis una radix erit y, altera x. Hinc etiam patet, cum omnia problemata possint reduci (vel calculo vel linearum ductu) ad incognitas similiter se habentes, et in problematis similiter se habentibus ad ultimatam aequationem reductis, habeatur omnium incognitarum summa et summa rectangulorum etc., hinc utique omnia problemata tandem his tantum adhibitis resolventur seu ut tuis literis utar, positis incognitis problematis a, b, c, d, e inveniendis, invenientur ope ipsarum x, y, z etc., posito x aequ. $a + b + c +$ etc., y aequ. $ab + ac +$ etc., z aequ. $abc +$ etc. [Sed tunc non vicissim a, b, c servire debent ad inveniendam x, quod in aequationum radicibus investigandis fit adeoque tunc non ipsarum y, z etc. valores primum quaerendi, sed ipsarum a, b, c etc. per $a^4 + b^4 + c^4 +$ aequ. ..., $a^4 b^4 c^4$ ....]. Et hoc mihi inter maxima totius Algebrae arcana habendum videtur, cum illius ope omnia problemata reducantur ad pauca, et tabulae condi possint, per quas cuncta sine calculo inveniantur. Haec etiam vera videtur esse via, inveniendi constructiones Geometricas elegantes. Haec Tibi candide perscribere volui, quia et haec et multa alia a Te potissimum perfici posse spero. Analytici nostri (si Vietam excipias) parum de constructionibus elegantibus solliciti sunt, calculum exhibere contenti; cum tamen problemata ista pleraque ingenii potius quam praxeos causa quaerantur, hinc mihi videtur semper elegans quoque constructio esse quoad licet quaerenda. Hugenius mihi dixit, se aliquid meditatum circa demonstrationes ex calculo concinnandas elegantes more Veterum, longe diversum a Schoteniano: ego circa artem inveniendi constructiones elegantes multa habeo notata, sed tamen nondum perfecta; potissimum autem arcanum consistit, ut dixi, in eo ut quaerantur incognitae plures se similiter habentes, item pauciorum radicum. Saepe enim ratio, cur problemata justo altius ascendunt, oritur non tam ex ipsorum natura, quam ex natura incognitae assumtae quae plures habet radices, cum

tamen problema resolvi possit per aliam incognitam habentem pauciores. Ex. g. si pro incognita sumas distantiam puncti quaesiti a centro sectionis Conicae, pauciores orientur radices, quam si sumas distantiam a foco, quia duo sunt foci, adeoque et duae distantiae satisfacientes, loco unius: sed haec obiter. Ad reliqua literarum tuarum capita venio. Methodi qua circa quadraturas uteris, scripseram vestigia quaedam in Fabrio et Pascalio extare, sed et me tale quiddam subinde tentasse. Hoc Tu ita interpretari videris ac si suspicarer Te aliunde hausisse, quod mihi nec per somnium in mentem venit. Scio enim eam Tibi ingenii vim esse, ut etiam praestantiora excogitare possis. Tota res huc redit, ni fallor, quemadmodum iu figura plana quadraturam dare possim vel quaerendo summam omnium y vel quaerendo summam omnium x, ita in solido, ubi tres sunt indeterminatae x, y, z, etiam tribus modis in plana resolvi solidum potest, unde comparando inter se valores totius contenti semper ejusdem aequationes tetragonisticae oriuntur. Ex his autem aequationibus tetragonisticis variae oriuntur quadraturae, ut explicuisti. Ego non hunc tantum, sed et infinitos alios modos habeo obtinendi aequationes tetragonisticas per calculum, cujus istae a Te propositae sunt casus tantum. Calculum autem hunc exsequor per nova quaedam signa mirae commoditatis, de quibus cum nuper scripsissem respondes, tuum exprimendi modum magis ordinarium ac intelligibilem esse, et Te novitatem in definitionibus rerum quam maxime effugere; hoc enim nihil aliud esse, quam scientias difficiles reddere. Sed idem olim opponere potuissent veteres Arithmetici, cum alii recentiores loco characterum Romanorum Arabicos introducerent, aut veteres Algebraici, cum Vieta pro numeris literas afferret. In signis spectanda est commoditas ad inveniendum, quae maxima est quoties rei naturam intimam paucis exprimunt et velut pingunt, ita enim mirifice imminuitur cogitandi labor. Talia vero sunt signa a me in calculo aequationum tetragonisticarum adhibita, quibus problemata saepe difficillima paucis solvo. Ex. g. problema illud, quod Cartesius in Epistolis frustra aggressus est: invenire curvam talem ut intervallum AT inter tangentem CT et ordinatam EA in axe sumtum sit recta constans, meis characteribus adhibitis tribus quatuorve lineolis solvo. Est enim mihi pro methodo tangentium inversa et methodo tetragonistica calculus idem, eadem signa. De his omnibus me jam olim Tibi loqui memini, sed parum attendenti; itaque tantum abest ut Te tuam istam methodum quadrandi a me hausisse putem, ut contra potius animadverterim Te ad multa a me proposita non satis attendisse, quoniam nescio qua praeventione semper suspicabaris, meas methodos esse tantum particulares et parum naturales; illis itaque neglectis Tu tua sponte quaerebas eadem, et cum denique non raro ad illa ipsa per Te venisses, quibus ego usus fueram, tunc Tibi universalia admodum ac naturalia videbantur et diversa plane a meis prius propositis apparebant tum quod ea aliter exprimeres quam ego, tum quod Tibi viae ac processus, quo ad ea perveneras, conscio magis blandirentur, quam cum a me proponebantur, quia Tibi quippe minus attendenti processum et inveniendi modum non exposueram. Fateor hoc Te commodi inde reportasse, tum quod ista hoc modo tua fierent, tum quod ita in inveniendo Te exerceres; verum potuisses labori et tempori parcere et inveniendi artem in aliis adhuc intactis exercere. Nam ut in genere dicam quod sentio, si me jam olim audivisses, tempus quod quadraturis et aequationum radicibus hactenus impendisti, magnam partem aliis impendisses, quia ultra ea, quae ex Parisiensibus nostris collationibus sumi poterant, nondum profecisti. Nam et ego jam Parisiis omnem comparationem referebam ad rectangula ab, abc etc. inveniendarum radicum causa: et quod quadraturas attinet, Methodum per differentias quam jam olim Tibi proposui, omnibus aliis praefero. Omnis enim figura differentialis est quadrabilis, te contra omnis figura quadrabilis est differentialis. Differentialem voco, cujus ordinatarum series coincidit seriei differentiarum ab alia serie: quaerendum est ergo tantum, an data figura sit differentialis: id vero invenitur comparando aequationem figurae datae cum aequatione generali figurae differentialis, ope enim hujus aequationis differentialis generalis possunt enumerari omnes aequationes speciales, quae sunt ad figuras quadrabiles, et ita facile condi posset tabula omnium figurarum quadrabilium. Duo tamen adhuc desidero in hac methodo, primum quod tantum exhibet figuras illas, quarum quadratrices sunt analyticae [quadratrix figura est, cujus figura differentialis est figura data, seu quae ita se habet ad datam, ut series aliqua ad suas differentias], non vero eas quadratrices, quae sunt transcendentes. Ex. g. non ostendisset, quod quadratrix Hyperbolae sit logarithmica. Hac utique methodo area figurae propositae non potest inveniri, quando nec per aequationem exprimi potest, per aequationem, inquam, communem; alioqui enim etiam quan-

titates transcendentes seu (si ita appellare libet) non-analyticae per aequationes, sed transcendentes (in quibus incognita exponentem ingreditur) exprimi possent. Haec itaque methodus, etsi ostendat Circulum et Hyperbolam non habere quadratricem analyticam, non tamen ostendit, qualem habeant quadratricem; et non potest ostendere haec methodus, utrum forte figura aliqua proposita si non absolute, saltem ex supposita alterius v. g. Circuli aut Hyperboles quadratura possit inveniri, ex. g. utrum curva Ellipseos inveniri possit, supposita Circuli vel Hyperbolae vel utriusque quadratura, quemadmodum ego inveni curvam Hyperbolae aequilaterae ex supposita Hyperbolae quadratura. Habeo etiam varias artes, quibus huic defectui mederi licet. Alter hujus methodi defectus est, quod etsi ostendat figuram aliquam non esse quadrabilem analytice quadratura universali omnibus portionibus communi, seu non habere quadraticem analyticam, non tamen ostendit, utrum non specialis aliqua portio speciali ratione quadrari possit. Atque ita hodieque ignoramus, utrum possibile sit, inveniri quadraturam specialem certi alicujus sectoris vel segmenti circularis vel etiam integri circuli. Habeo quidem varias vias, quibus speciales hujusmodi quadraturas invenio, sed nullam habeo ita comparatam, ut ejus ope determinare possim, an quadratura aliqua specialis proposita v. g. integri circuli sit possibilis (per quantitatem analyticam ordinariam seu non-transcendentem), an vero impossibilis. Hujusmodi itaque difficultates a Te quaeri optarem, quas scilicet nos nondum in potestate habemus. Ego nullam hactenus aliam viam demonstrandi tales impossibilitates specialium portionum quadraturas inveniendi agnosco, quam per resolutiones aequationum transcendentium, seu ubi incognita exponentem ingreditur. Nam qui ejusmodi aequationem $x^y + \overline{ya}^x$ + etc. aequ. 0 solvere, seu in aliam ordinariam mutare, seu impossibilitatem in ordinariam mutandi ostendere potest, is etiam perfecte omnes quadraturas invenire potest, aut demonstrare impossibilitatem, quia omnes quadraturae per hujusmodi aequationes transcendentes exprimi possunt. Itaque restat perficienda analytica ista transcendens, qua absoluta omnia habebimus, quae nunc quaerimus in hoc genere. Quae ideo annotare volui, quoniam scribis, nondum Te opus habuisse his aequationibus: quod non miror, quoniam nec alius quisquam earum usum perspexit, aut analyticam satis generaliter tractavit. Methodus mea resolvendi quadraturas per logarithmos coincidit cum methodo ista reducendi eas ad aequa-