pro cujus communicatione gratias ago maximas, licet aliis principiis innitatur Newtoniana, mihi quoque usu facilior et expeditior videtur. Eo ipso momento, quo Venetias abierat Cl. Abbas Fardella, epistolam tuam mecum communicabat, ex qua mihi innotuit, Dn. Nicolaum Bernoullium Newtonianas regulas pro inventione divisorum etiam demonstrasse. Cum igitur ejus ratiocinia nondum viderim, gratum mihi esset sciendi num similibus cum meis fundamentis superstructa sit ejus disquisitio; de hoc enim nihil mihi scribit Cl. Joh. Bernoulli. Hisce vale etc.

Patavii d. 12. Julii 1708.

Amicus quidam Venetus, Dn. Joannes Poleni, machinam quandam arithmeticam construxisse dicitur, cujus beneficio multiplicationes et divisiones optime peragi affirmatur, interim machinam ipsam nondum vidi.

XL.

Hermann an Leibniz.

Aliquot jam elapsae sunt septimanae, ex quo humanissimae Tuae litterae cum adjuncto Schediasmate Newtonianae methodi, divisores irrationales inveniendi, mihi redditae sunt. Pro hujus benevola communicatione et innumeris aliis Benevolentiae testimoniis grates persolvo maximas. Laetus insuper intellexi Dn. Nicolaum Bernoullium, Cel. Joh. Bernoullii ex Fratre natu majore Nepotem, magnae spei Juvenem, alterius Methodi Newtonianae consistentis in pervestigandis divisoribus rationalibus ope certarum progressionum, demonstrationem feliciter detexisse, speroque et meam quoque circa idem argumentum demonstrationem ad Amplitudinem Tuam interim pervenisse. Nunc autem altera methodus Newtoni pro inventione divisorum irrationalium, quae satis egregia mihi videtur, evolvenda est. Sit primo aequatio quatuor dimensionum $x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$, et factis $\alpha = q - \frac{1}{4}pp$, $\beta = r - \frac{1}{2}\alpha p$ et $z = s - \frac{1}{4}\alpha\alpha$. Ponit n divisorem esse terminorum β et $2z$, deinde sumit k divisorem esse aliquem quantitatis $\frac{\beta}{n}$, si p sit par, vel imparis divisoris dimidium, si p sit impar. Quotum aufert ex

$\frac{1}{2}pk$ et reliqui dimidium vocat l, et posito pro Q, $\frac{\alpha + nkk}{2}$, explorat an $QQ - s$ dividi possit per n, et quoti radix aequalis sit l. Si haec omnia contigerint, ponit $xx + \frac{1}{2}px + Q = \overline{kx + l} \times n^{\frac{1}{2}}$. Haec omnia ita demonstrari posse videntur. Cum sit $xx + \frac{1}{2}px + Q = \overline{kx + l} \times \sqrt{n}$, erit quadrando

$$\begin{aligned} x^4 + px^3 + 2Qxx &+ pQx + QQ = nkkxx + 2nklx + nll, \\ + \tfrac{1}{4}pp & \end{aligned}$$

$$\text{vel } \left.\begin{array}{l} x^4 + px^3 + 2Qxx + pQx + QQ \\ \quad + \frac{1}{4}pp \quad - 2nkl - nll \\ \quad - nkk \end{array}\right\} = 0$$

$$x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$$

Quae comparata cum aequatione data, dabit quantitates assumtitias Q, h, l, n. Nam $2Q + \frac{1}{4}pp - nkk = q$, vel $2Q - nkk = q - \frac{1}{4}pp = \alpha$, erit $Q = \frac{\alpha + nkk}{2}$; $pQ - 2nkl = r$; vel substituendo valorem ipsius Q, $\frac{\alpha + nkk}{2}$, $\frac{1}{2}\alpha p + \frac{1}{2}npkk - 2nkl = r$; vel quia $\beta = r - \frac{1}{2}\alpha p$, $\frac{1}{2}npkk - 2nkl = \beta$; unde $\frac{1}{2}pkk - \frac{\beta}{n} = 2kl$, hoc est $\frac{1}{2}pk - \frac{\beta}{nk} = 2l$. Hinc et ex mox subjiciendis constat ratio, cur Newtonus velit, (1) ut n divisor sit communis ipsius β et $2z$; (2) ut k divisor aliquis sit ipsius $\frac{\beta}{n}$; (3) cur quotiens $\frac{\beta}{nk}$ subtrahi debeat ex $\frac{1}{2}pk$; et tandem (4) quod residuum duplum sit ipsius l. Porro $QQ - nll = s$ et $QQ - s = nll$, unde $l = \sqrt{\frac{QQ - s}{2}}$. Sed substituendo $\frac{1}{4}\alpha\alpha + \frac{1}{2}\alpha nkk + \frac{1}{4}nnk^4$ loco QQ, proveniet $2\alpha nkk + nnk^4 - 4nll = 4z$, in suppositione quod $s - \frac{1}{4}\alpha\alpha = z$; unde ut haec aequatio dividi possit per n, oportet ut 4z quoque divisibile sit per n; sed super ostensum est β quoque divisibilem fieri debere per n, adeo ut hoc pacto n communis divisor futurus sit β et 4z. Demonstrata ergo sunt praecepta Newtoniana circa inventionem divisoris non rationalis, cum formula est quatuor dimensionum. Simili modo procedendum est in aequationibus altiorum graduum sed parium, ubi tamen conditionum numerus crescente in immensum calculo augetur, ut fere hujusmodi artificia in praxi vix adhiberi possint. Sit aequatio sex dimensionum $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v = 0$, et aequatio ficta tertii gradus $x^3 + \frac{1}{2}pxx + Qx + R = \pm\sqrt{n} \times kxx + lx + m$, ex qua deducitur

$$\left.\begin{array}{l} x^6 + px^5 + 2Qx^4 + 2Rx^3 + pRxx + 2QRx + RR \\ \quad + \frac{1}{4}pp + pQ \quad + QQ \quad - 2nlm - nmm \\ \quad - nkk - 2nkl \quad - 2nkm \\ \qquad\qquad\qquad - nll \end{array}\right\} = 0$$

Cujus coefficientes comparatae cum coefficientibus propositae determinabunt literas assumtitias Q, R, n, l, m, k. Nam $2Q + \frac{1}{4}pp - nkk = q$, unde ponendo iterum $\alpha = q - \frac{1}{4}pp$, erit $Q = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nkk$, $R = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}pQ + nkl$, $s = pR + QQ - 2nkm - nll$, $t = 2QR - 2nlm$, et $v = RR - nmm$, ex quibus elicitur tandem $2nlm - 2nklQ = rQ - pQQ - t$ vel $\overline{2m - 2kQ} \times l = \frac{rQ - pQQ - t}{n}$, ex quo patet l esse debere divisorem aliquem ipsius $\frac{rQ - pQQ - t}{n}$. Praeterea cum $v = RR - nmm$, erit $m = \sqrt{\frac{RR - v}{n}}$; et quia $t = 2QR - 2nlm$, habetur $m = \frac{QR - \frac{1}{2}t}{nl} = \sqrt{\frac{RR - v}{n}}$, et pariter cum $pR + QQ - 2nkm - nll = s$, fiet $m = \frac{QQ + pR - nll - s}{2nk}$; quae omnia sunt ut praecipit autor. Et tandem ex calculo elicitur, literam k divisorem esse debere integrum quantitatis $\frac{\lambda}{2nn}$. Similiter tentari posset reductio aequationum per extractiones Radicis Cubicae, sed hos casus nondum examinare vacavit.

Anno hoc Academico sequenti Novembre inchoando Mechanicam explicare mecum constitui, interque alia ansam habebo Excell. Tuae inventa dynamica quanta potero diligentia explicandi, si modo ingenium voluntati responderet; tentabo interim vires meas, et quantum etiam Naturalis Philosophia acumini Tuo debeat, palam facere studebo. Quantum ex Cl. Varignon intelligo, P. Reyneau Analysis demonstrata et duobus tomis comprehensa publici jam est juris. In hisce oris a multo jam tempore Mathemata silent, et raro novi quid in hisce scientiis in publicum prodire solet. His vale etc.

Patavii 29 Augusti 1708.

XLI.

Leibniz an Hermann.

Solutio Tua Newtoniani problematis (problema enim merito appelles methodum, cujus demonstratio non apponitur) optima est, et in substantia non differt a Bernulliana. Scribit mihi Dn. Joh. Bernoullius se quoque dedisse et Tibi communicasse solutionem problematis de statione Planetarum, desideratque ut a Te petam, quia ipse exemplar non servaverit. Quod ad aequationum vel formularum divisiones attinet, prosecutus nonnihil sum Methodum a Newtoniana diversam, quae adhibet divisiones divisorum ultimi termini per numerum loco x suppositum, veluti h, et reperio, si aequatio data transformetur in aliam, cujus omnes radices sint falsae, uno quasi tenore per residuos continuatae cujusdam divisionis, omnes exhiberi coefficientes formulae dividentis, si qua talis datur. Sed haec methodus supponit numerorum divisores haberi, etiam paullo majorum. Hoc supposito res omnis ad magnam facilitatem reducta est, dicique potest, saltem problema algebraicum transmutatum esse in arithmeticum. Methodum ejus computationum ex scheda adjecta videbis, de qua judicium Tuum mihi gratum erit.

Suspicor Amici Veneti machinam multiplicandi et dividendi non multum differre a Morlandiana et Grilletiana, quas in Anglia et Gallia vidi olim, ubi multiplicationes nihil aliud sunt, quam rhabdologia, additiones autem, quas rhabdologia praescribit, fiunt in adjecta machina Pascaliana, ita ut totum sit combinatio inventi Neperiani et Pascaliani; sed mea toto coelo diversa est, nihilque rhabdologiae simile supponit. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 6. Septb. 1708.

Beilage.

Methodus generalis investigandi divisores formularum rationalium integralium ex datis divisoribus numerorum rationalium integrorum.

Formula vel aequatio data ita transformetur, ut omnes ejus radices fiant falsae, adeoque ut omnes termini sint affecti signo +. Talis sit quaecunque $p + qx + rxx + sx^3 + tx^4 + vx^5 = \odot$, quaeritur an et quae formula secundum eandem x ordinata eam dividat. Formulae dividentes si dantur, erunt minimum duae, verbi gratia una: $b + cx + dxx + ex^3 =$ ☽, altera $\beta + \gamma x + \delta xx =$ ♀, quae in se invicem ductae producent ipsam $\odot$.

Pro x sumatur numerus h integer affirmativus rationalis, major quavis datarum p, q, r, s, t, v. Eoque in formula $\odot$ loco x substituto, resultabit numerus qui vocetur m, cujus exhibeantur divisores seu Factores. Horum quilibet dividatur per h, et notetur residuus primus; tum quotiens rursus dividatur per h, et notetur residuus secundus; atque ita continuetur, donec amplius per h dividi quotiens non possit, ita ultimus quotiens simul erit ultimus residuorum. Cuilibet Factori ascribatur sua series residuorum. Sed ex his Factoribus statim illi rejici possunt, quorum primus residuus nullus est ex divisoribus seu factoribus termini ultimi formulae datae, et quorum ultimus residuus nullus est ex divisoribus seu factoribus termini summi formulae datae. Ex caeteris seriebus residuorum, si quidem res succedit, aliqua dabit b, c, d, e, et altera ei respondens dabit β, γ, δ, eaeque series ita inter se congruent, ut primus residuus unius ductus in primum alterius seu $b\beta$ det p, ultimum terminum formulae datae, et simul ultimus residuus unius ductus in ultimum alterius seu $e\delta$ det v, summum terminum formulae datae. Praeterea etiam numeri residuorum duarum serierum congruentium b, c, d, e (nempe hoc loco 4) et β, γ, δ (nempe 3) in unum additi et binario minuti dare debent numerum gradus formulae datae (nempe $+4+3-2=5$). Quodsi talis serierum congruentia non contingat, tuto pronuntiari potest, formulam datam non esse divisibilem excepto uno casu, cum est quadratica, quo casu formulae dividentes coincidunt inter se. Sed casus formulae datae quadraticae aliunde satis dignosci potest. Congruentia autem existente tentari divisio potest per unam formularum, cujus coefficientes sint residui unius serierum congruentium. Et series, cui nulla alia congruit, excludetur.

Quodsi vero serierum congruentia contingat plus semel, vel tentari divisio potest per formulam ex qualibet congruentia, vel procedetur ad novam hypothesin novo assumto numero h, unde novus (uti supra) fiet numerus (m). Cujus exhibeantur Factores et eodem modo dividantur per (h), ut Factores ipsius m divisi sunt per h, prodibuntque novae series residuorum, ex quibus solae eligentur illae quae coincidunt, seriebus prioris hypotheseos

non exclusis. Et vera erit serierum conjugatio, quam quaevis hypothesis dabit, utcunque varies h vel (h) vel ((h)) etc. Quodsi nulla talis est conjugatio, quae semper procedat, etiam quaesita divisio impossibilis erit.

Ratio horum partim ex dictis manifesta est, ut relatio serierum conjugatarum inter se, partim facile reddi potest. Nempe si tam formulam $\odot$ quam formulam ☽ explices, pro x substituendo $y + h$, ultimus terminus formulae ex $\odot$ factae erit $p + qh + rhh + sh^3 + th^4 + vh^5 = m$, divisibilis per ultimum terminum formulae ex ☽ factae $b + ch + dhh + eh^3 = n$, idemque est si adhibeas (h) vel ((h)). Itaque patet fore

$p + qh + rhh + sh^3 + th^4 + vh^5 = m$ divisibilem per

$b + ch + dhh + eh^3 = n$

$p + q(h) + r(hh) + s(h^3) + t(h^4) + v(h^5) = (m)$ ....

$b + c(h) + d(hh) + e(h^3) = (n)$

$p+q((h))+r((hh))+s((h^3))+t((h^4))+v((h^5))=((m))$ ....

$b+c((h))+d((hh))+e((h^3))=((n))$

Sunt ergo n factores respondentium m, ubi numeri m sunt dati, sed numeri n sunt quaesiti inter plures datos. Praeterea b est unus ex Factoribus ipsius p, et e est unus ex factoribus ipsius v. Et aptus nobis Factor ipsius m, qui sit n quaesitus, si dividatur per h respondentem, quotiente iterum diviso, et quotientis quotiente, quamdiu licet, dabit residuos, primum b, secundum c, tertium d, ultimum e, posito omnes literas esse quantitates affirmativas, et h divisorem esse majorem quam quemvis ex his b, c, d, e; quod non potest non esse, quia assumtus est major quovis ex datis p, q, r, s, t, v, quorum maximus major est maximo ex ipsis b, c, d, e. Nempe $eh^3 + dhh + ch + b, : h = ehh + dh + c + b(:h)$, et $ehh + dh + c, : h = eh + d + c(:h)$, et $eh + d, : h = e + d(:h)$, et $e : h = e(:h)$, ubi $ehh + dh + c$, $eh + d$, e sunt quotientes; sed b, c, d, e sunt residui. Veri autem seu apti residui erunt, quorum series in quavis hypothesi eadem prodibit. Nam quicunque sint h vel (h) vel ((h)), iidem sunt b, c, d, e.

Exemplum adjicere non inutile erit. Data sit Formula $2x^5 + 3x^4 + 8x^3 + 6xx + 5x + 6 = \odot$, quaeritur formula dividens. Pro x ponendo $h = 10$, major quolibet coefficientium, fiet $238656 = m$, qui numerus sexies dimidiari, semel per 3 dividi potest, productoque tandem diviso per 11, prodiit 113, primitivus.

200000	
30000	
8000	
600	
50	
6	
238656	

Ex horum divisorum simplicissimorum combinationibus prodeunt divisores seu Factores:

Factores

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64
3.	6.	$\underline{12}$.	24.	48.	96.	192
$\underline{11}$.	$\underline{22}$.	44.	88.	$\underline{176}$.	352.	704
33.	66.	$\underline{132}$.	264.	528.	$\underline{1056}$.	$\underline{2112}$
$\underline{113}$.	226.	452.	904.	1808.	3616.	7232
339.	678.	$\underline{1356}$.	$\underline{2712}$.	5424.	10848.	$\underline{21696}$
$\underline{1243}$.	2486.	4972.	9944.	19888.	39776.	79552
3729.	7458.	14916.	29832.	59664.	119328.	23856

Ex his soli lineola subducta notati sunt, qui examinari merentur, iique apparent primo aspectu, nam quia hoc loco $h = 10$, residui sunt ipsae notae numeri cujusque, ex. gr. si 176 modo praescripto dividas per 10, primus residuus est 6, secundus 7, tertius 1. Excluduntur ergo quorum ultima nota non est factor ipsius p, hoc loco ipsius 6, nempe 1, 2, 3; excluduntur etiam quorum prima nota non est Factor ipsius v, hoc loco ipsius 2, nempe 1, 2. Minimi etiam Factores hic debent esse duarum notarum, ut duos possint dare residuos, quia formula dividens (veluti $b + cx$) ad minimum est duorum terminorum. Series autem duorum residuorum conjuganda est cum serie quinque residuorum; series trium cum serie quatuor, id est hoc loco conjugandi sunt numeri 11, 12, 22 cum numeris quinarum, ex quibus unus notatus est 21696. Unde sola prodit conjugatio inter 11 et 21696, quia hoc solo casu simul prima nota in primam dat 2, et ultima in ultimam dat 6. Item conjugandi sunt numeri ternarum notarum 113, 132, 176 cum numeris quaternarum 1056, 1243, 1356, 2112, 2712, ex quibus conjugationibus duae solummodo ob eandem rationem licitae sunt inter 113 et 2112, item inter 113 et 2712. Habemus ergo tres conjugationes licitas, facileque apparet, solam succedere conjugationem inter 113 et 2112, seu inter seriem residuorum 3, 1, 1 et seriem residuorum 2, 1, 1, 2,. et fiet ☽ $= 2x^3 + 1xx + 1x + 2$ et ♀ $= 1xx + 1x + 3$, eae enim formulae in se invicem ductae producunt formulam datam ⊙. Nec opus est hoc loco nos progredi ad alterius hypotheseos assumtionem, loco ipsius

10. Quodsi tamen assumsissemus $(h) = 100$, tunc (m) fuisset 20308060506, cujus confactores sunt 10103 et 2010102, eosdem daturi residuos si per 100 dividas, quos superiores confactores dedere, divisi per 10. Ita comparatio factorum novorum cum prioribus dedisset seriem residuorum desideratam, nempe 1, 1, 3 et 2, 1, 1, 2; sed 20308060506 non habet Factores 101 et 201060906 vel 10103 et 2010102. Et sufficeret haec methodus, si facilis haberetur ratio inveniendi cujusque numeri divisores; interim res saltem eo reducta est.

Transformatio aequationis in eam, cujus omnes radices sunt falsae, etiam aliter ad factores inveniendos prodesse posset, nullis adhibitis quantitatibus h. Nam si $bx^3 + cxx + dx + e$ in $(b)xx + (c)x + (e)$, ubi sit $(c) = d$, debent producere datam $2x^5 + 3x^4 + 8x^3 + 6xx + 5x + 6$, prodibit $b(b) = 2$, $e(e) = 6$, $b(c) + (b)c = 3$, $e(e) + (e)d = 5$. Porro b et (b) sunt 1 et 2, at e et (e) sunt vel 1 et 6, vel 2 et 3. Hinc non difficile etiam erit invenire c et (c), item d et (d), si haberi possunt. Nam pro inveniendis c et (c) divellendus est numerus 3 in duos, quorum unus sit divisibilis per 2, alter per 1, id est in 2 et 1, ergo c erit 2, et (c) erit 1, vel contra. Similiter pro inveniendis d et (d) numerus 5 erit divellendus in duos, et quidem si e et (e) sint 1 et 6, divellendus in duos, quorum unus sit divisibilis per 1, alter per 6, sed hoc fieri nequit; itaque e et (e) sint 2 et 3, et divellatur 5 in duos, quorum unus sit divisibilis per 3, alter per 2, id est in ipsos 2 et 3. Ergo d et (d) erunt 1 et 1, sed $(c) = (d)$, ergo et $(c) = 1$ et $c = 2$. Ergo $(b) = 1$ et $b = 2$; itaque tandem $2x^3 + 1xx + 1x + 2$ et $1xx + 1x + 3$ sunt factores ipsius formulae datae. Si plures fuissent literae quaesitae, processissemus ad plures hujusmodi divulsiones, quas praescribit comparatio terminorum natorum ex confactoribus ductis in se invicem cum terminis respondentibus aequationis datae. Haec via etiam serviet ad divisores Numerorum inveniendos.

XLII.

Hermann an Leibniz.

Hesterna die seram sub vesperam humanissimae Tuae literae, Vir Consultissime, cum annexo Schediasmate circa Inventionem divisorum rationalium optime mihi a Hospite meo redditae fuerunt, ubi domum reversus essem. Quia sic sero ad manus meas pervenit Methodus Ampl. Tuae pro investigandis divisoribus, nondum eam ea qua par est attentione perlegere potui. Verum quantum tumultuaria lectione animadvertere mihi licuit, generalis est et usu multo facilior Newtoniana, quae pro divisoribus plurium quam duarum dimensionum immensum saepissime calculum exigit, cum contra Ampl. Tuae methodus multo, ut mihi videtur, brevius et facilius idem expediat atque adeo Autore suo Per-Illustri digna sit, qua in re magis haud dubie confirmabor, postquam Schedam debita cum attentione perlegero. Nunc autem Ampl. Tuae hoc epistolio obstrepo, quia a Cl. Abbate Fardella intellexi, hodie illum literas ad Ampl. Tuam esse daturum, quibus meas addidi, ut gratias agerem maximas pro transmissa mihi elegantissima methodo inveniendi divisores, de qua modo loquutus sum. Quod mea demonstratio Newtoniani modi, divisores rationales eliciendi, non displicuerit, est quod mihi gratuler; alteram meam demonstrationem regularum ejusdem auctoris pro inventione divisorum irrationalium, interea ad Ampl. Tuam pervenisse spero. Et quanquam Newtonianae regulae peringeniosae sint, quia tamen tot conditionibus implicantur in aequationibus nonnihil altiorum graduum, in ipsa praxi inutiles quasi redduntur.

Quantum ad Solutionem Problematis de Stationibus Planetarum quam Cel. Bernoullius mecum communicaverat, eam Schediasmati meo super eadem materia, quod antehac ad Ampl. Tuam Berolinum miseram, cum debita Inventoris laude inserui. Sed ne inde petenda sit, hic iterum apponam. Sint duo circuli ABH, CDG (fig. 56) circa idem centrum E descripti. Si super radio EA, qui minorem circulum CDG secat in C, in circulis ABH, CDG duo mobilia A et C simul moveri incipiant, motuque aequabili prius tendat ex A per B versus H, alterum ex C per D versus G; sintque duo arcus AB, CD eodem tempore descripti, hi erunt inter se ut velocitates. Jam conjungendo puncta B, D recta BD, quaeritur talis positio lineae BD, ut si mobile A tempusculo infinite parvo pergeret moveri ex B in b, et mobile C eodem tempusculo ex D in d perveniat, recta bd parallela sit priori BD. Quibus positis sint AE = a, CE = b, per D et B agit Bernoullius tangentes DF, BF concurrentes in F, ex quo puncto et punctis contactuum B, D versus centrum E rectas ducit FE, BE, DE,

facitque FB = x velocitatem in AB vel Bb ut 1, velocitatem in CD vel Dd ut m; unde Bb . Dd :: 1 . m :: FB (x) . FD, quae proinde est = mx. Hinc quia $FBq + BEq = FDq + DEq$ vel $aa + xx = bb + mmxx$, unde habetur $x = \sqrt{\frac{aa - bb}{mm - 1}}$ FB, = et $FD = m\sqrt{\frac{aa - bb}{mm - 1}} = m\frac{cm}{\sqrt{mn - 1}}$ si fiat $aa - bb = cc$ et $BD = \frac{acm - bc}{\sqrt{aamm - bb}}$; unde in triangulo BED tria latera nota sunt, adeoque et angulus BED vel arcus ID; sed ID . CD :: am — b . am; habeatur ergo etiam arcus CID vel punctum D vel positio trianguli BED, specie et magnitudine dati. Q. E. I.

Quantum a Dn. Dn. Kouneau et Naudé intelligo, Societatis Berolinensis Acta brevi praelo subjicientur. Nullus dubito, quin aeque grata ac accepta futura sint Eruditis ad Parisinae Academiae Miscellanea, quae magna cum aviditate legi solent a Curiosis, praecipue si sciverint cuncta illius Academiae Berolinensis Specimina oculos Tuos subiisse.

Neque dubito, quin machina arithmetica ab Ampl. Tua excogitata multis parasangis superet illam, quam Amicus Venetus sibi construxit, quam nuperrime inspexi; multis ea rotis constat, quarum una dentibus instructa, quae pro rei indigentia aut deprimi vel rursus elevari possunt et cum alia rota committi; jam pro diversitate numerorum multiplicandorum modo plures, modo pauciores dentes super plano rotae erigit, trahendo ad id certos funiculos, aliquibus postea rotae revolutionibus tandem productum multiplicationis se manifestat. Facile interim crediderim, principio quo Rhabdologiae fundantur, pariter superstructam esse.

Haec sunt, Vir Consultissime, quae deproperare hac vice potui in splendida hac Civitate, ubi nunc ago, negotiorum quorundam meorum gratia et partim etiam curiositate Caesarei Oratoris ad Sereniss. RP. ingressum oculis quoque meis usurpandi allectus. His vale, mihique bene cupere non desine etc.

Venetiis 21 Sept. 1708.

XLIII.
Hermann an Leibniz.

Nihil profundius unquam vulnus animae infligere poterit, Vir Amplissime, quam nuperrimae ab amico mihi redditae literae, periclitantem Tuam valetudinem significantes, fecerunt. Pari tristitia affectus erat Clariss. Abbas Fardella, qui in eo adhuc solatii nonnihil mecum petiit, quod falsus forsan esset sparsus de adversa Tua salute rumor. Faxit D. O. M. ut solidum hoc sit solatium.

Quas in postremis Tuis literis*) mecum communicare dignatus es, formulae circa collisionem corporum perelegantes sunt et verae in corporibus elasticis. Demonstrationem a priori circa aestimationem virium valde videre cupio, cum hoc de argumento in publicis meis lectionibus, quibus Mechanicam explico, adhuc agendi sit animus. Hisce deproperatis vale etc.

Patavii 29 Decembr. 1708.

XLIV.
Hermann an Leibniz.

Tardiuscule nonnihil ad humanissimas tuas literas 20 Decembris superioris**) respondeo, quia sero nimis et nonnisi nudius tertius ad me pervenerunt cum adjunctis Diplomatis: horum Diplomatum exemplaria Celeberrimis Viris Dn. Abbati Fardellae, Gulielmino et Ramazzino destinata, illico Dn. Fardellae, ut jussisti, reddi curavi, qui reliqua duo, retento suo, suo quodque loco distribuit. Unde non dubito, quin Clarissimi Viri literis sint significaturi, quam grati acciderint ipsis honores receptionis in Societatem Regiam, quae Berolini est per orbem literarium longe Celeberrimam, et Tibi potissimum cui Moderamen ejusdem a Serenissimo ejus Fundatore demandatum est non sine ipsius Societatis gloria, quisque debitas persoluturi sint grates ac Illustri Academiae.

---

*) Dieser Brief fehlt.

**) Dieser Brief ist nicht vorhanden.

Idem et me quoque manet debitum, utpote quem eodem receptionis beneficio condecoratum voluistis Vir Ampl. et incluta Societas, nihil tale merentem: profectus enim meos nimis tenues existimo, quam ut nomen meum in Catalogo Virorum ad Scientiarum pomoeria protendenda natorum ac studio factorum comparere mereatur. Hancque ob causam pro tanta benevolentiae Vestrae testificatione gratias ago.

Summopere gaudeo falsum fuisse rumorem de prostrata Tua valetudine, qui ante aliquot tempus ad nos delatus erat, ast longe gratior adhuc erit nuntius, quem avide expectamus, perfectae et prosperae salutis Tuae. Basilea intellexi Cl. Bernoullium nostrum non penitus bona uti sanitate, quod non sine summa tristitia potui intelligere.

Haud ita pridem in manus mihi incidit liber aliquis Dni. Parent, cui titulus: Recherches de Mathematique et de Physique, in quo errores nonnullos taxare praetendit in Disquisitione Dioptrica Dn. Joh. Bernoulli, quae ex Actis Lips. translata est in Diarium Gallicum; imprimis vero censorium calamum stringit in Hugenianam theoriam Vis centrifugae, qualis exposita est in Hugenii Opusculis posthumis, inter alia putat Hugenium Vim centrifugam duplo minorem justa fecisse. Sed utique fallitur Parent, uti antehac falsus erat in alia Propositione, quam Hugeniano cuidam theoremati opponere voluerat in Diario Gallico 23 Maji 1701, ut editores Operum posthumorum Hugenii optime notarunt. In hac ipsa materia vis centrifugae misere hallucinari potius videtur Parentius ipse eo ipso tempore quo maximos quosvis Autores erroris et paralogismorum accusare non dubitavit. Pag. 793 Tomi secundi dicit: Quoyque la force Centrifuge ait été traitée par les plus grands Hommes, il ne me paroit pas cependant qu'ils ayent connu sa veritable nature, du moins de celle qui depend du mouvement Circulaire, comme on le verra par cette explication. Hactenus ille: in hoc discursu asserere videtur aut statuere ac si daretur aliqua vis Centrifuga independens a motu circulari. Sed hoc nihil est prae aliis quos committit erroribus, ut cum post allata verba demonstrare conatur, Vim Centrifugam tum fore aequalem Vi gravitatis, cum corpus movetur in circumferentia circuli velocitate acquisita post casum per altitudinem quartae diametri partis, ut Hugenius determinavit, qui tamen vires centrifugas aestimavit per excessus secantis arculi infinite parvi eodem tempore percursi a circulante mobili ac excessus iste super radium genitus intelligitur. Parent vero duplum hujus excessus assumit pro mensura Vis Centrifugae. In animum fere induxi, quasdam animadversiones Lipsiam mittendi Actis inserendas, ut ex illis constet quam injuste Dn. Parent Hugenii Meditationes et inventa sugillaverit. Hisce vale, etc.

Patavii d. 21 Febr. 1709.

XLV.

Leibniz an Hermann.

Gaudeo diplomata recte esse reddita. Diuturna mea domo absentia fecit, ut literae mihi tardius redderentur, atque ita nec in tempore respondere possem. Autumni partem in thermis, hyemis partem Berolini egi, et satis nunc divino munere valeo, domumque confirmata valetudine reversus sum; Tibique autem plurimum debeo, quod de ea sollicitus fuisti. Id inter alia Berolini egi, ut quaedam ex scripturis ad Societatem missis selecta miscellanea prodirent, quod hoc anno futurum spero. Inserentur et Tua de Planetarum stationibus, omissis tamen projectionibus. Nondum intellexi judicium Tuum de mea methodo inveniendi divisores aequationis vel formularum. Certum est rem hoc modo satis commode reduci ad divisores numerorum inveniendos. Et tamen excogitavi adhuc aliquid, cujus ope spero etiam hac necessitate methodum pro maxima parte liberari posse. Sed multa alia habeo multo majoris momenti, si absolvere vacaret. Deest in his oris amicus aliquis, cum quo de talibus colloqui atque agere possim. Ita nemo est, qui ad haec excitet, multa quae inde distrahant; nullus est longe lateque Hermannus. Cum vobis diplomata misi, feci quod officii mei esse putavi, et ad promovendum scopum Societatis Scientiarum facere credidi. Parentius ille, in cujus inquisitiones animadvertisti, audaculum se passim ostendit in aliis refutandis, et ambitiosulum in inventis sibi ascribendis, quae dudum prostant, tanquam ea suo marte obtinuisset: inquisitiones illas (Recherches) nondum vidi, sed amici de ea ad me perscripsere. Ajunt, et mea eum vellicare, sed hoc parum curo.

Quod vim centrifugam attinet, rogo ut inspicias, quae Octobri

Actorum anni 1706 inserui pag. 446 seqq. ut meas ipse locutiones emendarem, comparesque cum iis, quae Hugenius et Parentius habent, et deinde sententiam Tuam ad me perscribas. Ego non in re lapsus eram, sed tantum in locutione; quid Hugenio aut Parentio contigerit, re considerata et cum meis collata deprehendes. Dici aliquomodo potest, vim centrifugam locum habere etiam, cum circularis motus non consideratur. Pro centro enim punctum quodcunque assumi potest, et concipi quantum continuato mobilis motu per tangentem curvae ab illo centro recedatur, et quantum mobile retrahendum sit ad curvam, in quo vis centrifuga consistit. Quod superest, vale etc. Dabam Hanoverae 21. Martii 1709.

XLVI.

Leibniz an Hermann.

Non dubito, quin literas meas ante complures septimanas acceperis, quibus et Tuis respondebam, et circa vim centrifugam, de qua Parentius aliquid contra Hugenium movit, aliqua annotabam, rogans ut inspiceres quae Octobri Actorum Lipsiensium anni 1706 inserui p. 446 sqq., et mihi judicium Tuum haud gravatim perscriberes. Id ergo etiamnum a favore Tuo expecto, scriboque vel ideo saltem ut, an priora mea ad Te pervenerint, discam; non dubito etiam, quin expenderis modum meum, quo inventio divisoris rationalis aequationis reducitur ad divisores numerorum, ita ut hac facile data nihil futurum sit facilius, quam sine multa tentatione innire divisorem aequationis. Verum enim vero, quia inventio ipsa divisorum numeri dati problema est nondum commode solutum, ideo iisdem, quae feci, fundamentum insistens viam video divisores aequationum commode inveniendi, non suppositis numerorum divisoribus; sed ad hoc exequendum adhuc otiolo opus foret.

Puto impressionem Miscellaneorum Berolinensium jam coeptam esse, et spero hoc anno tempestive absolutum iri. Quod superest, vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 16. Maii 1709.

XLVII.

Hermann an Leibniz.

In aliqua ex praecendentibus meis me jam scripsisse putabam, quantopere mihi placuerit Methodus Tua inveniendi Divisores formularum: quantum enim de ea judicare valeo, multis occasionibus longe faciliorem et compendiosiorem tuam aestimo, quam Newtonianam, quando nimirum formulae divisorum occurrunt altiorum graduum, sine controversia faciliore negotio res tota expeditur, quam Newtoni regulis tot circumstantiis et cautelis limitandis. Quod si vero inventio etiam divisorum necessaria ad determinationem coefficientium formularum pro divisoribus magis adhuc contrahi poterit, alio insuper nomine Newtoni Regulis methodum Tuam praeferendam ducam.

Cum persuasissimus sim multa saeculis profutura maximique momenti inventa Mathematica et Philosophica inter chartas Tuas adhuc delitescere, vehementer doleo, neminem esse qui in iis edendis et ad prelum disponendis Tibi, aliis occupationibus distracto, operam praestare velit et possit. Caeterum optime novi, Professores Matheseos plerumque teneri, vulgares Matheseos practicae operationes studiosae juventuti propinare, sed miror neminem esse qui altius sapere et de universo orbe literario bene mereri cupiat, editionem Meditationum Tuarum promovendo atque urgendo.

Quod ad Parentium attinet, non tantum audaculum et ambitiosulum eundem existimo in diminutivo, sed fortasse verius temerarium et arrogantem. Nam qui non gregarios milites, sed summos Mathematicarum disciplinarum Ductores nulla urgente necessitate aggreditur, et jam pridem ab aliis publicata inventa recoquere eaque tanquam proprio marte eruta in publicum emittere non dubitat, is sane temerarii et insolenter ambitiosi titulo non indignus censeri debet. Eo ipso loco ubi Hugenianum tractatum censorio calamo perstringit, satis apparet ipsum, cum ea scriberet, nescivisse, quid Vis centrifuga esset. Interim tamen si ipsi credimus, solus is est qui hujusmodi Virium veram habeat notitiam, et omnes reliqui qui ante ipsum de hoc argumento egerunt falsi sunt. Interim omnes solo Parentio excepto, qui de Vi Centrifuga scripserunt, ea demonstrasse videntur quae demonstranda sumserunt, Parentius vero aliorum inventis nil nisi paralogismos addidit, ut manifestum id me facturum spero.

Perlegi diligenter locum Actorum 1706 Mens. Octobr. ubi

itidem de Vi Centrifuga agitur. Distinguis talem Vim in tangentialem et arcualem. Auctores de prima tantum virium Centrifugarum specie loquuti sunt, quam subinde cum vi gravitatis contulerunt, omnes enim eam mensurant penes sinum versum arcus infinite parvi aut excessum secantis et radii, ut Hugenius, qui posterior vis centrifugae aestimandi modus coincidit cum priore, cum dictus excessus sit ad sinum versum ut secans arculi infinitesimi ad radium, quae ultima ratio est aequalitatis. De conatu vero arcuali nullum reperiri videtur vestigium apud eos, qui de hisce scripserunt, vel potius eundem esse cum tangentiali statuere videntur, nam ubi corpus in E (fig. 57) arcum EA decurrendo pervenit in A, asserunt corporis directionem in A esse tangentem AD, atque adeo conatus centrifugi mensuram in eodem puncto A fore DG, sinum anguli contactus DAG.

Parentius solus praetendit, vis Centrifugae mensuram esse duplum sinus versi AB, in fine sui libri, nam eo loco ubi Hugeniana examinat, simplicem AB accipit pro dicta mensura. Ejus ratiocinium huc breviter redit: In eadem hac nostra figura modo citata per E ducta intelligatur tangens EM radio AC occurrens in M, atqui sine probatione asserit subtangentem BM exprimere vim centrifugam, duos vero motus per EB et AB componere motum per arcum EA. Jam facile ostendi potest, quod arcu EA existente infinite parvo, subtangens BM dupla est BA. Sed cum dicat Parentius, motum arcualem EA componi motibus EB et AB, manifestum esse puto, vim per AB non esse partem vis Centrifugae quam exprimit per BM, quia haec AB concurrit ad constituendum motum arcualem EA. Vis autem Centrifuga est, qua corpus conatur per tangentem EM recedere ab arcu EA, adeoque spatium AM, quo recedit, tantum exprimere potest conatum illum centrifugum, sed AM hoc casu est $= AB$; ergo haec AB esset quantitas recessus et expressio vis Centrifugae. Caeterum libenter concedo, quod, si mobile percurrendo arcum EA motum suum prosequatur nihilo impediente in recta AF, conatus centrifugus arcualis exprimendus sit per FG vel aequalem AH, duplum sinus versi AB.

Laetus quoque intellexi Collectanea Berolinensis Societatis Regiae sub prelo jam sudare spemque esse fore, ut exeunte hoc anno publicae luci exponantur, nullus enim dubito quin multa praeclara inventa iis contineantur. Quod superest, vale etc.

Patavii d. 6. Juni 1709.

XLVIII.

Leibniz an Hermann.

(*Im Auszuge*)

De Vi centrifuga rogo, Vir eximie, ut rem iterum expendas, et cum meo specimine Motus planetarii Actis inserto conferas; reperies omnino regulariter adhibendam vim centrifugam non tangentialem, sed arcualem. Tangentialis tantum locum habet initio circulationis, at Arcualis, quia non duo tantum puncta, sed tria supponit, locum habet circulatione durante. Est quidem conatus arcualis tangentiali proportionalis, cum sit ejus duplum; hinc saepe alius pro alio sine errore sumitur; sed quando tertium aliquid huic vi homogeneum assumendum est, et per modum additionis aut subtractionis vi centrifugae conjungendum, ut factum est in explicando planetarum motu paracentrico per compositionem vis centrifugae et gravitatis, tum vero reperies non impune tangentialem arcuali substitui. Ego sane calculo ipso jubente, adhibueram arcualem re, sed tangentialem verbo, quod novissime emendavi. Verum est, corpus conari recedere a centro per tangentem, sed ut determinetur vis qua conatur, conjungi debet tangens praecedens, ducta per duo praecedentia puncta, cum puncto novo, examinandumque est, quantum tangens illa a centro illo quod respicitur, plus minusve recedat, quam punctum novum.

Caeterum ut verba Epistolae Tuae sequar, quicquid sit de *autoribus*, an de Tangentiali tantum locuti sint, dicendum est eos de arcuali loqui debuisse, quia volebant agere de ea Vi centrifuga, quae locum habet durante motu. Et speciatim *cum gravitati eam contulere*, hoc facere debuerunt. Itaque ego revera arcualem cum gravitate composui in explicando motu planetarum per circulationem. Duplum enim adhibui ipsius Tangentialis, quam vulgari modo locutus vim centrifugam simpliciter appellabam, sed minus bene. Illud recte dixerunt *vires centrifugas esse ut sinus versos*, nam arcuales sunt ut sinus versi, cum sint tangentialium dupla. *Esto de conatu arculi apud alios nullum esse vestigium*, (quanquam rem non excluserim) certissima tamen demonstratione a me exhibita (d. l. p. 448) et ipso successu compositionis motuum paracentricorum comprobata, adhiberi debere manifestum est. Dicis: asserere eos, *corporis di-*

rectionem in A esse tangentem AD, sed illa assertio falsa est in rigore, de quo hic agitur (etsi hae directiones assignabiliter non differunt), cum enim mobile tendat ab E ad A, directio est EA vel AF. Vera foret assertio in motus initio, ut explicui, sed hoc non habet locum nisi in primo momento. Parentii ratiocinationem non curo, cum nec locum ejus viderim, nec consequentiae vim in illis, quae inde refers paulo obscurius, intelligam. Sed quod dixi, irrefragabile censeo. Cum denique in fine subjicis, *Te libenter concedere, quod, si mobile percurrendo arcum EA motum suum prosequatur nihilo impediente in recta AF, tunc conatus centrifugus arcualis exprimendus sit per FG vel AH duplum sinus versi*, concedere videris, quod volo; nam semper hoc in circulatione, demto initio, contingit. Concipiendum enim est, quasi mobile prosequeretur motum suum EA versus F, atque inde retraheretur versus C. Jungatur CF arcum AG secans in K; patet K aequivalere ipsi G, seu differentiam inter FG et FK esse ipsis differentibus incomparabiliter minorem. Itaque concipitur motus in AK tanquam compositus ex motu in AF et motu in FK. Porro EA revera est tangens, quia est recta, quae duo puncta infinitesimaliter distantia jungit. Suspicor Parentium fortasse Schediasma meum vidisse, antequam suas disquisitiones ederet, et substituto alio ratiocinandi modo voluisse dissimulare, unde profecisset, more suo. Tempus quo libellum suum edidit, fortasse suspicionem juvare poterit. Interim male ratiocinatur, si dicit (ut scribis) motum EA (in hypothesi ipsius) componi ex EB et AB, seu motum AG componi ex AD et AB (qua ratione ipse Parentius *in vim centrifugam tangentialem* recideret). Nam componitur potius hoc loco motus in AG ex motu in AF et in FG. Porro idem est, motum EA componere ex EB et AB et componere eum ex EM et MA. Deberet potius dicere, componi ex EM et MB, quia MB dupla est ipsius AB, quod ipse desiderat. Verum hoc quoque incongruum est, quia B non cadit in arcum. Ideo non video, quomodo ex suo explicando modo conficiat vim centrifugam explicandam esse per duplum sinus versi: errat, dum directionem sumit in EM perpendiculari ad radium CE, cum debeat sumi in chorda, qualis est EA. Itaque ad meam explicationem vel aequivalentem recurrendum est.

XLIX.

Hermann an Leibniz.

Tres circiter elapsae sunt septimanae, Vir Amplissime, ex quo humanissimae Tuae literae superiore Junio datae ad me perlatae sunt, ad quas promptius mihi responsuro obstiterunt curae domesticae, quae per aliquot dies studia mea interceperunt. Actorum mensem illum, ubi Parentianas disquisitiones recenseri significas, nondum vidi; Doctiss. Collectores non abs re fecerunt, si inhonestum Parentii morem excellentissimos quosque viros injuste sugillandi notarunt. Hic utique in suis Disquisitionibus inventoris speciem affectat, sed infortunio suo nonnisi talia producit, quae antea jam nota erant atque inventa, et quidem eo scribendi modo ut obscuritas atque paralogismi pari passu ambulent; maxime vero in iis, quae de conatu centrifugo conscribillavit, hoc elucet, praecipue in ultimo Schediasmate; nam in recensitis Disquisitionibus bis vel ter de viribus hisce agit, in quorum primo specimine tredecim Hugeniana theoremata bene quidem demonstravit, sed postquam Marchionis Hospitalii aut potius Cel. Joh. Bernoullii nostri Mss. vidit demonstrationes, in ultimo vero sibi ipsi contrarius conatum centrifugum duplo sinu verso exponit, quem antea simplici expresserat, quod proin ex Tuo Schediasmate hausisse eum suspicor, quamquam rei fundamentum minime sit assequutus. Nam licet Disquisitionum titulus adscriptum habeat annum 1705, plura tamen sunt, quae me movent, ut credam, hanc ultimam editionem biennio forsan tardius in publicum prodiise, quam titulus indicat, aut, quod potius crediderim, plures additiones, inter quas est specimen de Vi centrifuga, et Inquisitio Dioptrica in curvaturam radii solaris per medium inaequaliter densum transeuntis, meae quam habent Acta Erud. 1708 satis conformis, aliaque plura reperiuntur, veteri editioni anni 1705 biennio forsan post inseruisse.

Sed venio ad Tuam demonstrationem, Vir consultissime, qua Act. Erud. 1706 p. 448 perspicue demonstrasti, vim centrifugam arcualem duplam esse tangentialis, vel quod eodem recidit, hanc simplici, illam duplo sinu verso arcus infinite parvi exprimendam esse, quod verum nunc mihi videtur. Putabam equidem me in modum incidisse, quo probari posset, vim arcualem simplici sinu verso perinde ac tangentialem exponendam esse; sed ratiocinii

filum sequutus cum voluptate perspexi, demonstrationem meam cum Tua perfecte conspirare: ast vero mentem meam distinctius exponam. Pono mobile data quadam velocitate venire ad punctum A (fig. 58) non directione tangentis JA, sed directione arcus EA ejusve subtensae; evidens est mobile in motu suo perrecturum esse describendo spatium AF, ubi ex E pervenit in A eo tempore quo spatium EA absolvit (suppono enim AF et EA aequales esse) si nihil sit, quod motum impediat. Ergo necesse est, ut adsit vis coërcens, ne mobile motum suum in AF prosequatur, sed arcum EAG decurrat; et *haec vis coërcens* erit aequalis *vi centrifugae*. Restat igitur, ut inquiratur quanta haec vis esse debeat; ad id primum consideravi tangentem JD tamquam planum reflectens mobile ad partem contrariam ejus, in qua ad planum accesserat corpus: hoc est, si corpus in E incidat in planum JD directione et velocitate EA, posui planum ita repercutere corpus secundum directionum AG', ut angulus reflexionis DAG par fiat angulo incidentiae JAE: nam hujusmodi reflexionibus vidi circularem motum conservatum iri, quandoquidem latera EA et GA polygoni infinitolateri circulo inscripti ab arcubus EA et GA tantum quantitate ipsis arcubus inassignabili deficiunt. Porro quia motus in AG componitur motibus in AB et in BG vel AD, conclusi vim repercussionis, quae est ut AB, aequipollere conatui centrifugo. Sed non statim observavi repercussionis vim, quae mea quidem sententia recte exponitur sinu verso AB, non debere sumi *pro tota vi coërcenti* atque motum circularem conservanti, quam aequivalentem ponimus conatui centrifugo. Non tantum enim vis AM, qua mobile delatum in A juxta directionem radii a centro C recedere conatur, destruenda est, sed nova vis super accedat necesse est, ut mobile in arcu AG moveri pergat. Destructo enim motu AM, qui cum AD componere intelligitur motum AF, remanet adhuc motus tangentialis AD, qui arcualis reddi non potest, nisi de novo accedat vis AB quae cum AD componat motum arcualem AG; atque sic *Vis tota coërcens mobile*, ut arcum EAG aequabili motu percurrat, non est sola AB vel AM, sed aggregatum virium AB et AM, hoc est duplum ipsius AB. Sic ergo constat, vim arcualem duplo sinu verso exponendam esse, et tangentialem simplici, plane ut Tu primus docuisti. Nam omnes reliqui, quot sciam, Autores de vi centrifuga tangentiali egerunt, quod exinde maxime patet, quod tum conatum centrifugum docuerunt gravitati aequalem fieri, cum mobile circulatur velocitate ea, quam acquireret grave descensu per altitudinem quartae diametri circularis partis: quae regula vera tantum est, ubi de conatu tangentiali agitur, et falsa, si de arcuali; nam arcualis conatus excussorius aequalis fit gravitati, quando mobile in sua circumferentia aequabiliter movetur celeritate ea, quam grave acquireret post descensum a quiete per octavam diametri aut quartam radii partem. Parentius vero, qui conatum hujusmodi etiam per duplum sinum versum expressit, eandem nihilominus circulationis velocitatem invenit, quam Hugenius aliique qui tantum vim tangentialem contulerunt cum gravitate, sed ratiocinio usus a solis iis intelligendo, qui in Cabbala nonnihil versati sunt.

Tandem gratias Tibi ago, Vir Amplissime, quod quaeris quid agam, lucubratiunculas enim meas nunquam tanti facere auderem, ut eas dignas haberem, de quibus apud Virum in omni scientiarum genere consummatum mentio fieret. Ut tamen humanissimis tuis jussis morem geram, celare amplius non possum me in conscribenda Mechanica fluidorum nunc occupatum esse, quae si eventus votis meis respondebit, publicam lucem aspiciet. In hoc opere a simplicissimis Hydrostaticis principiis ordiar atque ad praecipua hujus aevi inventa ordine progrediar et curvaturas Lintei ab incumbente fluido, Veli vento inflati methodo facili atque sine calculo determinare satagam, ut perplura alia taceam, de quibus agendum mihi erit.

Celeberr. Noster Fardella jam ante quatuor septimanas Barcinonem profectus est. Plura non succurrunt. Vale, etc.

Patavii d. 29. August. 1709.

L.

Hermann an Leibniz.

Quatuor jam effluxerunt Menses, Vir Illustris, ex quo literas ad Dn. Zanovellum Venetias misi ad Te curandas, verum cum nihil interea responsi ab ipso obtinuerim, cui literas Tibi destinatas etiam atque etiam commendaveram, etiamnunc ignoro utrum epistolium meum ad Te delatum sit, eaque propter iteratas hasce exarandas duxi. In eo quod dixi epistolio, in sententiam Tuam libens transii, Conatum Centrifugum arcualem exprimendum esse du-

plo sinu verso arcus indefinite parvi, quando nimirum motus per arculum infinite parvum idem censeri possit ac motus per subtensam ejus. Hac enim conditione propositionis veritas extra controversiam posita mihi videtur. Sola mihi difficultas super hoc argumento superest, qui fieri possit ut primo statim momento a motu tangentiali, quo incipit arcualis conatus centrifugus, duplus fiat ejus qui obtinebat ab initio circulationis motu mobilis existente tantum tangentiali, aut potius conatu ad motum per tangentem. Instantaneus, ut ita dicam, transitus conatus centrifugi simplicis ad duplum nonnihil negotii mihi facessit; licet necessitatem consequentiae clare perspiciam, posito quod motus per arculum infinite parvum idem considerari debeat cum motu per subtensam ejusdem aut per latus alicujus polygoni infinitilateri circulo inscripti. Sed haec ipsa difficultas me hactenus impedivit, quo minus motus mobilis in circumferentia circuli pro rectilineis haberem, sed potius loco circuli parabolam substituerem, quam datus circulus, in quo mobile rotatur, in vertice oscularetur, ita quidem ut motus per arculum parabolae infinite parvum vertici principali adjacentem haberi posset pro motu circulari, quandoquidem dictus parabolicus arcus ex natura osculi confundi intelligitur cum arcu circulari indefinite parvo. Hac enim ratione vidi, si mobile circuletur velocitate tanta, quantam acquisivisset in fine casus per quartam Parametri Parabolae partem, fore conatum centrifugum conatui gravitatis aequalem, et cum hoc casu Parameter Parabolae circulum osculantis aequalis sit hujus diametro, hinc constitit mihi veritas Theorematis Hugeniani ex iis, quae calci Operis de Horologio oscillatorio apposita sunt. Unde si Ampl. Tuae placeret demonstrare, quod motus arcualis idem sit cum motu per latus Polygoni infinitilateri circulo inscripti, omnis mihi scrupulus hac in re sublatus esset.

Sexennium jam praeterlapsum est, ex quo occasione quadam mihi oblata cogitare coepi de Problemate inveniendi curvam, quae sui ipsius evolutione se ipsam describit, cujus meministi in aliqua ad Newtonum Epistola, quae cum aliis Tomo tertio Operum Wallisii inserta est; atque tunc statim comperi solam esse Cycloidem, quae se ipsam inverso aut subcontrario situ producat. Inveni praeterea aliam curvam, quae idem praestat, sed alio modo nempe se ipsam generat sui evolutione situ directo, adeo ut crescente radio osculi in curva evoluta simul etiam crescat radius osculi alterius, quae hujus evolutione describitur. Atque haec curva ejus est naturae, ut ejus radius osculi in quovis curvae puncto aequalis sit longitudini arcus curvae respondentis aucti linea data, quae curva, licet algebraica non sit, admissis tamen aut concessis curvarum quadraturis construi potest; et constructio dependet a quadratura circuli et hyperbolae. Methodus mea, quae non tantum ad haec problemata extenditur, sed etiam inservit inventioni Curvarum, quae sui evolutione non easdem, sed similes curvas producant, paucis huc redit: Sit (fig. 59) AB curva genita evolutione alterius IK haecque ipsa IK orta intelligatur evolutione curvae $\alpha\beta$; jam si curva $\alpha\beta$ similis et aequalis fuerit primae AB, curva IK generabit sui evolutione et generabitur a curva AB vel $\alpha\beta$. Sint ergo AB et $\alpha\beta$ ad eundem axem $A\alpha$ exstructae identicae, eritque $AC = \alpha k$, $BC = \beta k$, et triangula BDE, $\beta\delta\varepsilon$ erunt similia et aequalia, quibus etiam simile existet triangulum GHI. Quibus positis est etiam $B\beta = Ck = A\alpha$ ac propter angulum rectum $BI\beta$ triang. $BI\beta$ simile triang. BDE. Unde vocando $A\alpha = B\beta = a$, $AC = x$, $BC = y$, $AB = s$, radius osculi $BI = z$, $BE = dx$, $DE = dy$ et $BD = ds$; unde $BD\,(ds) \,.\, DE\,(dy) :: B\beta\,(a) \,.\, BI \left(z = \frac{ady}{ds}\right)$. Sed ponendo elementa curvae ds constantia, invenitur generaliter in omni curva $z = \frac{dsdy}{ddx}$; ergo $\frac{ady}{ds} = \frac{dsdy}{ddx}$, et $addx = ds^2$, hoc est $adx = sds$ vel $2ax = ss$, quod indicat curvam esse Cycloidem, cujus Circulus Generator diametrum habeat $= \frac{1}{2}a$. Sed si curvae AB et $\alpha\beta$ (fig. 60) non sunt aequales, sed tantum similes, linea jungens puncta B et β, ubicunque haec accepta fuerint, producta in idem punctum Z lineae AZ incidet. Unde nominando $AZ = a$, $\alpha Z = b$, $A\alpha = c$, $ZB = y$, erit $B\beta = \frac{cy}{a}$, $DE = dx$, $BE = dy$, $BD = ds$, erit iterum $BD\,(ds) \,.\, DE\,(dx) :: B\beta \left(\frac{cy}{a}\right) \,.\, BI \left(= \frac{cydx}{ads}\right)$. Sed posita adhuc BD constante erit BI radius osculi curvae quaesitae $AB = \frac{ydxds}{dx^2 - yddy}$; ergo $BI = \frac{cydx}{ads} = \frac{ydxds}{dx^2 - yddy}$; unde $cdx^2 - cyddy = ads^2$ vel quia $b + c = a$, $cdx^2 - cyddy\,(= cds^2 + bds^2) = cdx^2 + cdy^2 + bds^2$, $-\,cdy^2 - cyddy = bds^2$, cujus integrale est $-\,cydy - bsds$ et hujus integrale

$aac - cyy = bss$. Hinc deduco aequationem curvae differentialem $dx = \frac{dy\sqrt{ayy - aab}}{\sqrt{aab - byy}}$, quae est aequatio epicycloidis cujusdam.

Audio Cel. Frid. Hofmannum suam Medicinae cathedram in Academia Halensi vacantem reddidisse. Novi Virum quendam in Botanicis, Historia naturali et omni reliqua solidiore Medicina eximie versatum et Matheseos non prorsus ignarum, qui non sine egregio decore Universitatis illius vacantem Professionem exornaturus esset, si ad eam vocaretur. Is est Joannes Scheuchzerus, Medicus Tigurinus, egregiis jam speciminibus Botanicis clarus, cujus honorifica fit mentio in Commentariis Academiae Regiae Parisiensis, ad quam aliquas subinde mittit lucubrationes perinde ac Frater ejus natu major Joh. Jacobus Scheuchzerus. Et junioris Scheuchzeri merita Illustri Abbati Bignonio ita jam ab aliquot annis innotuerunt, ut nemo melius de Viri profectibus judicare possit, qui frequentes ad ipsum dat literas. Hic tandem epistolio metam figo. Vale etc.

Patavii 13 Novembr. 1709.

LI.

Leibniz an Hermann.

Non est quod novae subdubitationes circa conatum centrifugum nos morentur. Nil mirum, in aliquo casu inter simplum et duplum non posse assignari medium, cum inter finitum et infinitum non possit assignari, ut in transitu ab asymptota ad Hyperbolae ordinatam. Sed et calculus ostendet exemplum transitus ex certo capite continui, ubi tamen statim trajicitur a 2 ad 1. Esto $y = 1 + x^0$, ajo y semper esse 2, nisi in momento quo x evanescit, quo casu fit $y = 1$; nam $x^0 = 1$, excepto casu, quo fit $x = 0$, cum sit $0^0 = 0$. Nihil etiam causae est, cur dubitemus utrum conatum arcualem in circulo per rectas explicare liceat; neque enim ad veritatem refert in curvis, utrum puncta earum inassignabiliter distantia per rectas, an per alias curvas qualescunque, veluti arculos circulorum vel parabolarum vel aliarum linearum conjungas cum linea, quae prodit, quacunque hujusmodi hypothesi semper eodem recidat, nullo assignabili discrimine; etsi enim multum ad commoditatem referat aliquando quid ..... et una methodus utilior interdum sit quam alia, nunquam tamen, si recte procedamus, pugnantia concludentur. Id memini me aliquando Dn. Bernoullio in aliquo cognato huic exemplo, actu ipso ostendere. Si tales scrupuli locum haberent, scientiae certitudo labefactaretur.

Elegantia mihi videntur, quae de Curva se ipsam aut similem sibi per evolutionem describente habes, tametsi prima specie non videaris quaesitum concludere. Ponis curvam $\alpha\beta$ evolutione sui describere curvam IK, et hanc rursus evolutione sui describere curvam AB, congruam curvae $\alpha\beta$, et hinc concludis, IK esse quaesitam seu IK congruere ipsi AB, quod non videtur sequi. Sed rectificatur consequentia, si ponamus AB esse quaesitam quae describatur ab IK; hoc posito etiam IK describi ab $\alpha\beta$ congrua ipsi AB. Ergo si generaliter problema, quod proponis, solvamus, continebitur in ea solutione etiam problema quod intendis; etsi problema sit determinatum, coincidet cum eo quod intendis. Ais aequationem $dx = dy\sqrt{(ayy - aab,:,aab - byy)}$ pro curva similem evolutione sui exhibente esse Epicycloidis cujusdam, id explicari desidero, si vacat. Pendere sane videtur a curvae alicujus extensione. Aliquando etiam a Te (si vacabit) obtinere spero Analysin curvae, se ipsam non inverse, sed directe evolventis.

Dn. Joh. Scheuchzerus mihi fuit ignotus aut non observatus, sed ... judicio eximium esse non dubito. Dn. Hofmannus tunc cum in Aulam Berolinensem transiit, professionem Halensem sibi adhuc reservari curavit.

LII.

Hermann an Leibniz.

Humanissima eaque gratissima epistola Tua 24. Octobris his demum diebus mihi reddita est, et quidem postridie illius diei, quo aliquod epistolium ad Amplitudinem Tuam dedi, in quo ad praecedentes meas literas nihil adhuc responsi me accepisse significavi. Nunc vero oblata hac occasione Nobilissimi Burneti, Rev. Episcopi Salisburiensis Filii natu majoris, in rebus mathematicis et praesertim reconditiore Geometria eximie versati, ad postremas Tuas respondeo, sed praepropere admodum, cum in transitu tantum suo per hanc urbem mihi significarit, Hanoveram se cum Fratre et Ephoro suo Massonio, Viro Clarissimo, concessurum esse, cultum suum denuntiaturum Ampl. Tuae tanquam omnis solidioris Eruditionis Fonti inexhausto.

Sed venio ad humanissimas Tuas literas. Parentio satis familiare est, ut aliorum inventa incomto verborum mangonio sua facere studeat, quanquam ubique fere dissimulet aliorum scripta et meditata sibi antea innotuisse; atque ita eum facere utique oportebat, ut plagiarii nomen a se abigeret. Interim tamen de se nimis magnifice et aliis nimis abjecte sentire videtur, dum putat se apud alios fidem inventurum, quando persuadere conatur proprio se marte in ea incidisse, quae ex aliorum scriptis ipsum hausisse et in pejus mutasse omnibus constare potest.

De Villemotii libro nihil aliud mihi videre contigit, nisi magnificum Fontenellii elogium in Historia Academiae Parisiensis anni 1707; librum tamen propediem me accepturum spero, quem statim atque nactus fuero avide perlegam et quid mihi de eo videatur, statim significabo. De hoc tamen autore neque Dn. Burnetus qui eum legit, demonstrandi morem probat. In opere quod meditor Hydraulico, in quo omnia a primis principiis repetam, etiam tractare constitui de cursu fluminum, qua in re Disputationes inter Celeberr. nostrum Gulielminum et Cl. Papinum mihi optime notae sunt, sed puto in nonnullis utrinque peccatum esse, quanquam angustia temporis non permittat, ut hic exponam, ubinam praeclari hi viri a veritate descivisse mihi videntur. Ego saltem scopulos illos sollicite devitare studebo, in quos impegisse videntur egregii viri; pleraque per Geometriam linearem absque calculo absolvere conabor, ut ab Italis legi possit, quorum multi sunt, qui in Geometria utcunque versati, analyseos differentialis mysteria non satis callent, ut liber per calculum procedens ab ipsis intelligi possit. Dabo etiam modos inveniendi Velariam et Curvam lintei absque calculo per simplicem Geometriam, sed quae iis fundamentis nituntur, quibus differentialis calculus aut etiam tota Antiquorum methodus exhaustionum superstructa est: et ea quam sequor methodus forte non contemnenda videbitur, quod ejus beneficio regressus patet ab aequationibus differentio-differentialibus ad aequationes differentiales primi gradus, quando