XXIV.

Hermann an Leibniz.

Quod demonstratio mea formulae Anglicanae pro rectificatione Circumferentiae Circularis placuerit, est quod mihi gratuler, optimeque scio primam rectificationem Circuli Amplitudini Tuae deberi, expressionem volo dicere valoris circi per tangentem.

Pro variis novis literariis, quae Ampl. Tuae mecum communicare placuit, gratias ago maximas, nullusque dubito quin Clarissimi Guglielmini tractatus de Salibus egregium sit opus et acumine suo dignum, sed hujusmodi libri apud nos plane non inveniuntur, neque adhuc invenire potui tractatum ejusdem de Motu fluminum, quem Parisiis obiter tantum apud Clariss. Varignon perlustravi et egregia continere credo.

Methodum de maximis et minimis in investigandis punctis reversionum optime adhiberi posse, extra omne dubium positum esse videtur, cum methodus Huddeniana, quae nonnisi specialissimus est casus differentialis calculi, eo quoque pertingat; quod manifeste patet in Curvis saccum habentibus, quales Amplitudo Tua concipit. Sit v. gr. $y^3 = axx$, quae aequatio designet curvam (fig. 50) ABCD, quae mutatur in (fig. 51) curvam ABGCD, si insuper $BC = b$ et aequatio $y^3 = axx - b^3$; jam patet partem BGC habere maximam applicatam velut FG, quae determinabit punctum regressus evanescente BC aut b aut appropinquantibus sibi invicem punctis flexus contrarii B et C. Celeberr. postea Bernoullius suas super hac eadem re aperuit cogitationes, quas jam a compluribus annis ad Dn. Marchionem Hospitalium se misisse dicit; is ostendit in puncto reversionis C esse infinitas tangentes, quod ope Curvae (fig. 51) ABGCD facile demonstratur, nam pars BGC infinitas tangentes admittit et .... omnium possibilium directionum; evanescente autem b aut BC, curva ABGCD mutatur in fig. 50 et aequatio $y^3 = axx - b^3$ in $y^3 = axx$, quae prius proponebatur. Idem hac quoque ratione ostendit: Sumit in axe FC Curvae ABC (fig. 50) punctum F pro initio abscissarum sibique proponit inveniendum punctum D, in quo subtangens sit ad applicatam in ratione 1 ad n, sitque $FC = c$ eritque aequatio $a \times \overline{x-c}^2 = y^3$, unde $2adx, \overline{x-c} = 3yydy$, unde $3yy.2a, \overline{x-c}$ :: dx.dy :: 1.n, ergo $3nyy = 2ax - 2ac$ vel $y = \sqrt{\frac{2a}{3n} \times \overline{x-c}}$

vel $\frac{8a^3}{27n^3} \times \overline{x-c}^3 = a^4 \times \overline{x-c}^4$ aut $\overline{x-c}^3 = \frac{27n^3a}{8} \times \overline{x-c}^4$, quae aequatio reducta cubica erit ejusque radices puncta D determinabunt, ubi subtangens sit ad applicatam in ratione 1 ad n; verum in illa aequatione Cubica binomium $x - c$ quoque radix erit, cum tota aequatio per id dividi possit, unde sequitur $x = c$, ex quo sequitur punctum C quaesito quoque satisfacere.

Avidus expecto Responsionem Tuam in Actis, quam ad Gregorii objectiones contra vortices reponere voluisti. Evolvi Gregorii Astronomiam, sed non multa nova in ea inveni, mihique lapsus in eo videtur in eo quod asserat Ellipsin Cassinianam eam proprietatem habere, ut areae circa unum focum sint proportionales angulis respondentibus circa alterum, facile enim ostendi potest paralogismus in demonstratione sua commissus. Celeberr. Newtoni tractatus de Coloribus latio donatus prodiit, quem tamen nondum vidi. Haud ita pridem prodiere quoque anni 1704 et 5 Commentariorum Academiae Parisinae, in quibus egregia habentur elogia Dn. Dn. Marchionis Hospitalii et Jac. Bernoullii a Dn. de Fontenelle edita, quorum prius tamen non omnimode Dn. Bernoullio arridet.

Caeterum Deum precor ut auspicatus hodie annus 1707[us] cum longa et haud interrupta serie reliquorum omni modo faustum felicemque esse velit Amplitudini Tuae, super quam toto ejus decursu benedictionum suarum divinarum thesauros ubertim effundat, Eamque nobis quam diutissime salvam et incolumem servet. Vale etc.

Calendis Januariis 1707.

Clarissimus noster Bernoullius Ampliss. Virum plurimum salvere jubet hacque occasione omnia ipsi bona quoad animam, quoad corpus apprecatur; is satis bene valet, quanquam tussis illa qua jam pluribus mensibus laborat, nondum penitus cessarit.

XXV.

Leibniz an Hermann.

Neque mihi ab aliquot mensibus doctissimus Fardella respondit, ut propemodum verear, ne quid ei acciderit adversi; itaque ejus rei gratia ad Amicum Venetum scripsi. Marpurgensis Professionis causa obiter (in Tui gratiam) ex Celeberrimo Papino olim quaesivi, an ea vacaret; respondit negando. Credo salarium ejus accipere, absentem licet. Itaque ne aegre fiat egregio Viro, ante omnia discendum erit, an voluntas sit Serenissimo Landgravio, vel ipsi vel novo Professori supplemento prospiciendi de suo. Scis non facile augeri fundos Academiarum, Principes tamen extra ordinem succurrere non raro. Itaque cauto opus erit, recteque facies, si sententiam Aulae ante omnia per amicum explores.

Intelligo etiam in Anglia quendam de paralogismo admonuisse Gregorium, cum Cassinianas Ovales habere putavit angulos ad unum focum proportionales areis ad alterum focum. Mihi vix amplius his exerceri fas est. Itaque gratum facies, si indices sedem erroris; putem modum hanc quae id praestat curvam describendi inveniri posse: sed res tanti non est, quoniam si haberetur, non prodesset, neque enim id curat natura in liberis motibus, ut circuli describantur, in quibus anguli sunt ut tempora, quod nos ob compendium calculi vellemus.

Nescio, an Tibi aliquando significaverim, quantopere optarem ab aliquo demonstrari Regulam ab Harrioto olim inventam (unde videtur descripsisse Cartesius), quod signorum mutationes in aequationibus non nisi radices reales habentibus sint tot, quot radices verae, et signorum consecutiones tot, quot radices falsae. Harriotus eam inductione veram comperit. Cartesius rationem ejus nullam assignavit, nec quisquam post ipsum. Is non mediocris est analyticae scientiae defectus. Si haec demonstrari posset propositio: aequatione multiplicata per veram (falsam) radicem, unitate augeri numerum mutationum (consecutionum) in signis qui prius erat, etiam propositum theorema demonstratum foret.

Dn. Bernoullium nostrum morbo laborare ignorabam; rogo, ut ei a me vicem voti reddas, et cum omnia fausta, tum in primis prosperam valetudinem meo nomine a Deo apprecere, plurimum enim reipublicae interesse censeo, ut nobis conservetur. Idem Tibi precor, Vir clarissime, ut quam diutissime publicae rei prosis, nam et a Te praeclara quaeque nobis polliceor.

Nuper Dn. Naudaeus mihi retulit commercium, quod Tecum colebat, nescio qua de causa silentio Tuo cessasse. Mihi semper visum est diversum sentire duos incolumi amicitia posse. Est in eo Viro laudabile studium et veritatis et pietatis. Plerique solemus

θέσεις φυλάττειν, quas juvenes accepimus, et hanc veniam petimusque damusque vicissim. Apologiam nostram contra ea, quae Bernardus nuper suos apud Batavos Gallico Diario inseruerat, qualem ego, probante Dn. Bernoullio, summiseram, jam ut intelligo illic legitur, nam nondum vidi. Commentarios Academiae Regiae Scientiarum Parisinae ad annum 1704 pertinentes vidi, sequentes nondum, scilicet rarius nobis innotescit quae Gallia et Italia praestant, eaque in parte vestra melior conditio est, eoque magis obstrictus ero, si qua hujusmodi subinde docebis. Video Dn. Parent Academiae illius socium multa solere dare in illis Commentariis, quae subinde mihi dubitatione carere non videntur ut La-Hiriana. Ejus Elementa mechanica aliquando attentius examinare voluerat Dn. Bernoullius; an hoc facere vacaverit nescio. Vale, et nos ama etc. Dabam Berolini 18. Januar. 1707.

XXVI.

Hermann an Leibniz.

De Gregorio mirum est ipsummet paralogismum suum non advertisse nisi monitum, cum statim oculis pateat. Is volebat demonstrare sequentem propositionem, pag. 217 Astr. Phys. et Geom. Elem.: Supra Ovali ALDB (fig. 52) aucto angulo AFL aequalibus incrementis LFM, MFN, areae ALG incrementa simul facta, nempe LMG, MNG etiam aequalia sunt. Hanc ita probare contendit propriisque ipsius utar verbis. Rectae, inquit, FM, GL se intersecant in V, rectaeque FN, GM in T. A puncto L ad LM demitattur normalis LO, ab M ad FN recta MP, et in LG recta MR; ab N denique in MG normalis NK. Concipiantur porro anguli LFM, MFN minimi, unde anguli LGM, MGN minimi erunt: ideoque rectae FL, FM, FN erunt fere inter se parallelae, sicut et GL, GM, GN; curvaeque pars LMN a recta non abludet, unde Triangula LVM, MFN rectilinea sunt et aequiangula et proinde similia. Et ob aequales angulos LFO, MFP triangula rectangula etiam sunt similia; et igitur FM.FL :: LO.MP; et ob similia △ LVM, MFN, LO.MP :: MR.NK; unde FL.FM :: MR.NK. Sed ut prius ostensum est ex natura hujus Figurae FL.FM::GM.GL et igitur GM . GL : : MR . NK, et proinde Triangula LMG, MNG aequalia sunt. Q. E. D.

Haec est egregia Dn. Gregorii demonstratio. Interim tamen longe alii curvae illa proprietas convenit, quam huic ovali Cassinianae competere putat. Nam existentibus x abcissa, y ordinata, a et b distantiae focorum ab alterutro verticum, erit aequatio differentialis Curvae illi satisfaciens, in qua areae circa unum focum proportionales sint anguli circa alterum, hujusmodi $ydx - xdy - ady = \frac{bbydx + b^3dy - bbxdy}{bb - 2bx + xx + yy}$, in qua si separari possent differentialia et in determinatae, solutum esset Problema; interim tamen plusquam probabile est talem Curvam esse Mechanicam. Dominus Gregorius non satis cautus infinite parva saepenumero tractare videtur; sic enim etiam in Schediasmate suo de Catenaria, quod Anonimus quidam solidissime refutavit, per paralogismum Act. Lips. 1698 pag. 313 in inquisitione radii osculi ad veram conclusionem pervenit.

Quantum ad theorema Harrioti circa radices veras ex mutatione signorum in aequationibus dignoscendas, quodque Cartesius in sua Geometria quoque usurparat nulla addita demonstratione, miror utique a nullo adhuc demonstratum esse. Verumque est, theorema demonstratum fore, si probari posset, quod *multiplicata aequatione per veram aut falsam radicem, unitate augeatur numerus mutationum aut consecutionum signorum qui prius erat*, si nullae adsint radices imaginariae; nam fieri potest ut aequatio nil nisi radices falsas habens, multiplicata per radicem veram aequationem producat, in qua sint merae mutationes in signis, nullae autem consecutiones; sed quando hoc accidit, judicari potest, aliquas in aequatione proposita contineri radices imaginarias. Cogitavi nonnihil de hoc theoremate et aliquid observavi, quo ut spero probari posset veritas propositionis, sed tempus mihi nondum fuit, hoc argumentum ea qua debet ἀκριβείᾳ excutere, proxima tamen occasione quando Frater meus Norimbergam iter est facturus, fusius quae observavi Amplitudinis Tuae judicio submittam, literasque ad Dn. Naudaeum dabo quas Norimbergam usque feret Frater et dehinc Berolinum curabit. Doleo magnopere Cl. Naudaeum sinistram de me opinionem concepisse ex meo grandiusculo silentio ortam et gaudeo vicissim ultimas meas literas Septembris anni superioris quas in nuperis ad me suis accepisse

nuntiat, suspicionem ipsi exemisse. Et sane silentium meum defectui potius occasionum scribendi, quam quod ille deversa a me sentiret tribuendum est, imo et ego ridiculum esse duco ob diversitatem opinionum cuiquam succensere; hoc saltem egregio illi Viro a mea parte neutiquam est metuendum, cum perfecta inter nos sit doctrinae convenientia, et si qua in re ab ipso dissensi, inde venit, quod ille egregium quendam Virum, theologum de Eclesia Neocomensi optime meritum, quibusdam sententiis et opinionibus heterodoxis imo et hereticis insimularet, a quibus immunem illum esse etiamnum credo. Amplitudo Tua judicabit an ideo amicitiae vincula dissolvere potuissem cum Dn. Naudaeo, cujus Pietatem, Eruditionem et insignem morum Suavitatem suspicio et maximi facio; imo operam semper sum daturus, ut tam proficuam mihi amicitiam quibuscunque modis mihi conservem. Interim si quid aegre ferrem, hoc esset quod tantas laudes tantaque encomia in me profundat, ut majora in primarium Eruditi orbis Virum derivare vix posset.

Dn. Parent multus est in theoria frictionum, quam Amontonius prius experientia determinaverat; interim nondum satis patientiae mihi fuit tam stupendos calculos percurrere, contentus ipsam methodum aut calculi fundamentum nosse, totum in eo consistens ut frictiones deducat a majore aut minore pressione eamque in machinis consideret, reliquaque omnia sunt satis vulgaria, imo a paralogismis eum penitus immunem vix credo; ejusque αὐταρκειαν miratus sum Hugenium circum quoddam theorema de Vi Centrifuga reprehendentem, dum ipsemet ea in re gravem committeret lapsum. In *Elementis suis Mechanicis* nihil habet sibi peculiare praeter discursus obscuritatem, nam omnia quae ibi profert, jam prius erant inventa, interim omnia sibi vendicat, ne quidem principio illo motus compositi excepto, cui Dn. Varignon totam suam Mechanicam inaedificavit, adeoque in praefatione dicit sibi plane ignotum fuisse, quod jam antea Dn. Varignon eo principio usus esset. In septimo capite IV. Partis horum Elementorum de Curva Catenaria agens tandem per nescio quas ambages ad notissimam proprietatem devenit, qua fit ut $\frac{\int yds}{s}$ = Maximo, sumendo s pro Curva aut longitudine Catenariae et y pro applicata, et tandem concludit: *Mais je laisse cecy aux combinaisons integrales des Algebristes.* Quasi hoc indignum esset, cui se applicaret.

In Commentariis 1705 pag. 254 extat Specimen Dn. de Lagny quod inscribit: Supplement de la Trigonometrie contenant deux Theoremes Generaux sur les Tangentes et Secantes des angles multiples, ubi duas formulas generales exhibet pro Tangentibus et Secantibus conformes iis quas in Actis 1706 Mense Jun. dedi, antequam Commentarii comparuissent. Is multum insudat in laudandis suis theorematis, atque miratur quod nemo adhuc extiterit qui in ea inquireret, putatque Calculi prolixitatem et difficultatem ab hac inquisitione Geometras absterruisse, aut forsan quod existimarent ex data relatione sinuum tangentes et secantes ultro fluere, sed tandem concludit: Mais, dit-il, il y a une difference infinie entre trouver de cette maniere la Tangente et la Secante d'un arc en particulier, et trouver le rapport general de Tangentes et des Secantes à l'infini: et si l'on cherchoit ce rapport par celui des sinus, on tomberoit necessairement dans des formules d'incommensurables qui n'auroient rien ni d'elegant ni de praticable, et paulo inferius: tout cela, dis-je, fait voir ordinairement que la methode des cordes n'a rien de commun avec celles des Tangentes et des Secantes. Interim tamen has ipsas formulas deduxi etiam ex formulis sinuum, quas in Actis 1703 demonstratas dedi, et ostendi in epistola ad Dn. Varignon expressionem Tangentium et Secantium omnino elici debere ex expressione sinuum, nullasque inde formulas irrationales nihil elegantiae et facilitatis prae se ferentes, ut asseveranter Dn. Lagny dixerat, prodire. Adeoque demonstravi inventionem Tangentium et Secantium non nisi Corollarium generalis expressionis sinuum, contra quod Dn. Lagny putabat.

Cl. noster Bernoullius nunc optime valet, Tibique, Vir Excellentissime, pro nuncupato de valetudine sua voto gratias agit maximas, et Tuae Ampl. inconcussam sanitatem et omnigenam felicitatem apprecatur, cui et meum adjungo votum pro Ampl. Tuae incolumitate gratiasque rependo humillimas pro sua insignissima erga me humanitate et benevolentia, cujus tot luculenta hactenus jam dedit testimonia, quae quoad vivam, altae menti reposta manebunt. Dn. Bernoulli nuperrime mihi retulit Acta Societatis Berolinensis, cui Societati tanto cum splendore praesides, edi debere, et Ampl. Tuam mihi quoque libertatem concedere quaedam mea specimina eo sum-

mittere iisdem inserenda; hoc tanto beneficio utar cogitando inter Parisiensis Academiae Commentarios non omnia Schediasmata tam exquisita continere inventa, vitio mihi eo minus versum iri, si Helvetius ego, quos Galli despicere saepissime solent tanquam crasto aëre natos, tenuia admodum inventa communicem. Dn. Gregorius de Problemate astronomico inveniendi stationes Planetarum agit in sua Astronomia et non nisi orbitas circulares et concentricas in eodem plano jacentes adhibuit, quod est facillimum: ego vero Problema generalissime solvi, supponendo orbitas Ellipticas ad invicem in datis angulis indicatas, Planetasque circa communem focum areas describere temporibus proportionales, quod Problema solutum ad Ampl. Tuam mittam, ut obsequium meum utcunque testarer, qui me nunquam non exhibebo etc.

Basileae 19. Martii 1707.

XXVII.

Hermann an Leibniz.

Postremae tandem Cl. Abbatis Fardellae litterae mihi felicem negotii nostri exitum nuntiant, de quo Amplitud. Tuam illico certiorem esse faciendam officii mei esse putavi.

Nullus dubito quin Ampl. Tua scriptum meum circa stationes Planetarum acceperit a Dn. Naudaeo, cui id summiseram Ampl. Tuae tradendum. In eo Schediasmate orbitas Ellipticas projeci in Circulares, quod omnino fieri potest, si nulla inclinationis orbitarum ratio habeatur; verum si et inclinationes considerentur quales astronomi tradunt, ambae orbitae hac ratione non semper in Circulares transmutari possunt eo projectionis genere, quod in Schediasmate explicui, sed una existente circulari post projectionem contingit fere in omnibus Planetis ut altera sit Elliptica. Hoc tamen methodo meae nihil plane derogare potest, cum in orbitis ellipticis aeque succedat ac in Circularibus. Modus Projectionis quo usus sum, me quoque ad infinitas lunulas ellipticas manuduxit, omnes perfecte quadrabiles, et ad alia non inelegantia. Sit exempli gratia ABDE (fig. 53) Ellipsis quaecunque, cujus diametri conjugatae AD, EB, ex centro Ellipsis C per medium lineae AB, ut F, ducatur linea CFG factaque CF = GF diametris conjugatis AB, GC describatur ellipsis altera AGBC, erit lunula elliptica AHBGA aequalis Triangulo rectilineo ACB: immo omnia quae in lunulis Hippocraticis inventa sunt de partialibus quadraturis, ad lunulas quoque ellipticas analogice accommodari poterunt.

Marchionis Hospitalii Opuscula postuma et Patris Renoulti Algebra brevi lucem publicam aspicient. Dn. Stancarius mihi scripsit Bononia, Cl. Manfredum omnia quae in Actis Erudit. Lips. sine demonstratione extant specimina, suis demonstrationibus firmata esse editurum idque opus sub prelo jamjam sudare. An scopum autem attigerit, ipsum opus manifestabit; oportet saltem ut non tantum in Calculo differentiali sit versatus, sed ut multa quoque integralis calculi arcana ad manus ipsi sint. Hisce vale etc.

Basileae 11. Maji 1707.

Es folgt hier ein Brief Hermann's, datirt Basileae 18. Maj. 1707, der nur Mittheilungen über seinen Abgang nach Padua enthält.

XXVIII.

Leibniz an Hermann.

Scriptum Tuum elegans de Stationibus Planetarum Dn. Naudaeus mecum communicavit; inseretur Commentariis nostris, quorum specimen hoc anno prodibit, ut spero. Interea non sine laetitiae sensu literas Tuas accepi, quibus rem Patavinam confectam narras: eo nomine et Tibi et Venetis gratulor. Scripserat ad me Cl. Fardella ante septimanas aliquot rem conclusioni vicinam esse, atque affectam: nunc confectam gaudeo. Quod in literis Tuis de projectionibus Ellipsium scribis, id in postscripti modum adjici poterit priori Schediasmati Tuo. Aliqua fortasse nostris in Actis extantia Cl. Manfredus demonstrabit; an omnia, dubito; interim fatendum est Inventa demonstrare plerumque plus laboris requirere, quam ingenii, praesertim cum demonstrationes non peculiari quadam arte commendantur. Doce, quaeso, quis Dn. Stancarius Bononia ad te scribens. Differentialem calculum scis a me non aliter distingui a

summatorio, quam multiplicationem a divisione, cum alter sit regressus alterius. Fatendum ergo est calculum, in quo differentialibus, seu infinitesimalibus utimur, adhuc esse imperfectum quemadmodum et...... Eximium Virum Dn. Bernoullium nostrum rogo a me salutes. Interea rem ex sententia gere, et me ama. Dabam Berolini 26. Maii 1707.

P. S. Has literas scripseram Berolini, sed distractus expedire intermiseram; nunc reversus domum inter schedia mea repertas absolvo, Tibique negotium Patavinum confectum gratulor. Nam rem in Senatu potentissimae Reipublicae conclusam ex voto, eximius Abbas noster mihi significavit. Ejus certe indefessae diligentiae optatus rei exitus debetur. Ego Deum precor, ut Tibi eam evocationem faustam et felicem et in publicum fructuosam esse jubeat. Dabam Hanoverae 16. Junii 1707.

Ingeniosissimi Bernoullii nostri tussis me male habet, et in metum conjicit. Rogo, ut eum officiosissime a me salutes, hortersique ad valetudinis curam. Si tussis ab acredine humorum orta est, aquosa et diluentia opponenda censerem. Nullas unquam a Dn. Iselio literas vidi.

XXIX.

Leibniz an Hermann.

Cum proximo cursore vix domum reversus ad Te scriberem, nondum Tuas binas acceperam, quae apud amicum interim cum aliis quibusdam ad me destinatis hic latuerant; priores datae sunt 19. Martii, posteriores decimo octavo Maji die. De rebus Marpurgensibus nihil dico, Patavina confecta, unde saltem major fama et plausus. Cl. Fardellam diu ex gravi morbo decubuisse, interim didiceris; et rerum Academicarum curas distulerant graviores, quibus potentissimae Reipublicae Senatus premebatur. Suaserim ut non magnopere formam evocationis cures, sufficit decretum in Senatu factum, et a Secretario missum; sed dependebit res ab exemplis aliorum in Academiam Patavinam evocatorum, nam si aliis missae sunt literae evocatoriae Excellentissimorum Reformatorum, nec Tibi credo negabuntur.

Gratissimum est, quod nonnihil considerasti Parentianas meditationes, quae vereor ne sint plenae paralogismis, id enim suspicor ex illa gloriolam captandi aviditate, quam praefatione Elementorum suorum prodit. Itaque, si quando Tibi attentius in haec Elementa inspicere vacabit, judicium Tuum intelligere gaudebo. Dn. Lagny et alii Galli, Varignonio excepto, per ambages adhuc quaerunt, quae Tibi nobisque sunt explorata. Tua de Stationibus planetariis meditatio nostris Miscellaneis inseretur, una cum additione ex literis ad me Tuis. Ea res occasionem mihi dedit curandi, ut Te quoque Societas nostra potiatur.

Operae pretium est Harrioti theorema demonstrari, nam multa inde egregia colligi poterunt. Exempli causa, sit quaecunque formula habens meras radices falsas $10x^n + 11x^{n-1} + 12x^{n-2} + 13x^{n-3} +$ etc. et multiplicetur per $20x - 21$, prodibit

$$\begin{array}{llllll} 10.20x^{n+1} & + 11.20x^n & + 12.20x^{n-1} & + 13.20x^{n-2} & + 14.20x^{n-3} & \\ & - 10.21 & - 11.21 & - 12.21 & - 13.21 & \\ & + 15.20x^{n-4} & + 16.20x^{n-5} & & & \text{etc.} \\ & - 14.21 & - 15.21 & & & \end{array}$$

Cum ergo primus terminus producti sit affirmativus, et ultimus negativus, et per Theorema Harrioti non nisi una mutatio signorum in producto esse possit, sequitur, uno ex terminis producti existente affirmativo, omnes praecedentes esse affirmativos, et uno ex iisdem existente negativo, omnes sequentes esse negativos. Hinc quantitates $\frac{11}{10}$, $\frac{12}{11}$, $\frac{13}{12}$, $\frac{14}{13}$, $\frac{15}{14}$, $\frac{16}{15}$ etc. eam inter se habitudinem habebunt, ut si una, velut $\frac{14}{13}$, sit major quam $\frac{21}{20}$, etiam praecedentes, velut $\frac{13}{12}$, sint majores vel saltem non minores quam $\frac{21}{20}$. Ergo $\frac{13}{12}$ non potest esse minor quam $\frac{14}{13}$. Et cum eaedem quantitates similiter eam inter se habitudinem habeant, ut si una, velut $\frac{14}{13}$, sit minor quam $\frac{21}{20}$, etiam sequentes, velut $\frac{15}{14}$, sint minores, vel saltem non majores quam $\frac{21}{20}$, ergo $\frac{15}{14}$ non potest esse major quam $\frac{14}{13}$. Et generaliter, fractio prior non potest esse minor fractione posteriore. Jam si radices formulae $x^n + 11x^{n-1} +$ etc. (posito $10 = 1$) ponantur esse $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$, patet fore $11 = a + b + c +$ etc. et $12 = ab + ac +$ etc. et $13 = abc +$ etc. et $14 = abcd +$ etc. Et ita porro. Unde nascetur theorema generale: Fractionem ortam ex summa combinationum divisa per summam combinationum proxime inferiorum non posse esse minorem fractione alia similiter facta ex combinationibus altioribus. Nempe fractio ex summa binionum, divisa per summam unionum, non potest esse minor quam

fractio ex summa ternionum divisa ex summa binionum, et ita porro. Hinc etiam productum ex summa unionum in summam ternionum non potest esse major quadrato ex summa binionum, et ita similiter in aliis. Ita elegantia circa combinationes ex Harrioti theoremate supposito derivabuntur. Quodsi aliunde talia de combinationibus deriventur, hinc demonstrari poterit Theorema Harrioti; sed non sine ambitu. Praestabit tamen aliquam ejus demonstrationem haberi, quam nullam, qua non sine magno Scientiae defectu hactenus caremus.

Insigni Viro Dn. Abbati Fardellae literis recta in Italiam missis respondi; praesentes an Te reperturae adhuc sint Basileae, non satis scio. Iter felix faustumque apprecor; non dubito, quin pro Tua prudentia evitaturus sis, quicquid hominibus invidis et in Te curiose inspecturis occasionem criminandi dare possit circa ea, quae Italos Helvetiosque Tuos dissociant. Vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 24. Junii 1707.

P. S. Dn. Naudaeus suspectum habet amici Tui libellum, quod in eo dissimulentur, quae vestros a remotioribus quibusdam distingunt.

XXX.

Hermann an Leibniz.

Gratias ago quod Schediasma meum de Stationibus Planetarum prorsus indignum non judicet, quod Commentariis hujus anni inseratur; cogitabam plura addere et ad speciales casus applicare, ast vocatio mea Patavina ab aliquo tempore aliaque negotia ita me distraxerunt, ut id exequi aut geometrica tractare nondum vacaverit. Cl. noster Bernoullius bene valet liberatusque est ab ea tussi, quae eum sat diu vexaverat; decem fere elapsi sunt dies, ex quo ad Fabarias thermas profectus sit; eo perendie proficisci pariter constitui et abhinc postea iter meum per Italiam Patavium usque prosequar. Valdopere optarem ut Ampl. Tuae aliqua in re utilis esse possem, quo gratum ad minimum animum quadantenus comprobare liceret. De Manfrediano libro specialiora nunc habeo ex titulo qui talis est: De Constructione aequationum differentialium primi gradus Autore Gabriele Manfredio Phil. Doct. Bononiensi, Philosophicae quae in Patria est Academiae Socio ordinario, in 4, Bononiae Typis Constantini Pisarii. Dn. Victor Franciscus Stancarius, egregius Astronomus et Geometra Bononiensis in Observatorio Marsiliano habitans, hunc Gabrielem Manfredium tamquam primum Italiae Analystam mihi plurimum laudavit in suis literis. Ad discessum me paro qui erit futura die Veneris, ne tempus usui thermarum favens transeat, tametsi literae vocatoriae publico sigillo munitae, quarum eximius Abbas spem mihi facit proxime accipiendarum, nondum ad me pervenerint. Multis negotiis nunc distractus epistolae filum abrumpere cogor, rogans ut Ampl. Tua me quod hactenus fecit, porro amet etc.

Dabam Basileae 6. Julii 1707.

XXXI.

Leibniz an Hermann.

Scribit ad me eximius Dn. Fardella noster, negotium Tuum esse confectum, nisi quod a Te ipso difficultas mota est circa formam invitationis; negat autem unquam factam etiam aliis egregiis viris aliunde vocatis, ut ante adventum Ducale diploma cum publico sigillo daretur, factum tamen in Tui gratiam illud singulare, ut exemplum decreti Senatus a Cancellario Ducali signatum ad Te mitteretur. Quae cum ita sint, suaserim ut nullam amplius moram in Te esse maturata profectione ostendas. Equidem dum Te ad discessum hortor, commodis ipse meis obloquor; quo magis enim a nobis removebere, eo minus potero praeclaris Tuis meditationibus juvari et erudiri. Ego tamen publicam et Tuam utilitatem meae praefero, quanquam sperem non ideo minus frui interdum literis Tuis et meditationibus, quas etiam urgebis haud dubie intentius, ubi res in tranquillo collocatas habebis. Si quid interim vel Tuum Tibi ingenium, vel aliorum commercium lectiove suggessit, fac quaeso, ut etiam ad me inde aliquid perveniat, et meritissimum Dn. Bernoullium nostrum a me saluta, quem nuperas meas Tecum recepisse non dubito.

In Tuo Schediasmate de Stationibus Planetarum exprimendo, alicubi notatio mutabitur. Soleo ego observare, ut proportiones exprimam per modum aequationum et fractionum hoc modo a:b = l:m seu $\frac{a}{b} = \frac{l}{m}$, neque alia peculiari notatione opus est veluti a.b ::l.m. Nonnulla etiam alia hujusmodi inposterum observabuntur in Miscellaneis Berolinensibus uniformitatis causa. Multiplicationem etiam non soleo exprimere crucibus, sed simplici adscriptione velut $a+b, l+m$ vel etiam $(a+b)(l+m)$ idque idem est mihi quod $\overline{a+b} \times \overline{l+m}$. Commata autem vel parentheses pro vinculis adhibere soleo; parum quidem in his momenti, praestat tamen commodissima eligi et constanter servari.

Diu est, quod non intellexi, quid Galli agant in Analytica, aut alioqui in Mathematica. Bello gravissimo nonnihil refrigescere has de studiis curas, facile crediderim, et tamen novam Societatem Regiam Monspelii conditam intellexi. Quod superest, iter faustum felixque precor. Dabam Hanoverae 21. Julii 1707.

XXXII.

Hermann an Leibniz.

Humanissimae Tuae 24. Junii uno tantum die ante discessum ex Patria pervenerunt, ad quas si serius responsio mea quam par est procedit, veniam me impetraturum spero a Tua Benevolentia, si quidem nulla alia morae causa extitit, quam itineris negotia multifaria et ipsa peregrinatio, quae ob potionem aquarum Fabariensium longior nonnihil accidit et huc usque vere ab octavo superioris Mensis die perduravit; nam 12mo hujus Patavii appellens et Clariss. nostrum Abbatem in aedibus suis frustra quaerens, illico me Venetias, ubi commorari illum intellexi, concessi. Is pro effusissimo suo erga me amore non solum humanissime me excepit, ad Excellent. Reformatores studii Patavini salutatum deduxit, ipsumque Diploma ducale mihi procuravit, sed etiam nihil intestatum reliquit, quod vel ad augendam famam meam vel ad firmandam eandem conducere poterat. Clarissimus hic Vir optima nunc fruitur sanitate, ex quo vitam mire sobriam instituere ipsumque Cornarum imitari aliquatenus coepit; vegeto enim nunc est corpore et fere indefatigabili, cum contra langueret antehac et variis corporis morbis affligeretur. Maximo meo solatio video eum benignissime de Protestantium sentire religione, eorumque libenter amicitiam colere qui eidem sunt addicti et caeterum bonis moribus exornati. Ut verbo concludam, invenio in Persona eximii nostri Fardellae non tantum Virum Doctissimum, sed etiam Pium ab omni superstitione remotum, erga quemvis officiosum et amicis addictissimum, adornatum festivo ingenio, sed simul acuto, justo, solidioribusque tantum studiis dedito. Quantum ad modum evocationis is nihil officere potest negotio, et si quam difficultatem super ea re Cl. Abbati movi, id potius egi ut Parentum voluntati morem gererem, quam ut eidem serio insisterem, quod satis ex eo patet, quod iter meum ingressus sim non expectata Cl. Fardellae responsione.

Quantum ad Dn. Parent attinet, verum est, pleraque jactabundus profert, verum si obscuritas et confusio libri eximantur, perpauca ipsi remanebunt. Et statim atque ceremonialibus extricatus fuero negotiis, attentius ejus Elementa Mechanica examinare constitui. Eaedem distractiones me pariter impediunt, quominus in ea me immergere queam, quae de theoremate Harriotti annotasti perquam curiosa, haec enim omnia plus otii et tranquillitatis animi requirunt, quam nunc habeo tot visitationibus aliisque tantum non obrutus.

Quod levidense meum de Stationibus Planetarum Specimen non displicuerit, est quod mihi gratuler, sed profecto tale non est, quod mihi ad ingressum in Societatem vestram Regiam viam sternere possit. Unde si quas hac in parte benignas de me foveat cogitationes Ampl. Tua, id pereximiae suae erga me benevolentiae acceptum refero, cui etiam Celeberr. nostri Abbatis debeo amicitiam, quovis mihi auro praeferendam.

Habitationem meam, si modo possibile sit, apud amicissimum hunc Virum figam, Professionem autem non nisi circa medium Novembris auspicari potero; ad quod orationem componam circa utilitatem et praestantiam matheseos, imprimis vero praestantissimae Tuae Analyseos differentialis.

Nonnullos his in oris inveni calculi differentialis addiscendi cupidos, ut adeo sperem me occasionem habiturum esse praecellentem methodum Tuam in Italia etiam disseminandi.

Plura non habeo; caeterum Ampl. Tuam etiam atque etiam rogandam duco, ut, si qua in re ad ejus officia me idoneum judicabit, mandatis suis me exhilarare non dedignetur etc.

Venetiis 19. Augusti 1707.

XXXIII.

Hermann an Leibniz.

Paucae elapsae sunt septimanae, ex quo humanissimas et amoris plenissimas literas*) ab Amplitudine Tua in nova hac Musarum sede laetus accepi, utpote ex quibus perennem Tuam benevolentiam et animi erga me propensionem tam conspicuis mihi consignatam testimoniis perspicere licuit.

Cl. Manfredius ab aliquo tempore suum tractatum de Constructione aequationum differentialium primi gradus per Cel. nostrum Guglielminum Bononia huc concedentem mihi transmisit. Libri scopus est, ut praecipua circa methodum inversam tangentium inventa in Actis Eruditorum et Commentariis Parisiensibus passim sine demonstratione extantia dilucidet et arcana eorundem retegat; et in multis sane operam minime lusisse mihi videtur: modo imprimis egregio hujus differentialis aequationis $-\frac{ydy}{dx} = x - 2\sqrt{\frac{1}{4}xx - yy}$ hanc integralem invenit $\overline{\frac{5}{2}x - \sqrt{\frac{1}{4}xx - yy}}$ in $\sqrt[5]{\frac{1}{2}a^4x + a^4\sqrt{\frac{1}{4}xx - yy}} = aa$, quae proin est aequatio pro curva omnes Parabolas ad eundem axem exstructas parametrosque habentes aequales distantiis verticum a dato in axe puncto ad angulos rectos trajiciente, et hoc problema reducit ad constructionem aequationis differentialis $aady = bqdx + pydx$, in qua q et p utcunque dari intelliguntur per x, quo casu invenit $ay = z\int\frac{bqadz}{pzz} \pm z$, posito $\frac{pdx}{a} = \frac{adz}{z}$. Caeterum curabo, ut quam proxime ipse Manfredii libellus ad Ampl. Tuam deferatur. Quantum ad me attinet, lectionibus meis concin-

---

*) Dieser Brief fehlt.

nandis totus fere incumbo parumque mihi temporis est, quod Geometricis speculationibus impendere possim; sed postquam Professionem hanc meam auspicatus fuero, majus otium mihi affulsurum spero. Plura quae scribam non habeo; idcirco hisce vale etc.

Patavii 13. Octobr. 1707.

XXXIV.

Leibniz an Hermann.

Valde gaudeo res Tuas omnes ex sententia procedere, et doctrinam Tuam sane insignem aestimatores reperisse. Ipse Illustrissimus Abbas Fardella et sibi et mihi plurimum gratulatur, quod commendatio nostra tam bene cessit. Ubi defunctus eris curis et laboribus, quae ingressum novae professionis comitantur, non dubito quin magis magisque....

Quam Dn. Manfredus Tibi misit constructionem aequationis differentialis $aady = bqdx + pydx$, etiam mihi, credo, et Dnn. Bernoulliis non ignota fuit, et memini aliquando de ea cum Dn. Marchione Hospitalio per literas agere. Pluribus etiam diversis modis ad eam perveni, in meis quibusdam memorialibus schedis rem sic concepi: proponatur $dy : dx = z + vy$, posito z et v dari utcunque ex x. Fiat $\log w = \int vdx$, et erit $y = w\int(dx . z : w)$; sed haec nunc diligentius introspicere non vacat. Haec amplius extendi magnae utilitatis foret.

Pervenit ad me ex Anglia nova Algebra ex veteribus Newtoni praelectionibus concinnata; sunt in ea non tantum utilia exempla, sed et praecepta quaedam peringeniosa ad investigandos divisores, etsi enim praxi nonnihil sunt perplexa, ingenium tamen indicant. Quod superest, vale et me ama. Dabam Hanoverae 16. Decemb. 1707.

XXXV.

Hermann an Leibniz.

Professionem meam auspicatus sum die 27. Decembr. superioris oratione de Utilitate et Praestantia Matheseos, imprimis in-

geniosissimae Tuae analyseos, cujus amatores nonnullos his in oris reperi; omnia satis feliciter, Deo sit laus, successerunt. Nunc in explicandis geometriae elementis occupor.

Optime scio, a Te etiam aequationis differentialis $\frac{dy}{dx} = z + vy$ aeque ac Dn. Dn. Bernoulliis solutionem datam olim esse, quam Dn. Manfredius in suo libello construere annisus est, qui omnem lucem ex analysi Dn. Joh. Bernoulli in Act. Lips. 1697 pag. 115 mutuatus est. Nam si ponatur $y = mn$ vel $dy = ndm + mdn$, aequatio $dy = zdx + vydx$ mutabitur in hanc aliam $ndm + mdn = zdx + mnvdx$; ergo si fiat $mnvdx = mdn$, erit $nvdx = dn$ vel $\frac{dn}{n} = vdx$, hoc est $ln = \int vdx$ et $ndm = zdx$ vel $dm = \frac{zdx}{n}$ et $m = \int \frac{zdx}{n}$, unde $y = mn = n\int \frac{zdx}{n}$. Quae eadem est cum Tua.

Nuperrime in Acta Erudit. 1698 pag. 471 incidens, ubi Cl. Joh. Bernoullius dicit, generalem se invenisse methodum secandi ordinatim positione datas sive algebraicas sive transcendentes curvas in angulo recto sive obliquo, invariabili seu data lege variabili; vires pariter meas in hoc Problemate tentare volui, quali autem successu Tuum, Vir Illus., esto judicium.

Sint duae curvae AB, Ab (fig. 54) positione datae sive algebraicae sive transcendentes, sitque Bb ad utramque normalis. Ex punctis B et b ad axem AE ducantur, si placet, perpend. BE, be, sintque $Ae = x$, $eb = y$, $Ee = Cc = dx$, $bc = dy$, differentiale vero eb, quatenus applicata est curvae Bb, est $BD = dY$; unde cum Bb sit perpendicul. ad ACb, erit $\overline{Db}^2 = BD \times DC$, hoc est $- dx^2 = dydY$ vel $\frac{dY}{dx} = - \frac{dx}{dy} \ldots A$. Sit jam quaecunque aequatio $aady = xxdx + yydx \ldots . B$, vel integrando $aay = \frac{1}{3}x^3 + \int yydx$ vel $aa = \frac{x^3}{3y} + \int \frac{yydx}{y}$ (aut ponendo $\int yydx = p^3$) $= \frac{x^3}{3y} + \frac{p^3}{y} \ldots .. C$. In aequatione B substituantur loco dy et dx proportionalia $-dx$, dY ex aequatione A, eritque $- aadx = xxdY + yydY$ vel $aa = - \frac{xxdY}{dx} - \frac{yydY}{dx}$, unde $aa = \frac{x^3}{3y} + \frac{p^3}{y} = \frac{-xxdY - yydY}{dx}$ vel $x^3dx + 3p^3dx = - 3xxydY - 3y^3dY$, quae est aequatio differentialis ad curvam Bb. Eadem ratione si lineae AB, Ab forent logarithmicae diversarum subtang., curva eas normaliter secans inveniri posset, supponendo omnes logarithmicas per commune quoddam punctum transire et ad eandem asymptotam esse constructas, nam ex natura logarithmicae est $ydx = ady$ vel $\frac{ady}{y} = dx$, unde $aly = x$ et $a = \frac{x}{ly}$. In priore ponantur loco dy, $-dx$ et loco dx, dY, eritque $-\frac{adx}{y} = dY$ vel $a = \frac{ydY}{-dx} = \frac{x}{ly}$; unde $ydYly = -xdx$, ut habet Dn. Bernoullius in supra citato loco.

Haec sunt quae mihi in mentem venerunt, quae autem propter alia negotia, quantum oporteret digerere nondum vacavit; plura non addo nisi quod sub auspiciis hujus anni, ejus decursum et finem ita felices Ampl. Tuae optem, ut nihil desit, quod ad omnimodam animi tranquillitatem facere possit, et tales periodi frequentes et prosperae ei recurrant. Vale etc.

Patavii die 12 Januarii 1708.

XXXVI.

Leibniz an Hermann.

(Im Auszuge)

29 Febr. 1708.

Perplacet Analysis Tua pro problemate inveniendi lineam, quae curvas ordinatim positione datas in angulo datae legis secet. Tecum incipiens ita pergo: (1) $dv:dx = -dx:dy$, quae est aequatio generalis; si jam aequatio specialis ad curvam AC sit $dx = ady:y$, fiat $dv = -aady:yy$ et $v = aa:y$. Sed si aequatio specialis sit (2) $aady = xxdx + yydx$, ubi simul concurrunt x, dx, y, dy, ideo ut tollamus ambas x et dx, sumamus dx esse constantem et differentiando aeq. 2 fit (3) $x = aaddy - 2ydydx, :2dxdx$, unde per aeqq. 3, 2, 1 tollendo x et dx supererit aequatio, in qua habebitur dv per ddy, dy et y adeoque per affectiones unius solius indeterminatae; quod mihi melius videtur, quam unam indeterminatam per plures determinari. Sed possumus etiam adhibere novam aequationem generalem, nam differentiando aequ. 1 prodibit (4) $ddy = ddvdxdx:dvdv$. Unde haberi potest aequatio, in qua extent solum ddv, dv, dy, y. Quin potest res tandem reduci ad aequationem differentialem ordinariam primi gradus, qua soluta habeatur quaesitum.

Mitto excerptum ex **Arithmetica universali** Neutoni de modo investigandi divisores unius aut duarum dimensionum. Optem res produci ad plures dimensiones.

XXXVII.

Hermann an Leibniz.

Paucas ante septimanas humanissima Tua epistola ab Ill. Dn. Abbate Fardella mihi reddita summopere me exhilaravit, utpote ex qua prosperam Tuam valetudinem laetus intellexi atque pro solito prolixissimae Tuae erga me benevolentiae luculentissima collegi testimonia, non tantum quod elegantem Newtoni methodum pro inveniendis divisoribus variarum formularum algebraicarum ex Anglica quadam Algebra recens typis edita transcriptam mecum benigne communicare voluisti, sed etiam quod Rev. P. Horatio Burgundo tam honorifice citra meritum meum commendare, quae tua erga me est humanitas summa, non dedignatus est. Primo cursore post acceptam exoptatissimam tuam de qua loquor epistolam, ad egregium hunc Patrem suam demisi, una cum adjunctis propriis literis, in quibus animum meum de suis quas ad Ampl. Tuam miserat Problematibus aperui, simulque Epicycloidis suae Conicae proportionem ad circulum genitorem addidi, quam paucos post acceptas Tuas literas dies inveneram. De hoc enim epicycloidum genere nemo adhuc quod sciam egit neque ipse Dn. de la Hire in prolixo suo Schediasmate de Lineis Cycloidalibus Commentariis Academiae 1706 pag. 340 sqq. edit. Paris. inserto, ubi de variis tamen Cycloidum speciebus fuse loquitur. Omnes enim reliquae Cycloides ab hac, cujus mentionem feci, conica Cycloide differunt, quod illarum Circulus genitor in eodem semper plano sit cum circulo immoto vel basi, et in hac circulus genitor certo ubique angulo inclinatus sit ad basin, super cujus circumferentia perpetuo incedit. Sit ex. gr. Conus Isosceles ABDCEA (fig. 55), cujus vertex in puncto fixo A elevatus sit supra plano horizontali CFHE altitudine AG. Si hujusmodi conus rotetur circa punctum fixum A, circulus basis coni BDCE movebitur in linea circulari CFHE, punctumque quodvis C in circumferentia CDBE sumtum hujusmodi rotatione epicycloidem describet, cujus circulus genitor erit BDCE inclinatus ad basin CFHE in dato angulo, ut hic obtuso BCH. Ponatur curvam BPF dimidiam esse cycloidem conicam, cujus initium in F et punctum supremum in B. Sintque radius $CG = a$, $CQ = QB = b$. Sinus compl. inclinationis plani BDCE super $CFEH = c$ et sinus totus $= f$. Dico generaliter esse Epicycloidem BPFCB ad semicirculum genitorem BDC ut $a + 2\sqrt{aa \pm \frac{2abc}{r} + bb}$ ad a; et longitudo BPF. Diamet. BC $:: 2\sqrt{aa \pm \frac{2abc}{r} + bb}$ ad a. Ponitur in signo radicali $\pm \frac{2abc}{r}$ ad exhauriendos duos casus, quibus subesse potest problema; vel enim angulus BCH mensura inclinationis duorum planorum BCE et CFHE est obtusus, quo casu ponendum dumtaxat esset $+ \frac{2abc}{r}$, vel acutus, et tunc haberetur $- \frac{2abc}{r}$. Jam si ponantur ambo circuli, genitor BDCE et Basis CFHE, in eodem plano esse, erit $c = r$, unde $\sqrt{aa \pm \frac{2abc}{r} + bb} = \sqrt{aa \pm 2ab + bb} = a \pm b$. Ergo Epicyclois BPFCB ad BDCB $:: 3a \pm 2b \,.\, a$. Nempe ut $3a + 2b$ ad a, si genitor moveatur in convexa, et ut $3a - 2b$ ad a, si in concava baseos circumferentia rotetur circulus BDCE. Ut jam dudum demonstratum habetur; haecque in eum solummodo finem recenseo ut consensus patescat generalis meae solutionis ad peculiares casus applicatae cum iis, quae jam antea geometris innotuerunt.

Atque haec cum P. Burgundo communicaveram in mea epistola, ad quam hoc mane responsorias humanitate plenissimas ab eodem accepi, in qua dolet quod sufficiens tempus sibi non suppetat ad excolenda studia mathematica, quibus alias plurimum se delectari scribit. Interim tamen diffiteri non possum me pudore admodum fuisse suffusum, uti apertam Ampl. Tuae epistolam ad eundem Patrem legissem, in qua encomiis me ornatum videram quae mihi nequaquam convenire possunt, sed talibus viris melius tribuerentur, quorum discipulum me profiteri oporteret.

Verum utique est, Analysin meam pro invenienda linea positione datas curvas in constante angulo secante ulterius promoveri posse, et revera in similes praeter propter cogitationes incideram iis, quas Ampl. Tua mihi aperuit paulo postquam praecedentem meam epistolam abhinc demisissem; nam eam quam in dicta epistola subjiciebam analysin nimium deproperando perficere ob temporis angustiam nequiveram. Newtoni Regulam pro Divisorum inventione nondum quantum satis est examinare vacavit, interim tamen licet prolixa nonnihil sit elegans admodum mihi videtur, adeo ut omnino operae pretium mihi videatur in ejusdem demonstrationem inquirendi. Dn. de Lagni in Commentariis Academiae Regiae Scientiarum Paris. 1706 plura egregia habet circa inventionem valorum aequationum aut ut exactius loquar, circa approximationes radicum etc.

In elementis Geometriae tradendis multum in eo sollicitus fui, ut omnia inutilia, quorum multa in Euclidaeis elementis occurrunt, praeterirem, et Geometriam elementarem quanta fieri posset brevitate pertractarem; resque mihi ex voto successit, cum eandem jam ab aliquo tempore absolverim et tamen palmaria Archimedis theoremata quae Euclides non attigit, simul quoque demonstrarim. Atque haec sunt, Vir Illust. quae ad humanissimam Tuam epistolam reponenda habui. Vale etc.

Patavii d. 19. Apr. 1708.

XXXVIII.

Leibniz an Hermann.

Nuperrime per brevitatem temporis respondere non licuit. Nunc gratias ago, quod communicasti, quae Tibi cum R. P. Horatio Burgundo acta, cujus non inelegans meditatio a Te perfici meruit.

Utile erit, si Newtoni regulam divisorum examines. Reperi inter veteres meas schedas aliam rationem, quae ad praxin videtur commodior. Aequatione praeparata (sublatis scilicet ex aequatione irrationalibus et fractionibus) constat, si radicem rationalem habeat, velut $x + r$, fore r unum ex divisoribus ultimi termini aequationis datae. Et apud Schotenium jam habetur, ut ex pluribus divisoribus ultimi termini eligas qui succedere possit, posse augeri vel minui radicem pro x (verb. gr.) ponendo $x = y - n$, si jam ....

aequatio fuisset $10 + 11x + 12xx + 13x^3 + 14x^4 + x^5$, si placeret fieret ultimus novae $10 + 11n + 12nn + 13n^3 + 14n^4 + n^5$, cujus divisorum is, qui succedere debet. Sit (r) porro radix novae aequationis, erit $y = n + r$, ergo $(r) = -n + r$ seu $r - (r) = n$. Itaque seligendi sunt ex divisoribus illi r et (r), quorum differentia numerus assumtus n; qui cum variari possit, facile determinabuntur divisores succedentes. Atque haec quidem jam habentur, sed mihi occasionem dedere longius procedendi. Esto formula aequationem dividens secundi gradus, velut $xx + qx + r$, patet rursus r fore unum ex divisoribus ultimi termini aequationis datae. Faciendo ergo $x = y - n$, debet rursus (r) esse unus ex divisoribus ultimi termini novi $+10 - 11n + 12nn - 13n^3 + 14n^4 - n^5$, sed eundem valorem substituendo in divisore formulam dividente, formula dividens novam aequationem fiet: $yy - 2ny + nn + qy - qn + r$, ergo $nn - qn + r = (r)$ seu $(r) - r, : n = n - q$. Unde patet (r) et r, qui succedere possint, eos esse, quorum differentia vel summa divisibilis per n, et proinde cum n pro arbitrio variari possit, facile discerni, et hoc cujuscunque gradus sit formula dividens. Hinc vero invento r et (r) succedentibus facile habebitur q, nam erit $q = n - ((r) - r, : n)$. Eodem modo si divisor sit $x^3 + pxx + r$, facile habebitur r, q, p, si possibiles sunt: nam r et (r) seligentur ita ut $(r) - r$ sit divisibilis per n, sed q, p habebuntur ex aequatione $n^3 - pnn + qn - r = (r)$, quia n variantibus utcunque manent p et q, et ita tot semper haberi possunt aequationes, quot quaesitae. Quod si inventis valoribus res non succedit, impossibilis erit talis divisor rationalis; plerumque autem impossibilitas ex solis r et (r), variando (r) cum n, detegetur. Interim Newtoniana quoque methodus evolvi merebitur.

Elementa Geometriae multas ob causas aliter adhuc quam in Euclide extant demonstrari mererentur. Quod superest, vale et me ama. Dabam Hanoverae 11. Maii 1708.

XXXIX.

Hermann an Leibniz.

Ad humanissimas Amplitudinis Tuae literas undecimi Mensis elapsi responsionem hucusque distuli, quod exspectandum duxerim,

donec mihi Schediasma illud Newtonianum methodi divisores inveniendi, quod a Tua erga me benignitate antehac acceperam et paulo post cum nobili quodam Venetiano, eclesiastici tamen ordinis, qui studiis mathematicis maximopere delectatur, communicaveram, restitutum esset, quod nonnisi paucos ante dies contigit, et in rei mysterium accuratius inquirere possem; id autem tanto cum successu feci, ut postera die sine multo labore totum arcanum mihi detexisse videar, quod an ita sit, penes Ampl. Tuam judicium esto. Sit formula generalis, cujus divisor quaeritur $Ax^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3}$ etc. . . B, in qua litera B designat terminum, in quo x non reperitur. Jam si haec formula divisibilis est per binomium quoddam $ax \pm b$ (ubi a est divisor aliquis ipsius A), erunt quoque omnes formulae resultantes ex substitutione cujusvis quantitatis loco x in formula proposita, divisibilis per omnia binomia oriunda ex simili substitutione valorum x, in binomio $ax \pm b$. Et vice versa si formula dividenda non divisibilis existat per ullum binomium $ax \pm b$, tunc etiam quicquid demum loco x substitutum fuerit utrinque, modo non sit $= 0$, nulla formularum resultantium per suum respondens binomium divisibilis evadet. Quod quia evidens satis est, nulla demonstratione opus habet.

G	H	I	K
f	$Af^m + pf^{m-1} + qf^{m-2}$ etc. . B	$\varphi', \varphi'', \varphi'''$ etc.	$af \pm b$
g	$Ag^m + pg^{m-1} + qg^{m-2}$ etc. . B	$\gamma', \gamma'', \gamma'''$ etc.	$ag \pm b$
h	$Ah^m + ph^{m-1} + qh^{m-2}$ etc. . B	$\delta', \delta'', \delta'''$ etc.	$ah \pm b$
k	$Ak^m + pk^{m-1} + qk^{m-2}$ etc. . B	$\varkappa', \varkappa'', \varkappa'''$ etc.	$ak \pm b$

Unde si in generali formula $Aa^m +$ etc. substituantur loco x termini progressionis arithmeticae G, mutabitur illa in formulas columnae H, divisor vero fictus $ax \pm b$ in formulas respectivas columna K expressas. Adeoque si proposita formula $Ax^m +$ etc. divisibilis sit per divisorem aliquem ut $ax \pm b$, tunc omnes termini columnae H divisibiles erunt per suum cuique respondentem terminum columnae K. Divisorem $ax \pm b$ fictum nomino, quia suppono nondum constare, quid pro a et b poni debeat, ut divisio succedat. Termini columnae I respondentes e regione formulis columnae H divisores sunt formularum respectivarum hujus columnae H, hoc est $\varphi', \varphi'', \varphi'''$ divisores sunt formulae $Af^m + pf^{m-1}$ etc. et sic in reliquis. Quibus positis, sequitur (1) quod cum termini seriei G progressionem arithmet. descendentem, si placet, constituant, series K similiter progress. arithmeticam efficiat, cujus differentia sit differentia progressionis G per a seu divisorem aliquem ipsius A multiplicata. (2) Si inter divisores columnae I adsint termini ut $\varphi', \gamma', \delta'$ seu $\varphi', \gamma' \delta''$ vel quavis alia ratione sumti, qui descendendo progressionem arithmeticam componant, cujus differentia sit aequalis differentiae seriei G per divisorem quemvis a coefficientis A altissimi in formula termini multiplicata, respondebunt vel aequales erunt illi termini terminis seriei K, posito quod progressio tam divisorum columnae I, quam terminorum seriei G in infinitum abeat; nempe eo casu φ' vel φ'' etc. respondebit $af \pm b$, γ', γ'' ipsi $ag \pm b$, et sic porro; vel positis (3) $f = 1$, $g = 0$ et $h = -1$, neglectis reliquis ut k, termini $af \pm b$, $ag \pm b$, $ah \pm b$ etc. degenerabunt in $a \pm b$, $\pm b$ et $-a \pm b$, qui proinde in hac suppositione respondebunt divisoribus seriei I, quibus illi $af \pm b$ etc. respondere diximus. Atque ita inveniuntur b cum suis signis, sed habentur etiam valores a; unde habebuntur divisor vel divisores tentandi, cum quibus si divisio non succedat concludi debet, formulam propositam nullum divisorem unius dimensionis habere; cum si quem haberet, is cum aliquo termino progressionis divisorum I, quibus formulas seriei K respondere ostendimus, coincidere deberet contra hyp. Atque in hisce continetur demonstratio methodi Newtonianae pro inventione divisoris unius dimensionis.

Ad explorandum, utrum formula $Ax^m + px^{m-1} + qx^{m-2} +$ etc. . . . . B divisorem unum pluresve admittat duarum dimensionum, per $axx \pm bx \pm c$ generaliter exprimendos, ubi itaque valores ipsarum a, b et c quaeruntur, in expressione generali divisorum substituendi; factis superioribus substitutionibus terminorum seriei G loco x in proposita formula dividenda, ea transformabitur in totidem alias columnae H; et $axx \pm bx \pm c$ mutabitur in terminos seriei L, quae quidem non componit progressionem arithmeticam, ast detractis terminis illis, in quibus termini seriei G sunt duarum dimensionum, residua in columna M collocata constituunt progressionem arithmeticam descendentem perinde ac in G, a qua tamen in hoc differt, quod progressionis M differentia multiplum b sit differentiae in progressione G. Et si facilitatis gratia in columna M loco f, g, h, k substituantur 2, 1, 0, -1 etc. aeque ac in columna H, prior M mutabitur in N; in columna vero H quaerantur omnes partes aliquotae cujusvis termini, a quibus subtrahantur vel addantur quadrata terminorum respondentium seriei G per divisorem quemvis

a coefficientis A multiplicata; et residua et summae designentur jam per terminos columnae I, quibus antea simpliciter partes aliquotas formularum K denotavimus. Si ergo inter terminos columnae I, quales hoc secundo casu descripsimus, aliqui progressiones arithmeticas forment, hae ipsae progressiones valores literarum b et c determinabunt, quibus in $axx \pm bx \pm c$ substitutis, formulae oriuntur, cum quibus divisiones sunt tentandae. Nam termini progressionum columnae I, si plures sint, vel progressionis, si unica, respondebunt terminis seriei N:

L	M	N
$aff \pm bf \pm c$	$\pm bf \pm c$	$\pm 2b \pm c$
$agg \pm bg \pm c$	$\pm bg \pm c$	$\pm b \pm c$
$ahh \pm bh \pm c$	$\pm bh \pm c$	$\pm c$
$akk \pm bk \pm c$	$\pm bk \pm c$	$\mp b \pm c$

Unde si quem divisorem proposita formula admittat duarum dimensionum, ea necessario coincidere debet cum aliquo termino seriei L, et debitis praeparationibus emerget respondens terminus seriei N; ex quo liquet eos solos divisores tentandos esse, qui eliciantur ex hac columna N, quae valores literarum b et c determinabit; nam cum δ' vel δ'' etc. $= c$, invenietur $b = \gamma' - \delta'$ vel $\gamma' - \delta''$ etc., subtrahendo ergo in progressione arithmetica columnae I, terminum respondentem termino h vel 0 seriei G a termino proxime superiore respondente ipsi g in eadem progressione G. Terminus vero c est ille ipse terminus progressionis in I, respondens termino h in serie G. Inventis igitur valoribus ex b et c iisque in $axx \pm bx \pm c$ substitutis, oriuntur formulae, per quas divisiones tentari debent. Valor autem ipsius a jam inventione terminorum seriei I determinatus supponitur; unde si ex hujus supposita quantitate in serie I nulla oriatur progressio arithmetica, vel etiam hujusmodi progressiones formulas dent, cum quarum nulla divisio succedat; alius divisor assumendus erit ipsius A atque cum hoc alio divisore a idem ac praecedens processus instituatur, atque ita porro. Unde si adhibitis omnibus divisoribus ipsius A, et cum iis operationibus, quas superius descripsi, institutis, nullae prodeant formulae, cum quibus divisio succedat, iterum concludere licebit, formulam propositam non habere divisorem duarum dimensionum. Quod secundo vult Newtoniana Methodus.

Atque ex hisce principiis jam liquere arbitror, quo pacto divisores altiorum graduum indagari debeant, atque inquisitionis laborem longum admodum futurum esse. Amplitud. Tuae methodus,