id fieri potest, ut in nominatis Curvis Velaria et Lintei aliisque expertus sum.

Clariss. noster Gulielminus nunc febre continua laborat atque ideo nondum ipsi loqui potui eumque hortari, ut observationes aliquas selectiores mitteret Miscellaneis Societatis Celeberrimae, quae Berolini Tuis curis subest, inserendas. De hoc eodem negotio quoque egi cum Cl. Ramazzino, cui salutem Tuam plurimum denuntiavi; optimus Senex qui cultum suum per hasce meas Tibi defert, petitioni Tuae libenter annuet et morem geret quantum ipsi licebit in misero quo nunc versatur statu, quo omni fere oculorum usu caret propter guttam serenam, quae ipsum ab aliquot jam annis affligit. A Cel. Bernoullio ipse ab aliquo tempore etiam intellexi, se theoriam suam motus reptorii multum perfecisse, ejusque ope quamvis curvam ad arcus circulares quantum libet vicinos reducere posse, quod inventum utique eximium est; caeterum quantum scio, bona utitur valetudine, sed dubiis, ut audio, cogitationibus agitatus, utrum obsequi debeat vocationi ad stationem Leidensem ipsi oblatae. Unicum scio ejus ex Fratre Senatore Nepotem, qui in studiis Mathematicis insignem spem facit atque is est qui Newtonianae Regulae inveniendi divisores quantitatum compositarum demonstrationem invenit, sed alter mihi adhuc ignotus est, nisi forte hujus, de quo modo loquutus sum, frater minor intelligatur, qui tempore, quo Basilea discessi, pulverem scholasticum nondum excusserat. Nam defuncti Jacobi Filius unicus nunquam adduci potuit, ut Mathematis operam daret.

Ad Excell. Trevisanum, meum itidem Fautorem insignem, proxime literas dabo eique salutem Tuam plurimam significando, simul applausum aperiam, quo elegantem ejus tractatum del buon Gusto prosequeris. Aliud nunc sub prelo sudat opus Philosophicum de rebus Metaphysicis et Physicis agens, ab eodem conscriptum. Ticini anno superiore etiam in lucem exiit P. Sacherii Jesuitae Neostatica, agens de motibus acceleratis, sed hypothesibus utitur a Galilaeanis multum differentibus; nam statuit velocitates mobili quovis instanti superadditas esse distantiis mobilis a centro telluris, quo omnia corpora tendere supponit, proportionales; videtur hic auctor Ideas suas praecipuas ex Newtoni Principiis desumsisse, librum tamen nondum examinare qua par est attentione vacavit. Nihil aliud novi in re literaria; si interea Italia quid curiosi

in rebus philosophicis aut mathematicis producet, non deero iis in tempore communicandis Hisce paucis deproperatis manum de tabula retraho, me tamen indesinenter profiteor etc.

Patavii die 28 Novembr. 1709.

LIII.

Hermann an Leibniz.

Patavii d. 13. Febr. 1710.

Doleo, quod responsoriae Tuae, Illustrissime Vir, quarum in postremis Tuis meministi, ad me non pervenerint, cum e contra omnes meas ad Te delatas videam. Quod ad subdubitationes meas attinet, quas in praecedentibus meis protuleram, libens agnosco eas tanti non esse, ut doctrinae Tuae virium centrifugarum et centripetarum quicquam de certitudine detrahere possint, quod exemplo pereleganti eoque satis apposito luculenter ostendis; unde factum, ut meae difficultates jam evanuerint, perspecto insuper egregio concentu theoriae Tuae cum iis, quae ex Hugenianis repertis memoriae prodita sunt.

Quod ea, quae nuperrime circa Curvas se mutuo alternatim evolventes, quasque fortasse Amicabiles vocare liceret, protuli, non displicuerint, est quod mihi gratuler. Has, inquam, curvas quae se mutuo sui evolutione describunt, amicabiles nomino, perinde ac illi numeri ab Arithmeticis hoc vocabulo insigniuntur, quorum partes aliquotae in unum additae non quidem datos numeros, quorum partes aliquotae adduntur, sed alternos restituunt. Interea non inficias ibo me in praecedentibus meis rem omnem satis imperfecte proposuisse, nam verissimum est, quod observasti, non sequi tertiam curvam, quam congruere supponebam primae, secundae quoque congruere debere, quamquam caeteroquin assertum verum sit, ut nunc Geometrice id demonstrabo. Sit ergo (fig. 62) prima curva RPL, quae sui evolutione secundam LHC, et haec tertiam CDA describere intelligatur. Si prima et tertia congruunt, etiam secunda CHL congruet primae RNL vel tertia CDA, atque adeo hae curvae non solum amicabiles sunt, sed perfecte aequales. Ad demonstrationem hujus propositionis sequenti utor lemmate.

Si in duabus Curvis ABM et abm (fig. 61) sumtis quibusvis arcubus aequalibus AB et ab, ductisque per terminos B, b tangentibus BD, bd, anguli DBC, dbc comprehensi tangentibus et ordinatis ubique aequales sunt, ipsae curvae ABM et abm sibi mutuo congruunt. Et si loco arcuum aequalium AB et ab arcus utrinque accipiantur in data ratione, et anguli DBC et dbc semper aequales existant, curvae ABM et abm similes sunt.

Hoc posito, si curvae ADC et LNR (fig. 62) congruunt, sequitur omnes lineas CR, qQ, EP, DN, quae connectunt arcus aequales AC, LR; AE et LP etc. tum parallelas esse, tum aequales ipsi AL. Unde ductis per puncta quaevis q, E, D rectis qH, EI, DK perpendicularibus curvae ADC et per totidem puncta prioribus respondentia in prima curva Q, P, N rectis QH, PI, NK tangentibus curvam, quae prioribus perpendicularibus ad curvam ADC occurrent in punctis H, I, K etc. quae ex hypothesi sunt in Curva CHL. Jam vero anguli perpendicularium curvae ADC et parallelarum ipsi AL eo majores sunt, quo propiores fuerint eorum vertices puncto ultimo C; nam RCB est rectus, sequens vero QqH acutus quidem, sed major quam angulus PEI, et hic major adhuc est angulo NDK, et tandem angulus fit nullus, quando DN coincidit cum AL. Hoc sequitur, quia curva ADC cava est versus eandem rectam CB vel AB. Si jam angulus PEI statuatur semirectus, erit $EI = PI$, vel curva $PNL =$ curvae IHC, et angulus $EIT =$ ang. TIP vel alterno IPW. Porro rectae qQ et DN ita ductae intelligantur, ut anguli QqH et NDK simul aequales sint recto, hoc est ut unus horum angulorum alterius complementum sit ad rectum: atque hinc ambo triangula rectangula QqH et NDK propter hypotenusas aequales qQ et DN aequalia sunt et similia; unde $qH = NK$, hoc est curva $CH =$ curvae NL, et angulus $qHG =$ angulo KNO; et sic infiniti alii arcus aequales in curvis CIL et LNR sumi possunt ita, ut anguli tangentium et ordinatarum per puncta contactus utrinque constanter aequales sint. Unde per Lemma superius curva CHL congruit curvae LNR vel aequali ADC. Q. E. D. Calculum quoque pro curvis hujusmodi multum contraxi, cum is unica analogia perficiatur, in qua ne quidem secundorum differentialium aut expressione radii

osculi opus sit. Nam vocando AL vel $DN = 2a$, $AF = x$, $DF = y$, $AD = s$, $D\delta = dx$, $Dd = ds$, fient triangula $Dd\delta$ et DNK similia, et cum NK sit $=$ NL, hoc est per hypoth. $=$ AD, erit $NK = s$, adeoque $Dd\,(ds) : D\delta\ (dx) = DN\,(2a) : NK\,(s)$. Hinc $sds = 2adx$, et $ss = 4ax$. Unde constat solam Cycloidem se inverso situ sui evolutione generare.

Analysis pro curvis similibus parum differt a praecedenti. Si (fig. 63) Curva LNR sui evolutione describens curvam LKC, similis sit curvae ADC descriptae evolutione secundae CKL, eodem fere modo ac prius probari potest, omnes tres eas curvas similes esse; unde lineae AL, DN, CR, quae supra parallelae erant, nunc concurrere debent in quodam puncto Z, rectae vero omnes AZ, DZ, CZ ductae ex punctis quibusvis curvae ADC secabuntur a curva LNB in data ratione. Unde vocando $AZ = a$, $LZ = b$, $AL = c$, DZ vel $FZ = y$, $AD = s$, $Dd = ds$, $D\delta = dy$, et $d\delta = dx$, erit $DN = \frac{cy}{a}$ et arcus $LN = NK = \frac{bs}{a}$. His positis, triangula similia $Dd\delta$ et DNK dant aequationem $bsds = -cydy$ et $bss = aac - cyy$. Atque hinc elicui $dx = dy\ \sqrt{(ayy - aab, :, a^2b - by^2)}$ (A). Hanc aequationem esse ad Epicycloidem, cujus diameter AB circuli generatoris AMB sit aequalis $a - \sqrt{ab}$, et $BZ = \sqrt{ab} =$ radio circuli immobilis, sic ostendo. Ponatur Epicyclois quaedam ADC, cujus Basis BC arcus circuli descripti centro Z intervallo $BZ = m$, et circulus generator AMB, sintque ut prius $DZ = FZ = y$, $AZ = a$ etc., aequatio differentialis Epicycloidis erit: $dx = dy\left(\frac{a}{m}yy - am\right) : \sqrt{(-aamm + (aa + mm)yy - y^4)}$ (B). Jam prima aequatio (A), multiplicando terminos fractionis surdae, per numeratorem $\sqrt{(ayy - aab)}$, factisque debitis reductionibus, mutatur in $dx = dy\left(\frac{a}{\sqrt{ab}}yy - a\sqrt{ab}\right) : \sqrt{(-a^3b + (aa + ab)yy - y^4)}$ (C). Jam si loco $\sqrt{ab}$ ponatur m in hac ultima aequatione, aequatio (C) plane coincidet cum aequatione (B), quae est aequatio differentialis Epicycloidis. Ergo etiam (A) est aequatio Epicycloidis, ut dictum est. Atque hinc iterum constat solas Epicycloides sui evolutione sibi similes curvas describere.

Quantum ad curvam se ipsam directe evolventem attinet, talis erit omnis ea, cujus radius osculi aequalis est curvae data linea auctae. Quod facile ostenditur. Sint duae curvae AB et CD, quarum illa describatur evolutione hujus, ita ut ambae sibi mutuo congruant. Si arcus CD (fig. 64) ubique aequalis est arcui AB, et cum ex natura evolutarum angulus quoque FDB constanter aequalis sit angulo GBE, manifestum est per superius Lemma, curvam CD congruere alteri AD; adeoque si radius osculi BD curvae AB fuerit $= AB + AC$, curva AB producetur evolutione curvae sibi aequalis. Et si curva CD ubique aequalis est alteri AB, erunt coordinatae CF, FD aequales coordinatis AE, EB. Adeoque vocando $AC = a$, $AE = CF = x$, $BE = FD = y$, erit $BM = x + y$ et $MD = HD - HM = a + y - x$. Erit ergo $B\beta\,(dx) : b\beta\,(dy) = BM\,(x + y) : MD\,(a + y - x)$; unde $xdy + ydy = adx + ydx - xdx$ aequatio differentialis curvae AB, in qua si indeterminatae cum suis differentialibus separari poterunt, habebitur constructio curvae quaesitae; hanc vero separationem nondum obtinere potui. Si radius osculi BD ponitur aequalis curvae AB + data AC, habetur aequatio ubi differentialia separata sunt, sed nascitur aequatio transcendens secundi gradus.

Tentavi etiam Problema inversum Virium centripetarum, quod adhuc intactum remansit, inveniendi nimirum curvas illas, in quibus mobilia habeant Vires centripetas juxta datam legem progredientes, ut juxta reciprocam rationem quadratorum distantiarum a centro directionis; nonnulla jam assecutus mihi videor, de quibus fortasse fusius agam in Schediasmatis Actis vestris Berolinensibus inserendis, si modo tanti videbuntur tenues speculationes meae. Hisce vale etc.

LIV.

Hermann an Leibniz.

Novem jam elapsi sunt menses et amplius, ex quo postremas meas ad Amplitudinem Tuam dedi, easque Hanoveram curandas Dn. Zanovello commendavi, sed de literarum mearum fato incertus, quia nullae interea responsoriae Tuae, Illustrissime Vir, ad me sunt perlatae, a me impetrare non potui, ut Tibi cultum meum et observantiam deferendi longiores moras necterem, maxime sub auspiciis hujus anni, quae Tibi frustra apprecor et laeta, et faxit Deus O. M. ut haec Te salvo et incolumi saepius recurrant, quod non meorum solum, sed universae Literatorum turbae votorum summa est. —

Plures jam praeterfluxerunt menses, ex quo P. Guidonis Grandi libellus de Infinitis Infinitorum prodiit, adeo ut vix dubitem, quin ejus contenta Tibi jam innotuerint. Versatur praecipuus egregii Viri labor, ut Hyperbolarum altiorum spatia plus-quam Infinita Wallisii contra Dn. Varignon, qui haec tamquam contradictionem involventia in Actis Academiae Regiae explodere visus erat, geometricis demonstrationibus evincat, nam reliqua aliud non continent, quam lineares demonstrationes principiorum calculi Tui differentialis, quibus quantitates aliis infinities minores abjiciuntur, arcus curvarum infinitesimi pro lineolis rectis habentur etc. Operi poëticum proemium praemisit, quo initia, progressum, et praesentem statum scientiae infinitorum historica narratione persequitur. Praeter hoc opusculum P. Grandi, opus postumum de Principio Sulphureo Dn. Gulielmini, et Cl. Ramazzini Diatribam De Principum Valetudine tuenda, nihil fere notatu digni in Italia ab aliquo tempore in lucem venit. Si meorum qualiumcunque conatuum meminisse fas est, etiamnunc circa opusculum meum Mechanicae fluidorum, quod ob alia negotiorum impedimenta ab aliquo tempore huc ferme usque intermittere debui, occupatus jam sum, speroque fore, ut ineunte proximo Martio prelum subire possit. In hoc meo Tentamine, expositis generalibus fluidorum et liquidorum corporum affectionibus et praemissis nonnullis lemmatis ex Mechanica solidorum depromptis, considero primum gravitationes liquorum in vasis rigidis, harumque pressionum assigno medias directiones et centra pressionum, ex quibus dein tamquam corollaria omnia elicio, quae circa aequilibria liquorum et solidorum in liquoribus tradi solent: et prae circa regulas inde derivo pro determinandis firmitatibus tuborum requisitis ad superandas liquoris pressiones. Dehinc contemplor pressiones liquorum in vasis flexibilibus, et hac occasione Problematis de curvatura lintei generalem profero solutionem absque ullo calculo solaque geometria lineari. Postea evolvo ea, quae ab aëris gravitate et elasticitate proveniunt atque unico theoremate binas propositiones 21 et 22 lib. 2 Princ. Phil. Nat. Math. Dn. Newtoni complector, utpote quo ostendo, qua lege densitates aëris in diversis a terra distantiis variari debeant, quacunque demum lege corporum pondera in variis illis distantiis variari ponantur. Sed quia tamen hoc theorema particulari hypothesi elasticitatum aëris densitatibus proportionalium innititur, universalissimum subjungo theorema aliud, quod generaliter densitates aëris in Atmosphaera assignat, quaecunque demum relatio inter elaterem aëris ejusque densitates intercedere possit et gravium pondera in diversis a terra distantiis variari fingantur. Et cum viderem in Commentariis Academiae Gallicae Scientiar. Dn. Maraldum statuere, decrementa Mercurii in barometro 1, 2, 3, 4 etc. linearum contingere in altitudinibus supra horizontem (ubi argentum vivum in altitudine 28 digitor. suspensum haerere asserit) 61, 61+62, 61+62+63, 61 + 62 + 63 + 64 etc. ped. hancque progressionem observationibus satis accurate quadrare; theorema meum novissimum huic progressioni applicare volui et reperi in ultimis atmosphaerae confiniis seu in hypothesi hac Maraldiana in distantia ab horizonte 12796 hexapodarum, aërem paulo magis quam secuplo rariorem esse quam in horizonte, ubi mercurius in barometro est 28 digitorum. Ibi enim densitas aëris est ad densitatem in horizonte ut 121 ad 793. Excussis sic omnibus, quae ad pressiones liquorum spectant, progredior ad Mensuras liquorum fluentium, quam doctrinam libro secundo trado, in hoc enim Cl. Gulielmini reperta ad praxin faciliora reddere conor, atque loco tabularum illarum ad calcem illius Mensurae aquarum fluentium positarum, dumtaxat parametrum alicujus Parabolae mensurae quaesitae inservientis invenire doceo, quo invento absque tabularum illarum usu mensuram aquae fluentis per quamlibet sectionem ope logarithmorum facile obtineri ostendo; simulque alia nonnulla ad fluminum cursus spectantia pluribus expendo. Libro tertio tracto quicquid ad percussiones liquorum pertinet, et fusius in hoc examino motus corporum in mediis fluidis et resistentibus methodo diversa a Newtoniana et Varignoniana, supponendo primum densitatem medii ubique eandem esse, qua suppositione posita, geometricis demonstrationibus ostendo pleraque, quae a Newtono alia ratione ostensa sunt; postea considero densitates medii variari motusque ex hac hypothesi nascentes determino simulque invenio, qua ratione densitates medii variari debeant, ut corpora eadem accelerationis lege ac in vacuo descendere possint; dehinc varia tracto problemata circa motus projectorum in ejusmodi mediis, ut Data vi centripeta invenire medii densitates, ut mobile projectum data illa vi curvam datam decurrere possit; vel etiam Invenire vim centripetam, ut mobile medium resistens trajiciens, cujus in singulis locis notae sint densitates, vis illius actione datam itidem curvam describat. Hisce peractis pluribus ago de resistentiis, quas Solida

corpora in fluidis lata, a suis figuris patiuntur, de figura seu curva velaria, cujus solutionem et demonstrationem etiam absque calculo algebraico trado, sed simplici demonstratione lineari; denique etiam motus navium expendo harumque celeritates, medias directiones et navium declinationes ope principiorum hactenus a me expositorum generaliter definio. Atque tandem opusculo finem impono examine motuum circularium fluidorum. Haec praecipua sunt meditatiunculorum mearum argumenta, quibus prolixius enarratis haud dubie taedio Tibi fui, cujus proinde est, ut veniam deprecer etc.

Patavii die 11. Jan. 1711.

LV.

Hermann an Leibniz.

Post nonnullas literas, quas ad Amplitudinem Tuam dedi, cum nullas responsorias licet multo tempore jam expectatas accepissem, alias jam superiori Januario exarandas duxi, quas ad Celeberr. nostrum Bernoullium direxi, persuasus eas Tibi certo redditum iri; eas tamen nondum apud Te appulisse nec postremas ex antecedentibus meis, ex humanissimis Tuis 4 Martii*) his diebus ad me perlatis non obscure mihi patuit, quod quidem valde dolui aliquandiu, sed subito post ex iisdem doloris lenimen percepi, utpote quae et eae Cl. Wolfii, quae praecesserunt, occasionem mihi ostendunt, fore ut copia tandem mihi fiat .... tantum Patronum meum et Fautorem, qualem Te multas ob causas suspiciendum semper et observanter colendum habui, ex quo abdicatione Dn. Sturmii Francofurtanam Professionem mihi decretum iri spem injiciunt. Dn. Wolfio jam respondi me ultro stationem accepturum esse, modo a Proceribus meis abeundi veniam obtinuero, quoniam a sexennio, ad quod hi Professores Patavini adstringuntur, biennium adhuc mihi explendum restat, quanquam non dubitem, me eam facile impetraturum esse. Caeterum gratias Tibi ago maximas pro cura, qua rem meam gerere dignaris, cum praesertim in hoc negotio novae vocationis, tum etiam in aliis multis, et certo asse-

*) Dieser Brief ist nicht vorhanden.

verare ausim, unam ex praecipuis rationibus, quibus inductus sim, ut ad vos propius accedere cogitem, hanc esse, quod perspiciam, novam hanc migrationem studiis meis mirum quantum proficuam futuram esse, cum frequentius et facilius de studiis meis et conatibus utcunque tenuibus Tecum conferre, majusque in iis lumen accipere possim. Et aliquid de meis nunc lucubrationibus subjungam, quoniam id jubes; etiamnunc in perpoliendo meo opusculo fluidorum occupatus distineor, quod fortasse jam praelis commissum esset, nisi lemmata nonnulla curiosa, imprimis vero admirabilem Tuam scientiam dynamicam demonstratam, addenda duxissem, ut ostenderem, quam multa sequantur ex principiis paucis iisque simplicissimis; nam ex eodem principio deduco quicquid proponi potest circa motus acceleratos gravium, sive moveantur in vacuo sive in medio resistente, tum etiam universam theoriam Centri oscillationis modo diverso a Bernoulliano a vectis consideratione petito. Multa alia recensere possem hanc ad rem attinentia, sed quia forte nonnulla se mihi objiciunt impedimenta, hisce plura addere non licet. Hisce vale etc.

Patavii 9. Aprilis 1711.

LVI.

Hermann an Leibniz.

Recte quidem ad me perlatae sunt literae Tuae 4 Martii Berolini datae, sed nescio an responsoriae meae 9 Apr. datae Tibi, Illustrissime vir, redditae sint, quibus gratias Tibi agendas habui maximas, quod mihi nihil tale merenti nec cogitanti stationem Francofurtanam Cl. Sturmii abdicatione vacantem procurare dignatus es.

Quod ad studia mea attinet, etiamnunc in perpoliendo opusculo meo Mechanicae fluidorum versor, quod quidem in his oris prelo subdere antehac mecum constituebam, priusquam de negotio Francofurtano mihi quicquam innotuisset, sed postea mutavi sententiam, ideo quod sperem fore, ut judicio Tuo et examini submittere possim ante ejus impressionem. In eo multa praemitto lemmata ex staticis desumta, inter quae Novam Tuam Scientiam

Dynamicam circa aestimationem virium corporum penes moles eorum et quadrata velocitatum conjunctim, aliqua diligentia stabilire conor, nec spero irrito conatu. Ex qua indagine id utilitatis cepi, ut ex unico simplicissimo principio non solum quicquid circa motus acceleratos in qualibet imaginabili gravitatis hypothesi proponi potest, sive corpora descendunt in vacuo sive in mediis quomodocunque resistentibus, facili negotio deducam, sed etiam universam theoriam Centri oscillationis modo diverso ab Hugeniano et Bernoulliano, tametsi conclusiones meae cum iis, in quas eximii hi Geometrae inciderunt, examussim conspirent etc.

Patavii d. 2. Junii 1711.

LVII.

Hermann an Leibniz.

Binas literas meas Amplitudini Tuae redditas esse ex postremis Tuis humanissimis laetus accepi. Statim post penultimas Tuas ad me perlatas Dn. Zanovellam rogavi, ut pyxidulam ut jussisti per tabellarium ordinarium ad TE curare vellet, quod paucos post dies se praestitisse rescripsit, adeo ut nullus dubitem, quin desideratum jam acceperis.

Deinde multo cum gaudio ex TE intelligo, Tua me sententia commode residuum temporis praesenti meae stationi praestituti absolvere posse, TEque pro insigni Tua erga me benevolentia curaturum, ut dilatae profectionis meae causae apud Berolinenses Ministros insinuentur, adeo ut, quod mihi pergratum est, securus pensum meum absolvere hoc loco possim. Hac itaque de re gratias ago maximas, quod non levem scrupulum, quem Dn. Wolfii literae celerem discessum urgentes mihi injecerunt, eximere voluisti, et pro literis, quas in junioris Dn. Bernoullii gratiam ad Illustrissimos Trevisanum et Guerinum dare dignatus es, quas hac aestate cuique suas praesens tradam proficua ipsos circa Bernoullii negotium consilia rogaturus. Caeterum etiam Dn. Nic. Bernoulli et Celeb. ejus Patruo significavi non abs re fore, si hydraulicis rebus, praesertim aquarum currentium legibus meditandis nonnihil laboris impendat, utpote rei Proceribus meis apprime commendatae et procul dubie in novo Mathematico vocando desideratae. Unde non male faceret, si juxta monitum Ampl. Tuae ad Batavos excurreret, rem illic aggerariam et aquatica opera inspecturus, nullumque est dubium, quin ipsi hoc studium pulchre successurum sit, ubi experientiam meditationibus praemiserit.

Non me latet Cel. Joh. Bernoullium olim Dynamica Tua apud Cl. Volderum fortiter propugnasse ipsumque in partes nostras traxisse, eleganti argumento a posteriori usum, cujus in Tractatu meo et Tuorum fusius mentionem faciam, quia Bernoullianum ratiocinium ex compositione motus desumtum nunquam adhuc in publicum prodiit, adeo ut vere dixerim, neminem adhuc de Dynamicis Tuis stabiliendis publice egisse. Demonstratio mea directa fundatur in jam passim noto theoremate mechanico infiniti prorsus usus, sed parum adhuc adhibito, quod scilicet Areae Curvae sollicitationum proportionales sint quadratis ordinatarum figurae celeritatum ex continua ejusmodi sollicitationum successione ortarum, ut si mobile A (fig. 65) aequabili motu celeritate EF ex E feratur versus Q, et alia vice celeritate GK ex G ibidem in Q, erit vis mobilis A celeritate EF ad vim ejusdem sed celeritate FK, ut $\overline{EF}^2$ ad $\overline{GK}^2$. Intelligatur enim mobile exiens ex A in singulis punctis rectae AE affici sollicitationibus versus Q directis et per ordinatas A_2A, B_2B, C_2C etc. figurae A_2A_2EE expressis. Jam vis absoluta mobilis in E est ipse nisus vivus, qui ex omnibus sollicitationibus, quibus urgetur, dum ex A venit in E, vel ex ejusmodi sollicitationum continua replicatione aut successione provenit, Nisus vero ex sollicitationibus hisce oriturus erit ut area A_2A_2EE figurae sollicitationum, quod facile est probatu; unde revera area A_2A_2EE exponit nisum vivum seu vim corporis in E, in quo acquisivisse intelligitur celeritatem EF, quacum si deinceps moveri intelligatur absque succedentium sollicitationum novis impressionibus, aequabili motu feretur. Pari ratione mobile A vim habebit in G, ubi celeritatem GK acquisivisse supponitur, exponendam area A_2A_2GG, prout id fusius ostendo in meo Tractatu; et quia EF, GK sunt ordinatae scalae seu curvae velocitatum AFK mobili acquisitarum illis sollicitationum replicationibus, et Newtonus demonstravit areas A_2A_2EE, A_2A_2GG proportionales esse quadratis ordinatarum EF et GK, sequitur vim absolutam et plenam corporis A cum celeritate EF esse ad vim ejusdem habentis celeritatem GK, ut quadratum EF ad quadratum GK.

Hoc idem eleganter etiam confirmatur per regulas motus ex

percussione. Nam si globus elasticus A cum celeritate 4 impingatur in quiescentem se septuplo majorem 7A, ei imprimet celeritatem 1, et regredietur priore sua celeritate uno gradu imminuta seu ut 3, quacum impingatur secundo in globum quiescentem 5A, tertioque cum residua post hunc impactum velocitate 2 in quiescentem 3A, et denique residua celeritate post tertium impulsum 1, impellat quarto globum quiscentem A aequalem impellenti, singulisque globis 7A, 5A, 3A, A celeritatis gradum imprimet, ipse vero post quartum ictum ad quietem redactus erit adeoque tota ejus vis quatuor hisce impulsibus consumta; et quia globi impellentis ictus excipientes aequiveloces facti sunt, eorum motus sunt effectus violenti homogenei, quibus simul sumtis aequivalebit vis globi A celeritate 4. Unde hujus vis tanta est, quanta vis globi 16A singulis 7A, 5A, 3A, A aequivelocis et universis aequalis, sed vis globi 16A cum celeritate 1 est ad vim globi aeque velocis 1A, ut 16 ad 1, ergo vis globi A cum celeritate 4 est ad vim ejusdem cum celeritate 1 ut 16 ad 1 seu in duplicata proportione velocitatum.

Novi quidem Dn. Scheuchzerum in suis Itineribus Alpinis montium altitudines Barometro explorare solere, sed optandum esset ut observationes ejus cum altitudinibus aliunde certo compertis conferre liceret ad perfectionem hujus modi altitudines investigandi in praxi omnium facillimi. Experimenta fateor dissentire a Tabulis, quas Cassinus junior in Actis Parisinis prodidit, sed etiam has tabulas dissentire comperi a numeris qui ex hypothesi ordinaria Mariotto adhibita provenire debent, qui tamen saepe satis egregie cum observationibus conspirare mihi visi sunt, adeo ut nullus dubitem, quin hypothesis sua duplicis in aëre partis comprimibilis et incomprimibilis eleganter usui accomodari possit, quod saltem aliquando tentabo.

Ridicula plane est P. Grandi ἀβλεψία existimantis infinita nihila absoluta aggregare posse quantitatem datam, cujus paralogismum notasti, data eleganti aenigmatis solutione. Ab amico rogatus statim post Marchettianae epistolae publicationem, Grandiani erroris fontem detexi, ostendens Grandium perperam seriem suam $bV - bV, + bV - bV, + bV - bV$ etc. instar seriei convergentis tractasse, cujusmodi series erat, quae in Prop. VII extat, ex qua lepidum hoc suum Corollarium deduxit. Nam in figura ejus hic (fig. 66) resumta, existente curvae JDS ordinata $DP = GK$, et abscissa $GD = KP = LJ = KJ^2 : GJ^2$, quae in seriem conversa sit $= GV - G1$,

$+ G2 - G3, + G4 - G5, + (G5.KJ^2 : GJ^2)$. Jam si series convergens est, quod fit, cum GK minor quam VK, fractio $G5.KJ^2 : GJ^2$ abjici potest propter aliquam, ut G5, quavis data minorem, et habebitur praecise series, quam Prop. VII dedit; sed coincidente YG cum bV et GJ cum VJ, tantum abest ut fractio $G5.KJ^2 : GJ^2$ contemni debeat, ut potius tota series aequalis fiat huic fractioni, quae tunc erit $bV.KJ^2 : VJ^2 = \frac{1}{2} bV = VS$, elidentibus se mutuo omnibus terminis ipsam praecedentibus $bV - bV, + bV - bV$ etc. ipsorum numero existente pari; sed si impar fuerit adjecto adhuc termino G6, seriei summa erit $= bV - (bV.KJ^2 : VJ^2) = \frac{1}{2} bV$, ut prius, destruentibus se mutuo omnibus terminis, qui $bV - (bV.KJ^2 : VJ^2)$ praecedunt. Certe ejusmodi ridiculum Corollarium aptius est ad labefactandam mysteriorum fidem et prostituendam profundiorem Geometriam, quam ad easdem illustrandas.

Analysis mea Curvarum Paracentricarum ita habet in compendium redacta. Sint (fig. 67) GAN Paracentrica, AR directio jactus et DR ipsi perpendicularis ex centro sollicitationum D, sintque $DR = b$, celeritas jactus secundum $AR = c$, coordinatae curvae $DQ = x$, $QN = y$, $DN = z = \sqrt{xx + yy}$. Sollicitatio in curvae puncto $N = f$ et in eodem mobilis velocitas $= u$, Dq perpendicularis ad tangentem curvae $Nq = p$, arcus $PO = \Theta$, ejusque radius $DP = r$, Nn sit elementum curvae, et pn arculus centro D descriptus $= zd\Theta : r$. Triangula similia Npn et NDq praebent $d\Theta = - prdz : z\sqrt{zz - pp}$; verum est Cel. in $A_2 (c)$: Cel. in $N(u) = Dq(p) : DR(b)$, unde $p = bc : u$, quod in praec. aequ. substitutum dat $d\Theta = - bcrdz : z\sqrt{uuzz - bbcc}$ (1), quod pono $= d\sigma : n$, existente n quolibet numero positivo rationali; hinc $d\Theta = d\sigma : n$, et $\Theta \pm q = \sigma : n$. Idcirco quoties σ est arcus circuli similis cuidam arcui TPO, ejusque radius ad hujus radium ut 1 ad n, id est ut numerus ad numerum, Problema est Algebraicum. Pono igitur $d\sigma : n = - rdt : n\sqrt{rr - tt}$, ubi $t = \frac{+}{+} e \frac{\mp}{+} A$, et e constans, A vero quantitas quaelibet data in z et constantibus, unde aequatio (1) fiet $bcrdz : z\sqrt{uuzz - bbcc} = rdt : n\sqrt{rr - tt}$; atque hinc elicitur sequens $uu = bbcc : zz$, $+ (ss \pm 2eA - A^2)\, nnbbcc : B^2 z^4$ (2), existente $ss = rr - ee$ et $B = dA : dz$. Differentiando deinde aequationem (2), loco zudu ponendo $-2fdz$, cui aequale est, dividendoque per $-2dz$, habebitur denique generalis formula $f = b^2c^2 : z^3, + (2s^2B + s^2zC \mp ezB^2 \pm 4eBC \pm 2ezAC + zAB^2 - 2A^2B - zA^2C)\, n^2b^2c^2 : B^3z^5$, existente $C = dB : dz$. Generalis curva,

cui haec formula competit, elicitur ex aequatione $\Theta \pm q = \sigma : n$ vel .... constante $\pm q$ quae duntaxat curvae axem diversificat, $\Theta = \sigma : n$; vel $\nu\Theta = \mu\sigma$, posito $1 : n = \mu : \nu$. Nam $\sqrt{rr - tt}$ est sinus rectus arcus σ, et $t = \frac{+}{+} e \frac{\mp}{+} A$ sinus complementi, unde vocando ejus secantem S et tangentem T, erit $S = r^2 : \frac{+}{+} e \frac{\mp}{+} A$, et $T = \sqrt{SS - rr}$. Unde per canonem pro multisectione arcus per secantes et tangentes, erit secans $\mu\sigma = S^{\mu} : (r^{\mu - 1} - 2ir^{\mu - 3} T^2 + 4ir^{\mu - 5} T^4 - 6ir^{\mu - 7} T^6 + \text{etc.})$, ubi $2i = \frac{n.n-1}{1.2.}$, $4i = \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}$; $6i =$ etc. Arcus Θ vel PO tangens est $ry : x$, et secans $= rz : x$, unde arcus $r\Theta$ secans erit

$= rz^r : (x^r - 2kx^{r-2} yy + 4kx^{r-4} y^4 - 6kx^{r-6} y^6 + \text{etc.})$, ubi $2k = \frac{r.r-1}{1.2}$, $4k = \frac{r.r-1.r-2.r-3}{1.2.3.4.}$, $6k =$ etc. Et quia arcus $r\Theta$ et $\mu\sigma$ aequales sunt, secantes eorum etiam aequabuntur, atque hinc elicio generalem curvae aequationem $S^{\mu}.(x^r - 2kx^{r-2} yy + 4kx^{r-4} y^4 - \text{etc.}) = rz^r.(r^{\mu} - 2ir^{\mu-3} T^2 + 4ir^{\mu-5} T^4 - \text{etc.})$. Quae semper finito terminorum numero constabit, quoties numeri μ, r fuerint integri et rationales.

Haec, ut mandatis Tuis obtemperarem, proferre debui. Haec methodus fortasse in aliis quoque utiliter adhiberi poterit.

Jam per diversos in Autores historicos quos petiisti inquiri curavi, sed nihil adhuc de iis rescire potui, nec quicquam novi in re medica, Physica aut Mathematica ab aliquo tempore prodiit, quod communicare possem vel indiculum mittere. La Galeria di Minerva suo tempore in Germaniam mecum deferam. Hisce vale etc.

Patavi Postrid. Cal. Jun. 1712.

LVIII.

Leibniz an Hermann.

(Im Auszuge)

Iterata vice Tui causa ad Berolinenses scripsi, nec contradici video. Quae per Dn. Zanovellam misisti, mea ut arbitror culpa corrupta advenere, credo quod calores jam increvissent. Debueram petere maturius. Quantum memini, non expressisti, quandonam ex compacto finiatur pensum Tuum Patavinum. Putem Te non tantum posse, sed et debere jam nunc significare Curatoribus Academiae, discessum tempore expleto Tuum imminere, ut mature prospicere Academiae de successore possint. Rationes facile suppeditabunt domesticae res Tuae, monita paterna, alia id genus. Simul suggeres amicum Tuum viris insignibus, Querino et Trevisano faventibus, ut spero: juvante nomine et ipso quod commendabis studio ejus rei aquilegiensis.

Probatione illa vel confirmatione Dynamices meae quam Dn. Bernoullius petiit ab ictu obliquo, ego quoque dudum usus eram, imo illa consideratio inter primas fuit, quae me ad rem inveniendam juvit, cum Parisiis juvenis in Pardiesii libello de Motu legerem; quae ille habebat de ictu hujusmodi obliquo, obiter attulerat. Sed vereor ut ea via quam ingressus es ad demonstrationem mei principii pervenire possis. Sit celeritas unius ejusdemque mobilis c, solicitatio quarum aggregatum est, erit dc. Vires (ex meo principio) sunt ut quadrata celeritatum seu v ut cc, ergo elementum virium dv ut cdc. Sit spatium seu longitudo percursa l et tempus t, constat esse dl ut cdt. Ex Tuo vero schemate, elementum virium dv est velut trapezium ${}_2C_2EE$ seu ut dc dl, hoc ergo si est ut c dc, dl erit ut c, quod est verum positis dt constantibus. Vera igitur doctrina Tua, quod dv est ut dc dl, seu quod elementa virium sint in ratione composita ex rationibus elementorum celeritatis et elementorum spatii, positis elementis temporis aequalibus, et demonstrari potest, si assumatur vires esse ut dixi. Sed si contra ex doctrina Tua velis demonstrare meam, demonstrandum Tibi erit aliunde, esse dv ut dc dl, positis dt constantibus, quod qua ratione praestare possis a priore, sine principiis metaphysicis quibus ego utor et quae olim ad Dn. Joh. Bernoullium perscripsi, curiose spectabo, ubi aperueris. Principia etiam metaphysica mea, veros hujus doctrinae fontes, Tecum lubens communicabo, sed quorum in gratiam nonnihil meditandum est mihi, magis enim in schedis quam in memoria habeo, etsi meditatione semper recuperare possim, citius etiam quam quaerere schedas, quae in Oceano chartarum natant. Accuratius loquendo dicerem esse dv ut dc dl : dt, quia dv est ut cdc, et c ut dl : dt. Suaserim si permittis dynamica tentamenta ad mentem meam non immisceri Operi Hydragogico, sed praemitti peculiari opera, possemque mittere aliquid, a Te (si

videbitur) amplius deducendum et illustrandum. Regulae quidem percussionum per omnia conspirant. Ostendi olim, nisi haec aestimatio observetur, habiturum iri motum perpetuum; item assumo eandem quantitatem virium servari, si nihil accidentalibus (ex. gr. mollitie materiae) absorbeatur.

Grandius et Tuus ille Antagonista non videntur satis profecisse in nostra Analysi, idque ut spero, si noscatur ab intelligentibus, Dn. Nic. Bernoullio proderit. Interim dispiciendum erit, an non juvenes ingeniosi apud Italos, sed qui simul sint bonae mentis, nec ingrati inflatique ut illi, his nostris initiari possint. Pro commmunicata analysi pulchra paracentrici theorematis Tui gratias ago.

Hypothesis massae aëreae ex comprimibili et incomprimibili compositae in calculos tabulasque Tuo (si quando vacabit) studio referri meretur. Mihi id vel ideo gratissimum foret, quia de Hercyniorum montium altitudine utcunque hinc conjectanda cogitamus.

Velim nosse quid Grandius responderit, si admonitio Tua ad eum pervenerit. Dn. Wolfius mea nuper Tibi perscripta longius protulit peringeniose.

LIX.

Hermann an Leibniz.

Nullus dubito, quin literae meae 2 Junii Ampl. Tuae redditae fuerint, interea ego Mens. Apr. Actor. vidi atque in eo solidissimam Tuam annotationem in Responsionem Cl. Varignonii ad Libr. P. Grandi de Infinitis Infinitorum; et sane verissima sunt quae illic de Infinito et Infinite parvo mones, talia non nisi quantitates fictas esse, sed quae ad veritatem ducant atque ideo toleranter veras existere. Hisce demum diebus Amicus quidam mutuo mihi dedit excellentissimum Opus quod inscribitur, Essais de Theodicée sur la Bonté de Dieu, la liberté de l'Homme et l'origine du Mal, quod a pluribus Patriciis Venetis cum admiratione lectum esse accepi; tametsi tantum obiter id perlustrare potui, utpote paulo post possessori restituendum, id tamen tanto me lumine perfudisse confiteri teneor, ut nusquam paria me visurum existimen, nisi qui librum transcribere velit. Uno verbo, nihil unquam ejus praestantiae circa materias difficillimas me legisse assero. Nodus Liberi et Necessarii ibi quantum humanitus sperari poterat, solutus videtur, adeo ut alter philosophicus circa Continuum et Indivisibilia adhuc extricandus videatur.

Circa Historicos Neapolitanos a Porcacchio editos et Historiam Gentis Malespinae cum ipse inquisivi ubique, tum ab aliis inquiri curavi, sed hactenus nihil de his Autoribus rescire potui. Plura, ne taedio sim, non addam. Vale etc.

Patavii d. 7 Julii 1712.

LX.

Hermann an Leibniz.

Gratias ago maximas, quod altera vice mei causa ad Berolinenses scribere dignatus es. Putabam me jam in aliqua ex praecedentibus meis significasse, pensum hoc meum Patavinum finitum iri die 28 Aprilis anni futuri 1713.

Quod ad Systema Tuum Dynamicum attinet, verissimum utique est quod mones, rem eo deduci, ut probetur a priori dV esse ut $dcdl:dt$, positis dV, dl, dc, dt pro elementis vis motricis, spatii, celeritatis et temporis. Id vero probare conabor praemissis nonnullis, quibus utrum rem acu tetigerim necne, ipsa videbis. Pono itaque, quod

1. Corpora aequalia et aequivelocia sunt Virium aequalium. Hinc si mobile aliquod M feratur Vi $V+dV$ et celeritate $c+dc$, eidemque mobili alia vi V praedito et celeritate c accedat incrementum vis motricis dQ, quod celeritati c addat incrementum dc, ita ut vis totalis sit $V+dQ$ et celeritas huic conveniens $c+dc$ eadem cum illa, quae vi $V+dV$ competit, erit $V+dV=V+dQ$, vel $dV=dQ$.

2. Si Mobile M celeritate c et Vi V spatiolum AB (dl) (fig. 68) percurrere incipiens, in singulis insuper spatii punctis urgeatur versus D sollicitatione S, erit Vis mobilis in fine spatii B, ut $V+Sdl$ seu (nominando Sdl, dQ) ut $V+dQ$.

Nam quia Mobile M initio spatii A vim ut V habet, et prae-

terea in singulis spatii AB punctis afficitur vi sollicitante S, ejus vis in fine spatii aucta erit Vi quae resultat ex sollicitationis S actione continua et non interrupta durante motu in spatiolo dl; atqui haec Vis resultans est ut factum ex sollicitatione S in spatium dl, quandoquidem sollicitatio in nullo spatii puncto otiosa intelligitur, sed per omnia continuata atque permanens. Est igitur Vis totalis composita ex vi in A seu V, et ex quae resultat ex sollicitationis S continuatione in spatio dl seu Sdl, quam mobile habet in B, ut $V+Sdl$.

3. Si sollicitatio S in spatio dl continuata absque interruptione tempusculo dt quo mobile spatium illud transmittit ejus celeritati c incrementum dc superaddat, ita ut celeritas ejus in fine temporis dt vel spatii dl sit $c+dc$, huic celeritati conveniet vis $V+dQ$.

Etenim cum mobile spatiolum dl celeritate c percurrere incipiat, et tempusculo dt, quo spatium illud percurrit, sollicitatio S (hyp.) generet incrementum celeritatis dc, finito illo tempusculo erit mobilis celeritas $c+dc$. Verum (art. 2.) in fine ejusdem spatii tempore dt confecti vis mobilis est $V+Sdl$ vel $V+dQ$. Ergo celeritati $c+dc$ convenit vis $V+dQ$.

Haec omnia, ni fallor, clara sunt, quibus positis propositio principalis facile nunc concludetur:

Si viribus V et $V+dV$ quae duntaxat majoris elemento dV a se invicem differunt, conveniant celeritates c et $c+dc$, ac sollicitatio quaecunque S in spatiolo dl continuata tempusculo dt, quo mobile spatiolum illud percurrit, generare possit celeriatis c incrementum dc, dico fore nesessario elementum virium $dV=Sdl=dQ$ seu $dV=dldc:dt=cdc$.

Cum (hyp.) sollicitatio S tempusculo dt celeritati mobilis c adjungat ejus elementum dc, celeritati totali $c+dc$ conveniet (art. 3.) Vis $V+dQ$. Verum eidem celeritati $c+dc$ convenit (hyp.) vis $V+dV$; ergo (art. 1.) $V+dQ=V+dV$, et $dQ=dV$; unde quia $dQ=Sdl$, erit $dV=Sdl=dcdl:dt=cdc$. Q.E. Dem.

Atque ex hisce apparet, cur in praecedenti mea epistola expresserim vires areis figurarum, quarum ordinatae essent sollicitationes quaecunque, abscissae vero spatia mobili percurrenda, quod nimis confuse in dicta illa epistola explicueram. In hisce consistit mea demonstratio, qua principium Tuum Dynamicum probare conatus sum, quo vero successu meum non est affirmare, quin imo meo ratiocinio merito diffidens Tuo id judicio approbanti vel rejicienti submissum volo et debeo. Principia, quibus in hisce uteris, Metaphysica pereximia esse debere, non vane judico ex opere excellentissimo Theodiceae. Atque inde est quod immensum Tuorum in me collatorum beneficiorum cumulum non parum auctum sentiam, quando eorundem particeps factus fuero, ut humanissime me sperare jubes, atque iisdem velut pretiosissimis gemmis opusculum meum exornandi veniam impetravero.

Dynamica mea tentamina Hydragogicis non immiscebo, sed peculiari tractatione operi praemittam. Argumentum, quo olim ostendisti, motum perpetuum aliquando oriri debere, si vires essent ut quantitas motus, etiam urgeo in opusculo meo. Etiam reperio ex principio, quod eadem virium quantitas servetur, regulas motus ex percussione deduci posse.

Sint enim A et B mobilia eorumque celeritates ante ictum $+a, -b$, suppono enim sibi invicem his celeritatibus obviam venire idque facilitatis gratia, namque in reliquis casibus sequens discursus similiter valere videtur, $-\alpha$ et $+\beta$ eorum velocitates post ictum. Juxta principium habetur $Aa^2 + Bb^2 = A\alpha^2 + B\beta^2$, vel $Aa^2 - A\alpha^2 = B\beta^2 - Bb^2$, seu $A.a + a.a - \alpha = B.\beta + b.\beta - b$ (1). Jam si singulae celeritates augeri intelligantur incremento $+dp$ (poterat etiam sumi decrementum $-dp$) ita ut $+a, -b, +\beta$ et $-\alpha$ fiant $+a+dp, -b+dp, +\beta+dp$ et $-\alpha+dp$ substitutisque hisce valoribus loco illorum in aequatione 1, orietur sequens $A.a + \alpha.a - \alpha + 2dp = B.\beta + b.\beta - b + 2dp$, vel $A.a + \alpha.a - \alpha + 2Adp.a + \alpha = B.\beta + b.\beta - b + 2Bdp.\beta + b$ (2). Subducta aequatione (1) ex hac (2) remanebit $2Adp.a + \alpha = 2Bdp.\beta + b$, vel divisa aequatione per $2dp$, $A.a + \alpha = B.\beta + b$ (3); hinc $Aa - Bb = B\beta - A\alpha$. Jam si celeritas centri gravitatis ante ictum dicatur z, post ictum ω, et summa corporum seu $A + B = M$, erit $Aa - Bb = Mz$ et $B\beta - A\alpha = M\omega$; ergo $Mz = M\omega$ vel $z = \omega$, id est centrum gravitatis eadem celeritate movetur ante et post conflictum. Deinde divisa aequatione (1) per (3) resultat $a - \alpha = \beta - b$ vel $a + b = \alpha + \beta$, id est, eadem est velocitas relativa corporum ad se mutuo appropinquantium, quae recedentium post congressum. Paria inveniuntur in casu, quo mobilia ante collisionem ad easdem partes moventur, in hisce celeritatis additamentum $+dp$ vel $-dp$ vices motus communis seu navigii

supplet; sed in hoc differt ab hac suppositione ab aliis adhibita, quod illi motum navigii datum assumant pro demonstrationis indigentia, hoc loco vero sit quantitas, data quavis minor, imo nulla, quo non obstante propositio adhuc obtinet.

Inter multos, quos in his regionibus in Mathematicis institui, unicum tantum Juvenem Vicentinum bonae indolis simul et idoneum nactus sum, qui in profundiore Geometria initiari posset. Is laudabiles jam profectus fecit, adeo ut elegantia ab ipso suo tempore sperari possint.

Jam mecum constitui Hypothesin Tuam Massae aëreae ex comprimibili et incomprimibili compositae excolere ubi primum nonnihil otii nactus fuero, atque tabulas inde condere, quae dimensionibus altimetricis inservire possint; rei cardo in eo verti videtur ut disquiratur, quanam proportione pars comprimibilis incomprimibili in variis ab horizonte distantiis admixta sit, quod ex observationibus accuratis, ut Maraldianis, forte fieri poterit. Non puto P. Grandum annotationem meam in mirificissimum suum Creatrix Corollarium vidisse, quia occasione controversiae cum Cl. Varignonio commercium quod mecum habebat literarium intermisit.

Pulchras esse oportet Cl. Wolfii meditationes in Tuas nuper mecum communicatas quas aliis seriebus similes Grandianae absurditatem in speciem involventes applicuit, quod Tibi non displicuerint. Eas suo tempore cum aliis Eruditionis ejus monumentis mihi nondum visis, ut Ideam Universalem Matheseos vernacula lingua conscriptam et ab Amico harum rerum gnaro mihi valde laudatam, cum voluptate inspiciam.

Circa desideratos libros Fontanini, Vignolii, Bianchini, Crescimbenii Amico Venetias scripsi, ut in eos et Catalogos inquirat; interim hujus Bibliopolae Patavini Catalogum per brevem transmitto, donec alios accepero, quos deinceps sine mora quoque mittam.

Accepi omnino optimi Viri Cl. Fardellae infortunium casus apoplectici; interim per Dei gratiam non solum adhuc in vivis est, sed etiam sat virium adhuc habuit, ut Barcinone discedere et Neapolim iter ingredi posset, quod ante aliquot septimanas feliciter absolvit, et Balneis nunc Neapolitanis cum fructu et spe recuperandae salutis utitur. Hisce vale etc.

Patavii d. 4. Aug. 1712.

LXI.

Leibniz an Hermann.

Dn. Nic. Bernoullium ex Batavis in Angliam transfretasse, a Dno. Patruo ejus accepi. Si praenovissem hoc ejus in Batavos iter, consuluissem ut ad Ill. Ruzzinum prius adiret; spero tamen hoc in reditu feliciter fieri posse.

Utile erit perfici meditationem de columnae aëris compositione ex comprimibili et incomprimibili parte, possetque generali calculo res determinari, quacunque demum lege gradus et quantitas comprimibilitatis mutaretur. Per experimenta deinde determinabitur, quae lex mutandi maxime respondeat. Cogitamus in Hercyniae montibus et puteis exprimenta sumere. Hinc etiam nova lux habebitur circa constitutionem aëris. Gratias ago pro Catalogo Patavino. Plura fortasse in Venetis notanda occurrent.

In demonstratione Tua dynamica novissimis literis ad me perscripta omnia bene procedunt, nisi quod postremam consequentiam non intelligo, nempe cum ais $Sdl = dcdl : dt$. Nam solicitatio S, ut hic a Te accipitur, est quoddam potentiae incrementum infinitie infinites parvum, ducendum in elementa infinities infinite parva spatii seu in elementa spatioli; itaque non apparet, quomodo tale elementum potentiae aestimare possis ipsius potentiae mensura nondum constituta, nec alio adminiculo adhibito. Neque etiam istam aequationem uspiam quod sciam probas. Non sunt jam ad manus Tuae literae praecedentes, unde nescio an in illis aliquid attuleris ad probandum esse $Sdl = dc\,dl : dt$.

Equidem probari potest meum principium Dynamicum ex suppositione gravitatis seu solicitationis aequalibus temporibus aequalia celeritatis elementa imprimentis, eo prorsus modo quo jam olim ostendi in Actis Eruditorum, nempe aestimando vim vel potentiam ab effectu eam consumente seu violento. Licet enim hypothesis physica gravitatis et experimenta ibi adhiberi videantur, revera tamen experimenta tantum inserviunt ad confirmationem, demonstratio autem ex ipsa hypothesi ab experimentis animo abstracta procedit.

Sed probationem altiorem habeo ex principiis metaphysicis, quam nempe desideras, ubi non est necesse procedi per elementa

infinite parva, nec opus est adhibere effectum violentum aut suppositionem, qualis est gravitatis. Adhibeo autem notiones quasdam potentiae, effectus puri, et actionis, easque ad motum aequabilem applico. Sit ergo, ut soleo, longitudo spatii seu linea motus l, tempus t, velocitas v, corpus c, effectus e, potentia p, actio a. *Effectus* aestimatio mihi talis est, ut dicam effectus esse in ratione composita corporum quae transferuntur, et linearum, per quas transferuntur. Ita dicendum est, e esse ut cl. Nempe *effectum* hic considero *purum*, in solo discrimine inter statum priorem et posteriorem producto consistentem, non spectando media per quae discrimen illud est productum. Loquor autem de effectu puro, non de violento illo supradicto, seu vim qua producitur consumente, qui revera eam etiam metitur, veluti cum corpus grave ad aliquam altitudinem est attollendum; quod secus est in effectu puro qui manente potentia producitur, veluti cum corpus intelligitur translatum per aliquam longitudinem in plano horizontali. Porro in *Actione* aestimanda compono tam effectum purum, quam velocitatem qua est praestitus; et proinde in motu aequabili, ubi quovis temporis elemento aequali idem effectus eadem celeritate producitur, dicendum est esse a ut ev seu actiones esse in ratione composita effectuum et velocitatum. Atque ita cum ostenderimus esse e ut cl, sequetur esse a ut clv. Sed *potentiae* notio talis est, ut ducta in tempus, quo exercetur, actionem producat, seu ut potentia sit id, cujus exercitium temporale actio est, nam non nisi ex actione potentia nosci potest. Itaque in motu aequabili, ubi eadem manet potentia, dicendum erit esse a ut pt, seu actiones esse in ratione composita potentiarum et temporum, quibus potentiae exercentur. Et proinde habemus clv ut pt. Jam constat in motu aequabili esse l ut tv, seu longitudines percursas esse in ratione composita temporum et velocitatum, itaque fiet $ctvv$ ut clv, et proinde $ctvv$ ut pt. Ergo tandem fit p ut cvv, seu potentiae erunt in ratione composita ex corporum simplice et velocitatum duplicata. Q. E. D. Ex his sequitur egregium Corollarium, posito aequalem quantitatem potentiae servari in mundo, consequi ut etiam aequalis quantitas actionis in mundo servetur temporibus aequalibus. Nempe ut tantum sit Actiones motricis in una hora, quantum in alia quacunque, et ita dici possit, eandem esse quantitatem Motionis in mundo, sed recte acceptae, addendo scilicet aequalem temporis quantitatem. At Cartesius quantitatem

Motus non recte accepit, dum a tempore eam separare voluit, quod tamen omnis actio involvit. Rectius id, quod quantitatem motus vocavit, vocasset quantitatem conatus, quippe rei momentaneae, cum ipse actualis motus sit res successiva.

Nosti meas illas tres Regulas circa duorum corporum durorum concursus directos centrales. Nempe si mobilia sint A et B, celeritates ante ictum a et b, post ictum α et β, ponendo has velocitates esse quantitates affirmativas, cum tendunt in easdem partes, eam vero negativam quae tendit in contrarias, hinc prodibit Reg. 1: Eadem manet quantitas potentiae, $Aaa + Bbb = A\alpha\alpha + B\beta\beta$; Reg. 2: Eadem manet quantitas progressus, $Aa + Bb = A\alpha + B\beta$. Differt autem quantitas progressus a quantitate motus Cartesiana, quod cum corpora in contrarias partes tendunt, progressus totalis est differentia progressus in singulis. Porro in singulis quantitas progressus et quantitas motus Cartesiana coincidit. Reg. 3: Eadem manet celeritas respectiva, seu qua corpora distantiam mutant, $a - b = \beta - \alpha$. Et quidem ex harum trium regularum duabus quibuscunque vulgari calculo sequitur tertia, v. g. si $A(aa - \alpha\alpha) = B(\beta\beta - bb)$ dividas per $A(a - \alpha) = B(\beta - b)$, id est aeq. 1 per 2, prodit $a + \alpha = b + \beta$, quae est aequatio tertia. Quando corpora non sunt satis dura, pars virium in motus intestinos partium mollis impenditur atque ita disparet. Sed a Te pulcherrime observatum video, ex Reg. 1 deduci secundam, adhibito incremento velocitatum communi dv, posito da, db, $d\alpha$, $d\beta = dv$ quasi promotione in easdem partes elementari; id autem statim calculus differentialis more meo dabit: scilicet ex aeq. 1 differentiando fiet $2Aadv + 2Bbdv = 2A\alpha dv + 2B\beta dv$, id est $Aa + Bb = A\alpha + B\beta$, quae est regula secunda. Operae tamen pretium erit, hanc consequentiam ab aequatione ordinaria ad differentialem hujusmodi hic demonstrari rigorose. Ego rem alia methodo demonstravi. Fingo (fig. 69) planum, in quo concurrunt corpora A et B, esse inclinatum ad horizontem, sed angulo infinite parvo, et ita corpora sibi occurrere impetu proprio, sed simul etiam descendere communi impressione gravitatis; porro in corporibus gravibus a gravitate exercenda non impeditis commune centrum gravitatis continue descendit, quam recte potest, et quidem motu accelerato, perinde ac si gravium summa in ipso centro gravitatis collecta esset. Nec privatus eorum motus gravitatis effectum impedit, sed hoc loco acceleratio est infinite parva ob inclinationem inassignabilem, et proinde coin-

cidet cum motu aequabili. Cum ergo casus horizontalis coincidat cum casu inclinationis infinite parvae, et casus inclinationis infinite parvae det progressum centri gravitatis aequivalentem aequabili, utique casus horizontalis dabit eundem. Idem etiam alia demonstratione sic conficietur et quidem adhuc melius vel evidentius: Corpora A et B concurrant in plano horizontali, ponantur autem prius descendisse ipsa in arcubus verticalibus circulorum planum horizontale tangentibus, ex altitudinibus quae motum iis dedere, quem habent, atque ita quidem, ut ambo eodem momento descendere desinant ac planum horizontale attingant; quo etiam momento eorum centrum gravitatis commune nactum erit certum gradum celeritatis, eoque gradu in recta horizontali (A) (B) perget usque ad concursum. Jam si post concursum centrum hoc non feratur celeritate eadem qua prius, sed aliam nanciscatur, servabit eam, nisi quid impediat. Ponantur jam corpora post concursum pergere ea, quam in concursu accepere, celeritate et directione non amplius impedita, et eodem momento ambo pervenire ad arcus horizonti inclinatos eumque tangentes quales supra, in quibus iterum assurgere possint, tunc centrum gravitatis commune etiam eo momento ascendere incipiet, sed non tamen eadem celeritate, qua prius descendere desiit, sed ea quam nactum est post concursum, ergo nec ad eandem, ex qua descendit, altitudinem praecise assurgere rursus poterit, sed vel plus poterit ascendere vel minus, ac proinde effectus non erit aequalis causae, quod ponimus esse absurdum. Ergo fieri nequit, ut celeritas centri communis per concursum mutetur. Habemus ergo utramque regulam ex eodem principio nempe conservatae potentiae demonstratam. Sed habeo et alias vias, quae nova nec satis hactenus observata docent, et quae proferri fortasse merentur, ne intercidant. Itaque cogito, dynamica quaedam elementa breviter conscribere Tibique mittere, ut si videbitur, augere et illustrare possis. Ita ex meo brevi libello, Tuoque ampliore commentario nascetur fortasse Opus Dynamicum peculiare non contemnendum, a Tuo Hydragogico plane, ni fallor, separandum. Habeo etiam demonstrationem, quod in omni corpore, imo linea vel figura detur centrum gravitatis, quod nescio an satis ab aliis sit demonstratum. Guldinus ea de re consulendus foret. Quod superest, vale etc.

Dabam Welfebyti 9 Septembr. 1712.