



## Leibniz an Hermann.

Spero redditum iri nuperas meas, nec minus quas nunc scribo. Adjeceram illis demonstrationem profuturam ad intelligendam periodorum in seriebus Numerorum Arithmeticae progressionis utcumque replicatae necessitatem rationemque. Voco autem progressionem Arithmeticae replicatam, omnes summas aut summarum summas utcumque replicatas Arithmeticae progressionis, atque adeo omnes Arithmeticoe potentiae ejusdem gradus aut ex his constatae formulae sunt termini progressionis Arithmeticae replicatae. De Geometrica transcribo, quae Amicus ingeniosus ad me scripsit, cui volupe fuit nonnihil in haec inspicere, me invitante:

In progressionibus, inquit, Geometricis duplis nostra Arithmetica vulgari seu Decadica expressis notae primae columnae redeunt eadem post quartam quamque, in secunda columna post vigesimam quamque, in tertia post centesimam quamque, in quarta post quingentesimam quamque, Numeris ordinalibus semper in quintupla progressionem crescentibus.

In progressionibus Geometricis tripla, octupla, et aliis quibusdam, ut credi par est, eadem lex observatur. Notandum tamen, si octuplam a numero 5 incipias, Nullas meras prodire pro prima columna, sed in secunda easdem notas redire post quartam quamque, in tertia post vigesimam quamque, et ita porro, ut ante.

In proportione quadrupla eadem notae redeunt in prima columna post alteram quamque, in secunda post decimam quamque, in tertia post vigesimam quamque etc.

In quintupla, a quocunque numero incipias, 5 aut 0 in prima columna reperies. In secunda columna semper eadem nota, 2 aut 7 aut 0; sed in tertia columna redeunt notae post alteram quamque, in quarta columna post notam quartam quamque, in quinta columna post notam octavam quamque, et ita porro, semper notas duplicando.

In proportione sextupla una eademque nota est in prima columna, in secunda redeunt notae post quintam quamque, in tertia post 25tam quamque, in quarta post 125tam quamque, et ita porro.

In septuplae prima columna eadem notae redeunt post quartam quamque. Caeterae columnae legem pristinam servant, nempe ut in tertia notae redeant post 20mam quamque, in quarta post 100mam quamque etc.

In noncuplae prima columna sunt binae tantum notae, in secunda eadem redeunt post 10mam quamque, in tertia post 50mam quamque etc. Decupla cognita est. In undecuplae prima columna non nisi una est nota, in secunda redeunt notae post decimam quamque, in tertia post 50mam quamque etc.

Si pro nostra Arithmetica decadica aliam, verbi gratia Heptadicam sequeremur, in progressionis duplae prima columna notae redibunt post tertiam quamque, in secunda post 21mam quamque, in tertia post 147am quamque etc.

In Octoadica progressionis duplae singularis quaedam lex est. In tripla, si a 3 incipias, notae primae columnae redeunt post secundam seu alteram quamque, in secunda post notam decimam sextam quamque, in tertia post 125mam quamque etc.

In Arithmetica Enneadica pro dupla progressionem in columna prima notae redeunt post sextam quamque, in secunda post notam 54tam quamque, in 3tia post notam 456tam quamque etc. Pro progressionem tripla (quae est aliquota noncuplae) lex revolutionis accedit ei, quae est in dupla secundum Arithmeticae Octoadicam. Si quadruplam a 3 incipias, solae notae 3 erunt in prima columna, sed in secunda notae redibunt post nonam quamque, in tertia post 81am quamque.

In Arithmetica Hendecadica, sive incipias per 1, sive per 3, in prima columna notae redeunt post 10mam quamque, in secunda post 110mam quamque, in tertia post 1210mam quamque etc. Tandem in Arithmetica pentadecadica pro progressionem dupla si incipias ab 1, notae in columna prima redeunt post quartam quamque, in 2da post 60mam quamque, in 3tia post 900mam quamque etc.

Ex his speciminibus intelligi potest, quantus hic campus novae numerorum scientiae sit apertus, quae non in simplici consistat speculatione, sed insignia compendia maximasque praebet utilitates, non tantum in numerorum rationalium seriebus, summis, terminis longe remotis quam facillime licet inveniendis, sed etiam in irrationalium imo transcendentium valoribus ad leges revocandis. Et quamquam in quocunque Arithmeticae genere aliquid tale

locum habeat, ipsaque comparatio diversarum Arithmeticarum majorem lucem foenerari debeat; necesse est tamen Dyadicam utilitate eminere, ubi ob binas tantum notas plerumque omnia simpliciora et legis patientiora esse oportet. Caeterum quia de Algorithmo quatuor, quas vocant, specierum cogitasti, ibique omnis fere difficultas ad additionem redit, transcribam Tibi modum quem pro additione adhibeo meum, quo simul errores melius excluduntur, et facilitate revisionique consulitur.

(Conferat. fig. 42).

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{significat} \\ \text{(fig. 42)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{summam} \\ \text{praecedentium} \\ \text{unitatum} \\ \text{esse} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2^1 = 2 \\ 2^2 = 4 \\ 2^3 = 8 \\ \text{etc. etc.} \end{array} \right.$$

Processus Additionis dyadicae hic est:

In columna, ut A, in unum addo Unitates maximum convenientes Numerum progressionis Geometricae duplae, quem columna dare potest, qui in A est 4, cujus a 2 potentiae exponens, cum sit 2, ideo novissimae quatuor unitatum ascribo 2. Inde rursus colligo maximum numerum progressionis Geometricae duplae, quem dare solum potest reliquum columnae, sed cum hoc loco det nullum supersitque solum 1, ideo scribere oportet 1 sub columna. Numerus autem 2 transfertur in columnam a praesente secundam (si esset numerus 3, transferretur in 3tiam, et ita porro) et ibi signatur punctum in loco secundo columnae ab hinc secundae C (si esset 3, signaretur punctum in loco tertio columnae ab hinc tertiae D). Intellego autem primum, secundum vel tertium locum de intervallis inter notas sumtis, ab imo ascendendo. Puncta autem in columna ubi signantur, significant unitates.\* In columna B unitati quartae rursus ascribo 2, ob rationem praecedentem, et abhinc unitati secundae ascribo / loco 1, ut ambiguitas evitetur nec unitas collectitia cum unitate columnae confundatur. Cumque nihil restet, sub columna B scribo 0, et ob 2 designo punctum in columnae post praesentem secundae loco secundo. Et

\*) Ductus hinc appinxi ad ostendendam connexionem inter puncta et eos, ex quibus oriuntur numeros collectionum exponentes, ut ratio processus appareat, in praxi autem his ductibus opus non est. Bemerkung von Leibniz.

ob 1 seu unitatem designo punctum in loco primo columnae a praesenti B primae C. Similiter in columna C unitati quartae ascribo 2, et secundae ab hac ascribo 1, et quia nihil restat, ideo sub columna C scribo 0, et ob 2 designo punctum in secundo loco columnae a C secundae E. Et ob / designo punctum in primo loco columnae a C primae D. Et ita porro.

Cum ergo examen sequi revisionem instituo (nam hac methodo puncta punctorumque sedes cum numeris conferendo semper calculus ab intuente examinari potest ex integro vel per partes), primum confero quod sub columna superest, cum eo quod in columna superest post numerorum collectitiorum exponentes ascriptos. Deinde percurro puncta notata infimo seu primo loco, et video an cuique respondeat / in columna proxime praecedente. Mox percurro puncta notata secundo (tertio) loco, et video an cuique respondeat 2 in columna secunda retro (3 in columna tertia retro) etc. Vale etc. Dabam Hanoverae 2. Julii 1705.

P. S. Quod ad series infinitas (de quibus in praecedentibus nostris literis) attinet, non id suadeo, ut magnopere sis sollicitus de seriei valore finito inveniendi, quando id licet (hoc enim num fuerit nimium e re publica mathematica petere), sed tantum ut constitutatur modus agnoscendi, an valor per seriem sit possibilis seu advergens, et quis sit limos possibilitatis, idque ex ipsa serie, origine scilicet ejus ignorata vel dissimulata. Id enim essentiale est ad constitutionem seriei infinitae, quae finitae quantitati aequari debet, ut certi simus ac demonstrare possimus ex lege seriei, advergentiam ei inesse, seu satis longe procedendo errorem fieri minorem dato.

## X.

### Hermann an Leibniz.

Utramque Tuam epistolam primam a Dn. Schreckio Augusta mihi transmissam, alteram a Cel. nostro Prof. Bernoullio mihi traditam recte accepi, pro quibus gratias quas possum ago maximas.

Gratias insuper persolvo maximas pro humanissima communicatione Demonstrationum praecipuorum Arithmeticae Tuae Binariae theorematum, quibus nihil utilius dari posse mihi videtur,

firmiterque mihi persuadeo reconditissima numerorum mysteria hac arithmetica dyadica, quae Indies familiarior mihi fit, erui posse. Quamquam omnis arithmetica ejusmodi periodos admittat, quales dyadica involvit, difficilius tamen eruuntur propter majorem notarum numerum, quod vel prolixissimae periodi geometricarum progressionum in decadica arithmetica satis superque ostendunt, de quibus Cl. Amicus Tuus Tecum egit, quaeque in ultima Tua 2. Julii mecum communicare, pro summa Tua humanitate, non es gravatus; Dyadica autem arithmetica in iisdem progressionibus geometricis periodos habet multo breviores et patientiores, et hae periodi columnarum cujusvis progressionis planam viam mihi aperire videntur pro summis serierum inveniendis et multis aliis ut suspicor, quae tamen omnia qua par est attentione nondum examinare mihi licuit. Attamen novo Tuo designandi modo coefficientes in aequationibus tam algebraicis quam transcendentibus per certos numeros utor in solutione Problematis ducendi Curvam Algebraicam per quotlibet puncta data, quod magni aliquando usus esse potest pro valoribus quantitatum transcendentium per approximationes exhibendis, hancque solutionem Ampl. Tua proxima occasione transmittam, ejus judicio eam submissurus; nam a paucis eo tempore, ex quo in Problematis illius solutionem incidi, nondum satis otii nancisci potui chartae eam committendi, unde factum ut Cl. noster Bernoullius eam nondum viderit. Nec sperare possum me eam unquam ostendere posse, nam hecice eum in modum Cl. hunc Virum corripuit et emaciavit, ut nihil nisi sceleti speciem prae se ferat: heri me rogavit, ut officiosam suam salutem Tibi impertiendo eum apud Te excusarem, quod non scribat absentibus nunc viribus et eum impediens, quominus suo erga Te officio defungatur. Et quia omnem reconvalescendi spem amisit, a me pariter contendit, ut Tibi, Vir Excellentissime, suo nomine gratias agerem maximas pro omni Amicitia, Amore, Honore et Benevolentia, quibus eum a multo jam tempore dignatus es, et Tibi fausta quaeque, sanitatem inconcussam, vitam longaevam et omnia quae tum animo tum corpori prodesse queant animitus et toto pectore vovil, cui et ego accinens iterum etiam atque etiam rogo ut mihi porro favore et patrocinari velis etc.

Basileae 4 Cal. Augusti 1705.

Es folgt hier ein Brief Hermann's, datirt 15. Aug. 1705, der nur eine Mittheilung im Auftrage Jac. Bernoulli's enthält, die ohne besonderes Interesse ist.

## XI.

### Hermann an Leibniz.

Praeterito Cursore Cel. nostri Bernoulli rogatu literis Te lacesivi, nunc vero a maestissima ejus Uxore rogatus tristem de Clarissimi illius Viri obitu nuntium ad Te defero. Febris enim hecica qua ab aliquo jam tempore corripiebatur nudius quartus Eum quinquagenos aetatis annos praetergressum nobis absumsit; tanto autem acerbior haec mihi accidit jactura, quanto magis Amicitiam ejus omni furo carentem, atque frequentes quibus maximo cum fructu et voluptate fruebar conversationes mecum perpendo. Sicque cum magnum amiserim Patronum verumque Amicum, Ampl. Tuam etiam atque etiam rogo, suo favori imposterum ut hactenus me commendatum habeat, D. O. M. precatus ut Virum Illustrissimum Republicae literariae insigne Ornamentum, Seculi Gentisque egregium Decus, omniumque solidarum et reconditorum scientiarum Antistitem inconcussa cum sanitate orbi erudito quam diutissime fulgere jubeat.

Fateor libenter me nunc silere potius optasse, quam ingrato nuntio de amisso Amico Te percutere; verum quia superstes Vidua cum duobus defuncti nostri Professoris Fratribus e suo judicarent esse officio ut confestim de obitu Mariti vel Fratris certior fieres, et Academiae id Scientiarum Berolinensi, cui tanta cum laude praesides et ad quam Tuo potissimum favore et commendatione ascitus quoque erat, quemque adeo locum suo nunc obitu vacuum relinquit, mature pariter ut innotesceret. Idcirco cum ad id opera mea requireretur, ipsis deesse nolui; imprimis cum me rogarint ut Tibi suo nomine etiam gratias agam maximas pro omnibus amicitiae testimoniis, quae erga defunctum edere voluisti et quorum se Tibi debitorem magnum paucis ante beatam suam *ἐνάλωσιν* diebus mihi testatus est. Celeberrimae etiam Academiae membris se quoque magnopere obstructum esse agnovit gratiasque ut pariter agerem a me efflagitavit quod illum inter tam Illustris viros cooptare non



fuertint dedignati. Tibique et singulis omnia fausta et prospera apprecabatur, ad promovendam Gloriam Dei et Scientiarum pomoeria extendenda. Et ne patientia Tua nimis abutar, hic filum abrumpo. Vale etc.

Basileae 19 Augusti 1705.

## XII.

## Leibniz an Hermann.

Ex nuntio de obitu insignis Viri et semper memorandi Dn. Jacobi Bernoullii plurimum doloris accepi, tum ob ingens profundioris doctrinae detrimentum, tum quod me privatam videam amico eximio et adjuvatore magno communium studiorum. Honoratissimae Dominae viduae, fratribusque defuncti spectatissimis rogo ut gratias agas meo nomine, quod me acerbi casus certiorum reddentes affectum suum testari, mihi se affectus certos ostendere voluere. Societati Scientiarum Regiae, quae Berolini est, significavi et vestram et nostram jacturam. Non dubito magno omnium sensu acceptum iri: nam acumen Viri quod pauci aequabant, nemo ignorat harum literarum intelligens. Ipsius certe opera potissimum effectum est, ut meae Meditationes circa interiorem Geometriam ampliore usum acciperent latiusque spargerentur, quod ille praestitit non tantum fratrem ingeniosissimum excitando, sed et propria pulcherrima inventa conferendo. Quorum ne quid pereat nostrum monere est, curare cognatorum, et Tuum quoque, Vir eximie, et amicitiae et viciniae jure. Spero ultima voluntate defuncti aliquid de affectis laboribus schedisque constitutum esse; sin minus, possent inferri publico loco, veluti Bibliothecae patriae, aut Tabulario Societatis: Vitam etiam delineari cum elogio velim, quod egregius Vir, Otto Menkenius, libenter Actis suis inseret. De Dn. Joh. Bernoullio diu est quod nihil intelligo. Eum nunc puto apud vos agere, aut certe non diu abfuturum. Itaque speciatim a me salutari et dolorem meum significari peto. Vidi quae in Actis dixit de mea ratione construendi problematis, quod proposuerat Curvarum datae aequalium. Illud miror, suspicatum, nescio quas mirificas calculi difficultates: credo quod exequi declinasset, quod etiam in levissimis facio, adeo nunc alia urgent. Venit in mentem suadere

haeredibus Tuo interventu, ut congerantur omnes defuncti Schedae Mathematicae, addo, et philosophicae, et ut speciatim omnium, quae in Actis Diariisque dedit, Analyses colligantur, ut aliquando edi possint. Interdum enim non omnibus harum rerum peritis obviae videbuntur. Calculum etiam nuperum de curvis tertii gradus, ex quibus jam 33 descriperat, asservari e re putem.

Spero ex Te intelligere, quae sive in Dyadicis, sive in aliis ipse pro insigni acumine Tuo subinde agis, et optem imprimis progressionis Geometricae periodos exhiberi in columnis.

Male me habet (etsi fortunae Tuae faveam) quod discessu Tuo exigua mihi spes relinquatur videndi Tui, neque enim credo ante Italicum iter excurrere in Germaniam hactenus Tibi praeteritam. Ex Cl. Fardellae literis constantem in ipso conatum deprehendo conficiendi negotium Tuum, nec spem abesse, mutatisque licet personis, priora consilia superesse. Quod superest, vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 21 Sept. 1705.

## XIII.

## Hermann an Leibniz.

Rure ante aliquot dies mihi redeunti humanissimae Tuae literae redditae sunt, quibus perlectis statim me ad Viduam defuncti nostri Dn. Bernoullii contuli et dolorem quem de praematura ejus morte concepisti indicavi, pro quo luculentissimo Amoris ac Benevolentiae erga defunctum testimonio, quas potest, gratias agit maximas, Deumque pro perenni Tua incolumitate atque prosperitate precatur. Cum ea quoque de Manuscriptis Mariti egi, Tuumque consilium ipsi exposui, ad quae regessit se nequaquam refragaturam, si quid praelo dignum inter chartas reperitur, publico id donare; et spero quoque id suo tempore effectui datum iri, ad quod ego levem meam opellam statim obtuli, quia eadem de re paulo post Cl. Professoris mortem mecum locuta est. Ars, quam vocabat, Conjectandi parum ab omnimoda perfectione abest, ultimamque accepisset manum, si vel paucis duntaxat mensibus fato suo supervivisset. Totum opus in quatuor dividitur partes, quarum prima Hugonianum tractatulum de ratiociniis in ludo aleeae cum additis



ad eum insignibus notis propriis complectitur. Secunda continet doctrinam de Permutationibus et Combinationibus. Tertia usum doctrinae praecedentis in variis sortitionibus et ludis aleae explicat. Pars tandem quarta usum quoque tradit et applicationem praecedentium in Civilibus, Moralibus et Oeconomicis.

Ecce hic, Vir Amplissime, adjunctam brevem Vitae ejus delineationem qualem petisti Actis Eruditorum Lipsiens. inserendam, quam ut cum Clarissimo Dn. Menckenio communicare digneris enixe rogo, huicque similem Cl. quoque nostro Battierio ICo tradidi, qui beati nostri Professoris manibus parentabit.

Quatuor aut quinque jam sunt septimanae, ex quo Cl. noster Joh. Bernoulli cum uxore et liberis incolumis hic appulit. Vacans professio Mathematicum a Senatu nostro Academico perhonorifice ipsi fuit oblata, et ab Ampl. Magistratu aucto ipsi salario professorali confirmata, qui honor exceptis Buxtorffis nonnullis ad alias Universitates quoque vocatis, nulli hactenus Professorum nostrorum contigit. Ante aliquot dies me Eum invisentem rogavit ut Ampl. Tuae plurimam salutem suo nomine impertirem, et is quoque epistolam a Cl. Moyvraeo, Londino ad eum datam, mihi perlegendam tradidit, quae multa continebat mathematica, et inter alia solutionem suam satis prolixam attulit Problematis a Cl. Joh. Bernoulli olim in Actis propositi, de invenienda Curva tali, ut portio axis intercepta inter tangentem aliquam sit ad ipsam illam tangentem in data ratione m ad 1. Subiit animum: aliam et Moyvraeana faciliorem quaero solutionem; et puto rem ex voto mihi successisse; verum Tuum est, Vir Amplissime, de ea judicare. Sit itaque (fig. 43) Curva AGC ea quae quaeritur, cujus axis AB, applicata CB, tangens CD; jam pono CB = xx - yy, subtang. DB = 2xy, eritque tangens CD = xx + yy et ex hypothesi AD = mxx + myy, abscissa vero AB = mxx + myy + 2xy. Tales vero suppositiones eo imprimis consilio instituo, ut calculus signis radicalibus non implicetur, quibus positus erit

CE GE :: CB . DB  
2xdx - 2ydy . 2m . xdx + ydy + 2 . ydx + xdy :: xx - yy . 2xy; hincque  
habebimus  $\frac{xdx - ydy}{xx - yy} = \frac{m \cdot xdx + ydy}{2xy} + \frac{ydx + xdy}{2xy}$ , vel transponendo  $\frac{ydx + xdy}{2xx}$  ad alteram partem, fiet  $\frac{xdx - ydy}{xx - yy}$

$\frac{ydx - xdy}{2xy} \left( = \frac{xydx - xyydy + y^2dx - x^2dy}{2xy \cdot xx - yy} \right) = \frac{m \cdot xdx + ydy}{2xy}$ ,  
vel multiplicando ubique per 2xy et dividendo per xx + yy, erit  
 $\frac{ydx - xdy}{xx - yy} = \frac{m \cdot xdx + ydy}{xx + yy}$ ; verum  $\frac{ydx - xdy}{xx - yy} = \frac{\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy}{x - y}$   
 $\frac{\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy}{x + y}$ , ergo  $\frac{\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy}{x - y} - \frac{\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy}{x + y} = \frac{m \cdot xdx + ydy}{xx + yy}$ .  
Unde sequitur  $\frac{1}{2} \text{Log. } \frac{x - y}{x + y} - \frac{1}{2} \text{Log. } \frac{x + y}{x - y} = m$ ,  $\text{Log. } \frac{xx + yy}{xx + yy} = \frac{1}{2}$   
vel  $\text{Log. } \frac{x - y}{x + y} - \text{Log. } \frac{x + y}{x - y} = 2m \text{Log. } \frac{xx + yy}{xx + yy} = \frac{1}{2}$ , ergo  $\frac{x - y}{x + y}$   
 $= \frac{xx + yy}{xx + yy}^m$ , aut ut lex homogeneorum servetur  $\frac{a^{2m} \cdot x - y}{x + y}$   
 $= \frac{xx + yy}{xx + yy}^m$ . Q. E. I.

Quantum ad methodum meam attinet, qua curvam analyticam per quotlibet data puncta duco, lubet eam hic paucis exponere, omisso tamen calculo nimis sane prolixo quam ut epistolae nunc inseri possit.

Sint, verbi gratia, (fig. 44) quatuor puncta data A, B, C, D, per quae oporteat lineam algebraicam ABCD transire, duco per aliquod punctum ut A, lineam indefinitam AG, super quam ex datis punctis B, C, D etc. perpendiculares demitto BE, CF, DG, quae omnes datae erunt longitudinis, aequae ac partes axis AE, AF, AG etc. Vocentur hae ordine A, B, C, illae vero a, b, c; quibus positis sumo aequationem  $01x + 10y + 11xy + 02xx - 20yy = 0$ , statuendo AK = x et HK = y, in qua aequatione valores numerorum assumptiorum 01, 10, 11, 02, 20 etc. eruendi sunt, quod hoc pacto perfici potest. Propter identitatem relationis omnium punctorum B, C, D, H ad axem AG, habebimus tres sequentes aequationes, ponendo successive in superiori aequatione pro x valores datarum AE, AF, AG, hoc est A, B, C, et loco y valores ipsarum applicatarum BE, CF, DG vel a, b, c, et fiet:

$01A + 10a + 11Aa + 02AA + 20aa = 0$   
 $01B + 10b + 11Bb + 02BB + 20bb = 0$   
 $01C + 10c + 11Cc + 02CC + 20cc = 0$

Jam beneficio trium harum aequationum inveniuntur valores terminorum assumptiorum 01, 10, 11, 02, 20 in quantitibus datis vel constantibus, qui valores in aequatione  $01x + 10y + 11xy$

+ 02xx + 20yy = 0 substituti dabunt aequationem pro curva quaesita.

Circa Dyadica subinde in periodos columnarum progressionum geometricarum inquisivi, verum nihil inveni hactenus quod Ampl. Tuae offerri mereatur.

Basileae 28. Octobris 1705.

### Beilage.

Vita et Obitus Viri Celeberrimi Jacobi Bernoulli, utriusque Regiae Scientiarum Academiae Parisiensis et Berolinensis Socii, et in inclita Basiliensium Academia Matheseos Professoris Clarissimi.

Praematura Mors Viri Excellentissimi Jacobi Bernoulli non tantum Academiae Patriae, verum et universae Reipublicae literariae gravissimam attulit jacturam. Ea accidit 16 Augusti Anni hujus currentis 1705 paulo post horam quintam matutinam, anno aetatis suae quinquagesimo primo.

Clariss. noster Bernoullius (oriundus majoribus tempore Ducis Albani ob religionem orthodoxam Patria Antwerpia pulsus) in lucem est editus anno vergente 1654 d. 27 Decembris, Patre Viro Ampliss. Nicolao Bernoulli, Fori Judicialis et Camerae rationum in Republica Basiliensi Assessore integerrimo octuagesimoque aetatis anno etiamnunc superstite. Excusso pulvere Gymnasii Philosophiae in Scholis usitatae principia hausit ex institutione Celeberr. Viri Joh. Jac. Hofmanni S. S. T. D et Historiarum in Academia patria Professoris, impetratisque in ea consuetis gradibus, animum ad Studium sacrum appulit, magis tamen ex instigatione paterna quam proprio instinctu. Interea dum juveniles anni calebant, Poesin quoque latinam, gallicam, germanicam excoluit multaque non infestive lusit, et linguis pariter sedulo operam dedit. Scientias mathematicas ab ineunte aetate mire deperit, dum adhuc Puer ex inspectione figurarum geometricarum secretum quoddam oblectamentum capiebat, ut natus ad studium hoc, non factus videretur. *Autodidaxtos* in illo fuit, nullius unquam vivi Praeceptoris opera usus, quin et librorum pene omnium subsidio destitutus. Si quem sors objecerat, hunc furtim evolvebat, ut rigorem Parentis, qui Filium aliis destinarat studiis, eluderet, proposito sibi interea in emblemata Phaëtonte in curru solis cum epigraphe: Invito Patre

sydera verso; hancque ob causam ultra communis Arithmeticae, Geometriae, Astronomiae praxin non penetravit, nescius quiddam longe praestantius haberi ante peregrinationem literariam. In prima nihilominus adolescentia penetrans ejus ingenium eluxit in celebri Problemate Chronologico de inveniendo Anno Periodi Julianae ex datis tribus Cyclis Solis, Lunae et Indictionum, quod occasione Prop. 2 partis primae Deliciarum Mathematicarum Schwenterii ante decimum octavum aetatis annum proprio Marte solutum dedit, nesciens eo tempore ejusdem Problematum solutionem a P. Billy Jesuita, celebri Mathematico, tanquam insigne artis specimen in Diario Parisiensi jam antea publicatam extare. Peregrinationem suam inivit noster A. 1676 et Genevae Estheram Elysabetham a Waldkirch a secundo a nativitate mense caecam scribere docuit, Burgdigalae vero Tabulas gnomonicas universales (nondum quidem editas) condidit. Peragrata Gallia domum redux A. 1680 suasu Amicorum R. P. Mallbranchii celeberrimum opus de inquirenda Veritate et Cartesii philosophica primum coepit evolvere, hujusque philosophandi modum potius quam principia approbavit, et postquam illucescentis cometae ingenii quendam lusum de futura ejus apparitione vernacula lingua edidisset, secundo Rheno Belgium petiit. Illic sanioris Philosophiae et demonstrationum mathematicarum dulcedine primum inescatus, Elementa Euclidea docuit prius quam didicit, abditaque Geometriae Cartesianae repetitis aliquoties conatibus penetrare coepit, mox etiam Conamen suum de motu Cometarum in latinum transtulit ac multo quam prius auctius edidit, Tractatumque suum egregium de Gravitate Aetheris conscripsit. Hinc perlustrata Flandria, Brabantia, Caletum usque pergens, in Angliam trajecit, ubi salutatis Illustri Boylio aliisque Celeberrimis Viris, Congregationi hebdomadariae Academicorum augendis majoremque ad perfectionem perducendis scientiis institutae senel interfuit, dein mari Hamburgum vectus per Germaniam recto tramite Patriam repetiit, et paulo post brevi excursu Helvetiae cantones invisit.

Patriae redditus A. 1682 eo studia sua impendit, ut publico prodesset, quem in finem aliquot aestates Collegium quoddam Experimentale Physico-Mechanicum aperuit, eoque primus rerum harum pulcherrimarum in Academia Basiliensi Auctor et Evulgator extitit. Profecturus postea Heidelbergam, ubi vicaria ejus in docenda Mathesi desiderabatur opera, domi retentus est per subse-



quens Matrimonium quod A. 1684 contraxit cum Stupanorum Medicorum suo tempore non incelebrum Nepte et Pronepte, e qua geminae Proles masculae et foeminae Parens factus. Tum vero mathematica demum serio tractare instituit, praecipuosque Autores et pro se legere et inter legendum aliis explicare coepit, unaque docendo et meditando sic profecit ipse, ut interioris Geometriae adyta non tantum brevi recluderet ac praestantissima tum Veterum, tum Recentiorum inventa sibi plana perspectaque redderet, verum etiam propriis inventis Scientiam quotidie magis magisque locupletaret ac perficeret. Mortuo postea Celeberr. Petro Megerlino J. U. D. et Mathem. apud Basil. Prof. ejus in locum unanimi Procerum calculo suffectus est A. 1687 d. 15 Febr. Spartam sic nactus genio suo et studiis convenientem, magno cum applausu et honore exornavit, omnibusque deinceps Academicis Dignitatibus atque inter eas Rectoratu Universitatis semel, et Philosophici Ordinis Decanatu ter pari cum successu et dexteritate omniumque applausu functus est. In sua statione operam suam studiosae juventuti ita commo-davit, ut nulli eam expetenti denegarit, quamdiu corporis id vires permiserunt; hinc plures Exteri tanti Viri fama allecti Basileae ad-volarunt, docta ejus institutione fruituri. Mira in docendo pollebat facilitate, suaque dexteritate difficillima quaeque Auditoribus suis ita propinare novit, ut plane nescirent, ludone an somno ea arcana didicerint. Academicis quoque debemus exercitiis egregium ejus tractatum de Seriebus infinitis, in quo abdita nobis pandit geometriae mysteria. Indies sic novis inventis augere perrexit Geometriam, eaque cum in Actis Eruditorum Lipsiensibus, tum in aliis eruditorum Diariis cum publico communicavit, quibus ita se exteris commendavit, ut A. 1699 non tantum Regiae Scientiarum Academiae Parisiis et A. 1701 Berolini utriusque noviter tum in-stauratae praeter omnem spem suam et expectationem cum Inge-niosissimo Fratre fuerit adscriptus, verum etiam tum Natalium splendore, tum eminentiorum munerum dignitate Nobilissimi Viri, Illustrissimus Dominus Rogerus Brulartus, Marchio de Puyzeult et Silleri etc. etc. Magni Galliarum Regis ad Helveticam Gentem Legatus Excellentissimus, et Illustrissimus Dominus Gulielmus Fran-ciscus de l'Hopital Eques, Marchio S. Memii et Montelerii, Comes Antremontii, Dominus in Ouques, la Chaise et le Beau etc. etc. dum viveret excellentissimus Geometra, benevolentia sua insigni eum dignati sint. Cum Celeberratissimis pariter in Republica lite-

raria Viris, inter quos brevitati studentes heic loci tantum nomi-nabimus Illustrissimum Dn. Leibnitium Sereniss. Electoris Brunsvic. Consiliarium status et Societatis Berolinensis Praesidem et Pari-siensis ac Londinensis Socium, Dom. Ottonem Menckenium in Academ. Lips. Profess. Celeberr., Dn. Petrum Varignonium e Regia Scientiar. Academia et Matheseos Profes. famigeratiss., Dn. Nicolaum Fatium Duillerium Regiae Londinensis Societatis sodalem digniss. arctam Amicitiam coluit crebrisque ab iis exhilarabatur literis. Verum enimvero aliis inserviando se ipsum consumsit, nam continuis suis meditationibus totque insomnibus noctibus, quibus re-conditoris Geometriae recessus perscrutando publico prodesse studuit, corporis contra vires ita debilitavit, ut varii periculosique morbi cum quibus conflictatus est, insequi sint; podagrae enim, a qua a multo jam tempore vexabatur, febris tandem accessit hectica cum praecedente tussi perquam violenta, quae cum indies magis magisque augetur, nullam Ipsi reconvalescendi spem reliquit; unde omnibus in domo sua dispositis, mortis meditationi se totum tradidit sicque 16<sup>to</sup>, ut dictum, Augusti aerumnosam hanc vitam cum meliore commutavit. Paucis ante postremum diebus Amicos rogavit ut Spiralem Logarithmicam circulo inscriptam cum epigrapha: Eadem mutata resurgo, sepulchri sui saxo insculpi curarent, ad insignes proprietates quas primus ei Curvae inesse deprehendit alludens, cum ea se non solum sui evolutione generet, sed etiam sui ipsius Caustica existat, seque adeo ipsam post varias mutationes de novo producat; hacque in re Celeberr. noster Defunctus Archimedis exemplum imitari voluit, qui insigne suum inventum de proportionem Sphaerae ad circum-scriptum Cylindrum tumulo suo inscribi jussit.

Quantum ad opera beati nostri Professoris attinet, praeter jam memorata viz. Tractatus de Cometis et de gravitate aetheris, ut et Tabulas Gnomonicas Universales cum dilucidis praec-ceptis ad praelum paratas, meditationum ejus reliquarum magna pars Diario Parisiensi et Actis Erudit. Lips. inserta legitur, pars etiamnum pressa latet. Inter caetera novam rationem metiendi nu-bium altitudines, et ponderandi sub aqua aeris adinvenit, paralogis-mum in illo ponderando per vesicam commissum demonstravit; Contactus, quem vocant, Osculi naturam plenius excussit. Imprimis autem commemorari hic meretur Calculus differentialis, quem propria meditatione cum Cl. Fratre ita sibi familiarem reddidit ac

etiam perfecit, ut Excell. ejus Inventor, Ampl. Leibnitius, ulro fassus sit, novum hunc Calculum Clarissimorum Bernouilliorum aequae ac suum dici mereri, illius enim subsidio Loxodromicas Tabulas in Tangentium Canone latere ostendit, Lineas Mechanicas absque quadraturis per simplices Tractorias construxit, Minimum Crepusculum determinavit, Portionem Superficie Sphaericae dato cuivis plano aequalem assignavit, nec non lineam Celerrimi Descensus, resistentias corporum motorum in fluido, et fluidorum contra-actionem in solida supputavit, lineas mediarum directionum, Velocitates item et declinationes navium invenit, aliaque plura. Radii nempe Visualis per medium inaequaliter densum transeuntis, velique vento inflati curvaturas exhibuit, indeque regulas ad artem nauticam utilissimas confecit. Curvam elasticam et huic supparem quam linteum fluido impletum refert; Curvam item Accessus et Recessus aequabilis ad punctum datum elicit et Problemata de linea in superficie conoidis brevissima et de Figuris Isoperimetris absolvit. Relationem illam adeo simplicem inter Evolutas et Causticas, maximi momenti inventum, indeque spirae mirabilis mirandas proprietates primus detexit, et methodi tangentium inversae nec non serierum infinitarum artificium multum promovit. Problemata illustria de quadrisectione Trianguli scaleni per duas normales rectas, et de secundo generaliter circuli arcu in data ratione per communem Geometriam soluta dedit. Editionem novissimam Geometriae Cartesianae, dum curabat ipse, notis quibusdam tumultuariis auxit. Artem Conjectandi meditabatur in lucem edendam, eamque pene ad umbilicum deduxerat, cum praematura mors eum occuparet; in ea arte ratiocinia in ludis alicui ad moralia, civilia et oeconomica applicare docet, soluto eum in finem singulari quodam Problemate, quod tum utilitatis amplitudine, tum inventionis difficultate ipsi circuli Tetragonismo longe praeponebat, qui si maxime inveniretur, exigui usus esset\*).

\*) Für diesen letzten Abschnitt von den Worten an: Quantum ad opera beati etc. hatte Leibniz gesetzt: Inventa ejus plurima et pulcherrima, quae in Actis Eruditorum et alibi extant, non recensemus, addere contenti, cum magnum seculi nostri inventum Analysis infinitesimalis Leibnitiana prodisset, nostrum de usu ejus et applicatione praesertim ad Physico-Mechanica, ex facili exemplo ab

## XIV.

## Hermann an Leibniz.

Epistolam meam 28. Octobris praeterlapsi cum inclusa Clarissimi Jacobi Bernoulli biographia a Domino Schreckio Augusta Tibi transmissam esse spero: nunc vero non expectata ad eam responsione gravissimis Amplitudinis Tuae negotiis paucis lineis obstrepere cogor, ut Cl. nostri Battierii ICti futuro die lunae orationem funebrem Cl. Jac. Bernoulli, coram Academia nostra recitaturi, petito, meoque officio satisfaciam. Nam quoniam Oratio illa funebis cum epicediis Fautorum et Amicorum typis mandabitur et Ampl. Tua Cel. nostrum Prof. plurima benevolentia et amicitia prosequuta est viventem, enixe Eam nunc rogamus demortui Domini Professoris Fratres, Cognati et Amici, ut Fautorum epicediis suum addendo hac suae amicitiae, amoris et honoris testificatione dignetur pariter Mortuum, cum nulla plane re memoria ejus magis celebrari certi simus, quam si publice constet Ampl. Tuae Amicitia et Familiaritate eum gavisum fuisse: hocque insigne beneficium, ut et reliqua omnia quavis occasione oblata pro virili demereri studebimus, Deum simul precantes ut Ampl. Tuae vitam longaevam et sanitatem inconcussam in scientiarum augmentum largiri velit.

Clariss. Joh. Bernoullius praeterito die Martis Professionem suam auspicatus est, habuitque perelegantem orationem de Altioris Geometriae nova Analysis ejusque usu et necessitate ad studium physicum. Hisce vale, Vir Consul-tissime et Amplissime, et importunitati meae ignosce etc.

Basileae 21. Novembr. 1705.

autore exhibito (demonstratione scilicet Curvae Isochronae) novam subito lucem hausisse, et in eum Calculum Analyticum excolendum (quem Differentialem, eique reciprocum Summatorium vel Integralem vocant) magno studio et successu incubuisse, eximiis Problematibus solutis, ut inter maximos tanti inventi propagatores ju meritoque haberi possit, Leibnitiusque defuncti Amici et semper lu-gendi memoriae hoc distichon consecrarit:

Infinita Tibi terris Lux fulsit in ipsis,  
Bernoulli, et quisquam Te superesse neget?





## XV.

## Leibniz an Hermann.

Lipsiam misi quae beneficio Tuo accepi pertinentia ad vitam inclyti Viri Jacobi Bernoulli. Fluebat mihi olim venula quaedam poetica, cujus et specimina habentur, sed nunc exaruit; itaque disticho quaeso ut contenti sitis, quo ita celebravi memoriam amici:

Infinita Tibi terris lux fulsit in ipsis,

Bernoulli, et quisquam te superesse neget.

Dabam Hanoverae 24. Decemb. 1705.

P. S. Expecto avide decretum animi Tui intelligere in Negotio Patavino, cui non unam ob causam faveo.

So findet sich der vorstehende Brief abgedruckt in den Memoiren der Berliner Akademie vom Jahre 1757 und daraus in Leib. op. omn. Tom. III. pag. 523. Dass derselbe aber unvollständig ist, geht aus der folgenden Antwort Hermann's hervor. Unter den Leibnizischen Papieren fand sich folgendes Bruchstück, das offenbar mit dem Obigen ein Ganzes gebildet hat:

Ad problema quod poscit, inveniri curvam, ubi portio inter punctum fixum et tangentem, et portio tangentis inter curvam et axem, sunt in ratione data, annote generaliter: Quotiescunque duae Functiones, ut voco, utcunque formatae ex ductu rectorum ad curvam perpendicularium, tangentium, coordinatarum, et ad earum aliquas perpendicularium, parallelarum, bisecantium angulos, aut utcunque secantium rectas etc. sunt in ratione data, problema hoc Tangentium inversum semper potest reduci saltem ad quadraturas.

Elegans est ratio Tua generalis, qua curvam ducere doces, quae transit per puncta data. Potuisses adhuc augere aequationem assumptitiam ad curvam quaesitam, scribendo  $00 + 01x + 10y + 11y + 02xx + 20yy = 0$ , sumendo 00 pro quantitate, unde abest  $x$  et  $y$ , seu pro constante. Interim ex assumptitiis una semper non computanda est arbitrariis. Exempli gratia, sunt tria puncta, fiatque aequatio  $00 + 01x + 10y = 0$ , dico duas tantum in effectu adesse arbitrarias, alioqui liceret rectam ducere per tria puncta data;

haec aequatio est ad rectam. Res meretur prosecutionem; potest enim hinc intelligi, curvae cujus gradus per quot data puncta duci possint.

## XVI.

## Hermann an Leibniz.

Statim post redditam mihi Epistolam Tuam humanissimam inclusum distichon, quod in honorem mortui Dn. Bernoulli condidisti, Cl. nostro Battierio et Viduae Cl. Bernoulli tradidi; verum cum aliis Epicediis typis exprimi nequivit, quod Parentatio Cl. Illius Viri praelo jam exiisset et divulgata esset maximo illorum et etiam meo taedio; non minores tamen cuncti Ampl. Tuae gratias se debere profitentur, pro insigni hoc beneficio quo defunctum nostrum Professorem, ut et totam ejus Familiam afficere haud fuit gravata.

Mirifice arridet generalis Tua Constructio Problematis de transformandis Curvis Algebraicis in alias algebraicas aequalis longitudinis cum proposita, quam ope Ellipsis vel Hyperbolae perficere doces in Epistola ad Cl. nostrum Bernoullium. Quod modus meus duccendi Curvam algebraicam per quotlibet puncta data a Tua Ampl. probetur, facit ut eum aliquo nunc in pretio habeam; et sane illud Problema aliqualem mihi habere videtur utilitatem, quam Tibi tamquam Judici omnium suffragiis in hisce Scientiis Supremo imutale est prolixius exponere. In meis aequationibus incognitarum coefficientium investigationi inservientibus terminum pure cognitum omisi studio, ut viz. in calculo satis prolixo pro determinatione coefficientium saltem eo labore sublevarer dictam quantitatem constantem aut terminum pure cognitum determinandi. Sed ne Ampl. Tuae patientia et bonitate abuti velle videar, hujus epistolii metam hic pono, eam rogicans, ut amore suo atque benevolentia proporro dignetur etc.

Basileae 3. Febr. 1706.



## XVII.

## Hermann an Leibniz.

In postremis meis jam ante octo, vel quod excurrit septimanas hinc dimissis, quas ad Amplitudinem Tuam perlatas esse spero, ex Fardellianis literis retuli, in quonam situ negotium Patavinum consisteret. Alias iterum paucos ante dies a Clariss. Fardella accepi, quibus certiozem me reddit Excell. Academiae Patavinae Reformatores de Vocatione mea ad mathematicam ibi Professionem solenne decretum formasse.

Basileae 14 Apr. 1706.

## XVIII.

## Leibniz an Hermann.

Diu est, quod de negotio Tuo nihil intellexi. Epigrammation in memoriam Bernullianam Lipsienses Actorum Collectores brevi compendio vitae a nobis transmissio adjecere; ita non peribit, si modo tanti est. Nescio an Tibi significaverim V. Cl. Dominicum Gulielminum ad me dedisse literas, quibus significat inter alia, se sententiam de Te rogatum, communicato etiam scripto Tuo, quo nostra contra Batavum objectorem defendis; se vero merito Tibi favere, et pergratum sibi fore si advoceris. Respondi ipsi multa alia interim a Te esse praestita ad scientiae augmentum, quae etiam extent in Actis; interim fortasse proderit Dn. Abbatem Fardellam ex Te intelligere quod de Domino Gulielmino scripsi.

Ex Gallia mihi scriptum est Dn. Saurinum cum Rollio de calculo nostro litigantem typis edi curasse Tuum judicium, simulque V. Cl. Joh. Bernoullii, et meum, sed jubente Dn. Abbate Bignonio suppressimere coactum exemplaria, Bignonio aegre ferente, quod hoc factum esset lite pendente, et judicio jam constituto; quamquam non novum sit etiam post litem in tribunalibus contestatam edi scripta a litigantibus.

Quis Monachus ille Benedictinus, qui de Cathedra Mathematica Tecum certare audet, nescio; an forte quidam est, qui se, ni

fallor, Grandium vocat, et quaedam circa calculum differentialem attentavit utcumque mihi, si bene memini, per Cl. Magliabechium transmissa; sed nihil hac de re affirmare possum.

Curva datae aequalis effici potest modis infinitis per cujusvis formae speculum, imo et per vitrum figurae datae, adeoque catacaustice; sed Ellipsis et Hyperbola hanc praebent commoditatem, quod Tibi nullo opus est Calculo ad definiendam speculi positionem, magnitudinem aut speciem infimam, ut differentia inter fila evanescat. Eleganter notavit Dn. Bernoullius aliquando Ellipsin abire in circulum, seu duo foci coeunt in unum, hoc nempe intelligo fieri si curva in se redeat. Doctissimus Jac. Bernoullius paulo ante obitum inquisierat in Curvas tertii gradus, quas Newtonus etiam determinare aggressus est, idque fecit Libro Newtoni nondum inspecto; putabat plures prodituras curvas quam dedit Newtonus, et jam ultra 30 determinaverat, quas multum adhuc a numeri medietate abesse putabat. Vellem haec aliaque multa egregii Viri meditata non interire, et haeredes vel Tibi vel alteri committere, ut ex schedis ejus utiliora exciperentur in publicos usus. Meretur prosecutionem quod de curva per data puncta transeunte scripsisti. Quod superest, vale etc.

Dabam Hanoverae 15. April. 1706.

## XIX.

## Leibniz an Hermann.

Gaudeo non mediocriter Patavinae Professionis negotium tandem esse confectum. Idem mihi significat Dn. Abbas Fardella, Vir doctrina non minus quam virtute excellens, et qui plurimum in ea re laboravit, utilitatis publicae causa. Ei nunc gratias ago, et plurimum me quoque debere profiteor: ipsi enim uni acceptum ferendum est, non tantum quod proposita res est, sed etiam quod confecta tot difficultatibus superatis, quas facile animo complexi licet. Nescio, an religiosus, ut vocant, Tibi aemulus, non sit P. Guido Grandius, cujus nuper aliquid prodiit in nostro etiam Calculo tentatum, sed ita ut non longe progressum appareat. Multum spero Italiam Tibi debituram, sed Patavium imprimis, quamquam



satis agnoscam perlongum satis tempus Tibi non vacaturum admodum incumbere subtilitatibus. Professores enim saepe captivi juvenum se accommodare, eaque magis docere oportet, quae prosunt discentibus, quam quae splendent inter profectos. Caeterum uti Tibi gratulor honorem et emolumentum, ita propemodum doleo longius Te recedere, quam ut aliquando Te videre sperem, sed meam voluptatem commodo Tuo, imo publico, posthabendam putavi. Spero autem communicatione crebra absentiae damnum levatum iri, nam facilis inter nos esse potest literarum commutatio per Dn. Zanovellum, Agentem in rebus Serenissimi Electoris apud Venetorum Serenissimam Rempubicam. Non dubito, quin subinde aliquid elegans et profuturum meditatus sis; id a Te discere gratum erit. Nobilissimo Battierio, rogo, ut meo nomine gratias agas, quod tam honorifice nostri meminit in S. Oratione de vita insignis Viri Bernoullii; ibidem ait ipsummet defunctum constituisse, quid de schedis suis fieri vellet. Quale id sit, fac quaeso ut sciam, simulque indica si placet, an non impetrari possint in publicos usus. Aliquoties cogitavi, posse Elementa quaedam hujus Analysis confici meliora, quam habentur hactenus, et in eum fere modum, quod ad Cartesii Geometriam factum est; egregia specimina excellentium Virorum adjici; ibi locus foret Analysisibus, quarum fructum ipse Bernoullius p. m. inseruit Actis, analysi non raro suppressa; aliaque id genus accedere possent, de quibus nondum quidquam dedit, veluti de ducenda minima linea in quibusdam superficiebus, de curvarum gradus tertii determinatione. Cogita quaeso hac de re, et si quid ante abitum perficere potes, tenta, tum ut honori defuncti, tum etiam ut profectui scientiae velificemur. Interea vale etc.

Dabam Hanoverae 21. Maji 1706.

## XX.

## Leibniz an Hermann.

Valde cupio nosse an vocatio dudum promissa tandem ad Te pervenerit, aut quo res sit loco? Nec minus desidero subinde particeps fieri meditationum Tuarum; etsi enim sim per alia distractissimus, et toto tempore, quo apud nos legatio Anglica fuerit,

vix cogitare poterim de rebus ad studia pertinentibus, aveo tamen discere beneficio amicorum quid geratur, et a Te praesertim, a quo plurima expecto egregia. Dn. Bernoullius mihi adolescentem alterius fratris filium in nostris studiis laudat. Ita haereditaria haec familiae laus erit. Ait etiam a Te errorem quendam Hiraei, et examen ad Acta Lipsiensia missum; quod si Analysis tuae solutionis non addidisti, peto ut eam mecum communices. Rogavi etiam, ut me paulo distinctius de posthumis Dn. Jacobi Bernoullii doceres; id si vacat, iterum peto. Vellem vel servari loco tuto, vel edi quae id utcunque merentur, uti certe merebuntur pleraque. Quin prodesset etiam Analyses eorum, quae in Actis et alibi edidit, conservari; virorum enim egregiorum ipsas inquisitiones non interire interest. Ex dissertationibus Academicis, quas typis edidit, vidi nonnullas apud Dn. Naudaeum Berolini, sed habeo plane nullas. Dn. Jacobus Bernoullius p. m. paulo ante obitum ad me scripserat, coepisse se indagare lineas tertii gradus, seu quae proximae sunt conicis, et jam computasse ultra 30, adhuc autem superesse multo plures; eam inquisitionem non perire vellem. Quod superest, vale, et me ama, et fac subinde rerum Tuarum fiam certior.

Dabam Hanoverae 15. Jul. 1706.

## XXI.

## Hermann an Leibniz.

Clariss. Fardella mihi non dixit, quisnam ille Monachus Benedictinus esset Professionem Patavinam ambiens, adeo ut dicere non possim, an sit P. Guido Grandus cujus commentarium in Viviana Problemata vidi satis amplum, in quo methodo tantum indivisibilium Cavalleriana utebatur, alter autem ejus tractatus de Logarithmica in Actis nuper recensitus ad manus nostras nondum pervenit; verum ex Actis vidimus Cel. Bernoullius et ego, eum Grandii librum novitate materiae non esse multum commendabilem, cum sola theoremata circa Logarithmicam magno apparatu demonstraret, quae Hugenius Tractatui de Causa gravitatis attexuit, et quae tribus fere lineis calculi differentialis beneficio quam facillime ex-

pediri potuissent, ut in responsione mea ad Dn. Nieuwentiitii Considerationes jam antehac monueram.

¶ Vidisti, Vir consultissime, ex nupero Mense Actorum me non parum a Cl. de la Hire dissentire circa Curvaturam Radii visivi per aërem difformiter densum transeuntis, quam Cycloïdem esse dicit in Commentariis Academiae Parisiensis, et ego curvam esse demonstrare in infinitum abeuntem et asymptota praeditam. Errorem inde proflixisse puto, quod Dn. de la Hire existimavit raritates aëris versus terram decrescere in ratione applicatarum in Triangulo, quod omnino falsum esse constat, cum eae raritates aëris potius in geometrica proportione decrescant, ut in meo Schediasmate demonstravi. Imo quod magis mirandum, si vel maxime ponatur raritates aëris per ordinatas in Triangulo posse repraesentari, non inde tamen Cyclois pro curva Radii Luminosi, sed circulus prohibet, adeo ut omnino concludendum esse videatur, Cl. Hirium nimium festinanter Schediasma suum in publicum emisisse.

¶ Profectus mei nimis tenues sunt, Vir Ex., quam, ut Tu putas, Italiam aut Patavium mihi multum debituram spondere possim; quod autem Ampl. Tua tam benigne de me iudicet, insigni suae erga me benevolentiae ac amori id tribuo. Operam semper dabo, ut praeconcepatae saltem de me opinioni et spei quadantenus respondeam, cum ut toti ex asse satisfaciam, me nimis debilem agnoscam. Scio interim Professoribus Mathematicis plerumque non nisi vulgaria Auditoribus suis esse propinanda et ingerenda, cum perpaucis profundioris Matheseos degustare dapes volupedit. Et in compluribus meis mathematicis Collegiis nonnisi vulgares Geometriae Practicae et Fortificatoriae artis praxes a me lere exiguntur, adeo ut in his etiam aliqualem mihi hoc pacto habitum acquisiverim, quae antea prae analysi aliisque profundioris matheseos speculationibus maxime fastidiveram.

¶ Circa transformationem curvarum in alias aequales statim quoque animadverti, Ellipsim speculi vices subeuntem in circulum abire, quotiescunque transmutanda in se redeat, verum hoc in casu speculi diameter promiscue et pro libitu accipi non potest, sed quidam limites semper sunt observandi. Si v. g. Circulus AJEA (fig. 45) sit transformandus in aliam et aequalem Curvam, radius GA, instituto calculo, major sumendus est quam  $\frac{4AD}{\sqrt{3}}$ , ut Cl. Bernoullius suo calculo itidem invenit, nam si GA aequalis aut minor

esset quam  $\frac{4AD}{\sqrt{3}}$ , nova Curva composita esset ex duabus, quarum una affirmativa, altera negativa esset, quarum summa demum inveniretur Circumferentiae circulari AJEA aequalis, et hac ratione non haberetur una curva finita propositae aequalis, sed summa duarum infinitarum, ut dictum.

¶ Beatum nostrum Jacobum Bernoullium de suis Schedis ita statuisse a relicta Vidua accepi, ut Filio suo Unico, Arti Pictoriae Augustae nunc operam danti, asserventur, quae postea, cum Lutetiam petet, typis ibi exscribi curet, ea saltem quae Cel. Varignon luce publica digna censebit. Spero tamen me aliquid in publicos usus obtenturum post Juvenis hujus Bernoullii hic adventum, qui propediem accidere debet, tyrocinii annis jam dudum effluxis: si voti compos fio, meis partibus non deero, sed ea congeram, quae augmento scientiae conducere posse iudicabo. Non obliviscar etiam determinationes curvarum tertii generis quarum omnes classes diligenter percurrebat, a simplicissimis ordiendo aequationibus ut a.  $ixy = 0$ ; a.  $kxy = 0$ ; b.  $gy^3 = 0$ ; c.  $gy^3 = 0$ ;  $dx^3 \cdot ey = 0$ ;  $dx^3 \cdot fyy = 0$ ; ab hisce ad aequationes 4 dimensionum progrediendo incepit a.  $bx \cdot gy^3 = 0$ ; a.  $bx \cdot ixxy$ ; a.  $bx \cdot kxyy$ ; a.  $cxx \cdot gy^3 = 0$ ; a.  $cxx \cdot ixxy = 0$ , et ita porro pervenit sic progrediendo ad usque 70 aequationes, quas omnes non nisi 34 ad summum diversas curvas designare ostendit, harumque curvarum asymptotas, axes, puncta flexus contrarii aut reversionis, aliaque similia diligenter assignat.

¶ Quantum ad methodum Bernoullianam de ducenda minima linea in quibusdam superficiebus, ut in Conoidibus rectis, illa non diversa multum est ab ea, qua lineam celerrimi descensus antea inquisiverat, et si recte meminero, ita circiter habet. Esto Curva quaecunque ABC (fig. 46) rotata circa AD, quae gignat conoidem ABCFDA, in cuius superficie ducenda sit linea BKH inter eosdem terminos brevissima. Sint EF arcus aequatoris, ABC, AKJ, AHF tres meridiani, BN, KL arculi descripti a punctis B et K; et sunt CD = JD = FD = a, BG = NG = f; KP = LP = g; CJ = m; JF = n; BK = s, KH = u, et tandem NK = HL = p. Quibus positis

$$\begin{array}{l} \text{CD. CJ} :: \text{BG. BN} \quad \text{JD. JF} :: \text{KP. KL} \quad \sqrt{\text{BN}^2 + \text{NK}^2} = \text{BK} \\ a. m :: f. \frac{fm}{a} \quad a. n :: g. \frac{gn}{a} \quad \sqrt{\frac{mmff}{aa} + pp} = s \end{array}$$



$$\left. \begin{aligned} \sqrt{KL^2 + LH^2} &= KH \\ \sqrt{\frac{nnng}{aa} + pp} &= u \end{aligned} \right\} \text{Jam ex hypothesi } \sqrt{\frac{mmff}{aa} + pp} +$$

$\sqrt{\frac{nnng}{aa} + pp} = \text{Min.}$ , unde  $\frac{fm dm}{aas} + \frac{gg ndn}{aau} = 0$ , et quia puncta B, H fixa sunt, erit  $dm = -dn$ , adeoque  $\frac{fm}{aas} = \frac{gn}{aau}$ , hoc est  $\frac{fm}{aas} = \text{constanti}$ . Sint jam  $BG = f = x$ ,  $QC = y$ ,  $CJ = m = dy$ ,

tangens in K vel  $KE = t$ , erit  $KN = \frac{tdx}{x} = p$ , adeoque  $BK = s = \sqrt{\frac{mmff}{aa} + pp} = \sqrt{\frac{xxdy^2}{aa} + \frac{ttdx^2}{xx}}$ , et  $\frac{fm}{s} = \frac{ax^3dy}{\sqrt{x^4dy^2 + aatdx^2}}$

$= \text{const.} = ac$ ; unde elicitur  $dy = \frac{actdx}{xx\sqrt{xx - cc}}$ ; longitudo curvae erit  $= \int \frac{tdx}{\sqrt{xx - cc}}$ . Hanc Methodum universaliorem reddidi, ut in omnibus plane superficiebus conoidicis et non-conoidicis aequaliter succederet; sed ne longiore mea epistola Ampl. Tuae taedio sim, in aliam occasionem eam reservo.

Clarissimi Viri Battierius et Bernoullius me rogarunt, ut cultum suum Tuae Ampl. et officia vicissim deferrem, hieque insignis vir sperat ultimam suam epistolam rite Tibi traditam esse. Hisce vale etc.

Basileae 17 Julii 1706.

**XXII.**  
**Hermann an Leibniz.**

Dn. Moyvraeus in nuperrimis suis ad Cl. nostrum Bernoullium literis egregiam novamque proposuit seriem pro longitudine Circumferentiae circularis mihi proponendam, cujus inventionem tam singularis esse artificii dicit, ut non nisi casu Amicus suus Angelus, seriei Inventor, in id incidere potuerit. Si Diameter Circuli sit unitas, erit Circumferentia

$$= 1, \frac{16}{5} - \frac{4}{239} - \frac{1}{3} \frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3} + \frac{1}{5} \frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5} - \frac{1}{7} \frac{16}{5^7} - \frac{4}{239^7} + \frac{1}{9} \frac{16}{5^9} - \frac{4}{239^9} - \text{etc.}$$

Progressionis hujus celerrime convergentis demonstrationem statim inveni et Dn. Bernoulli ostendi, cui non displicuit. Sit semicirculus AGD (fig. 47) quem tangit recta FA in A, in qua sumto quovis puncto F, et ducta FD semicirculum secante in G, vocentur FA, t; arcus AG, a et diameter = 1, notum est hoc casu fore  $a = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 - \text{etc.}$ , unde si alius arcus AH sumatur et per H ex puncto D linea DH trajiciatur, rectae AF in J occurrens, sit hic arcus AH = b, recta JA = x, fiet iterum  $b = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \text{etc.}$  Vocetur tandem quadrans Circuli q, et fiat  $16a - 4b = 4q$  vel  $2a = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}q$ . Jam pro t talis fractio eligi debet, ut tangens arcus 2a vel 2AG fractione exprimatur, cujus denominator sit duplum numeratoris unitate minutum, adeoque si ponatur  $t = \frac{1}{5}$ , erit tangens  $2a = \frac{60}{119}$ , talis fractio ut requiritur: tangens autem arcus  $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}q$  erit per theoremata, quod in nupero Mense Junio demonstravi,  $= \frac{1+x}{2+2x}$ , adeoque

$$\frac{60}{119} = \frac{1+x}{2+2x}, \text{ unde elicitur } x = \frac{1}{239}; \text{ adeoque erit } a = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7} \frac{1}{5^7} + \frac{1}{9} \frac{1}{5^9} - \text{etc.}$$

et  $b = \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \frac{1}{239^3} + \frac{1}{5} \frac{1}{239^5} - \frac{1}{7} \frac{1}{239^7} + \frac{1}{9} \frac{1}{239^9} - \text{etc.}$ , unde substituendo valores arcuum a et b in aequatione  $16a - 4b = 4q = \text{Circumf. fiet}$

$$4q = 1, \frac{16}{5} - \frac{4}{239} - \frac{1}{3} \frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3} + \frac{1}{5} \frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5} - \frac{1}{7} \frac{16}{5^7} - \frac{4}{239^7} + \frac{1}{9} \frac{16}{5^9} - \frac{4}{239^9} - \text{etc.}$$

Quae est ipa formula Moyvraeana. Haud absimiliter inveni Quadrantem Circumf. ponendo Diameter = 1

$$= 1, \frac{1}{2^0} - \frac{1}{7^1} - \frac{1}{3} \frac{1}{2^2} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{5} \frac{1}{2^4} - \frac{1}{7^5} - \frac{1}{7} \frac{1}{2^6} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9} \frac{1}{2^8} - \frac{1}{7^9} - \text{etc.}$$

Innumerae aliae hujusmodi series pari facilitate inveniri pos-



sent hisce vestigiis insistendo, quae omnes mira celeritate convergent, sed hae prae multis aliis simpliciores videntur eo quod numeratores fractionum ubique sint iidem.

In Schediasmate meo de Curvatura Radii luminosi omnia, ut vidisti, demonstravi, excepta mea constructione pro unda Hugeniana, vel Synchrona DV (Fig. 3. Mens. Junii Act.). Supposui primum omnes curvas Refractionis FD, FV provenire eodem modo ac si mobile aliquod in F impulsum secundum diversas directiones AF, ΔF, cum celeritatibus AF, PH, RS designatis per applicatas in Logarithmica APR, easdem describeret. Jam si PH = u, RS vel ΔF = l, positis reliquis ut in Actis monui, erit tempus per FD

$$= \int \frac{aadu}{uu\sqrt{aa-uu}} = \frac{\sqrt{aa-uu}}{u}; \text{ tempus vero per FV} = \frac{a\sqrt{aa-l}}{bl}$$
$$\frac{\sqrt{bb-aa}}{b} = \frac{\sqrt{aa-uu}}{u} = \text{temp. per FD}; \text{ unde si fiat } \sqrt{bb-aa} = c \text{ et } p = \frac{b\sqrt{aa-uu}}{u}, \text{ erit etiam } l = \frac{ab}{\sqrt{bb+2cp+pp}}$$

Caeterum ignosce, Vir Excellentissime etc.  
Dabam Basileae 21 Augusti 1706.

XXIII.

Leibniz an Hermann.

Mire placet Tua deductio novae et promptioris appropinquationis ex serie, quae arcus valorem per tangentes exhibet, quam a me primum inventam credo non ignoras. Nuper Amicus ad me scripsit, et dubitavit, an nostra methodus de maximis et minimis applicari possit ad puncta regressus, quale in figura 48. Nam ibi tangens proprie est CE, non recta parallela axi. Interim idem ait methodum Cartesii et Huddenii in hoc casu locum habere. Respondi methodum Huddenii non esse nisi casum particularem methodi nostrae, cum scilicet non nisi una est variabilis, et nulla irrationalis variabilem comprehendens, et eadem demonstratione niti, qua nostram. Caeterum Methodum nostram omnino hic quoque locum habere, nam si linea ABCD revera una est (non duae prorsus diversae se tangentes in C), concipi potest tanquam in figura 49,

ubi saccum quandam regressus format, ubi manifeste locum habet Methodus nostra in puncto K. Sed saccus ille in punctum evanescentis dat casum figurae 48. Haec etsi non vacaverit experiri in exemplis, vera tamen esse non dubito.

Gratias ago, quod significas quae Dn. Fardella de me scripsit. Spero Dn. Bernoullium nostrum optime valere, et meas literas accepisse. Vereor ne Suecorum in Saxonia irruptio res Lipsienses omnes, et inter eas Acta Eruditorum turbet. Nuper illic misi pauca Davidi Gregorio reponenda, qui in suis Astronomiae Elementis oppugnavit meam motuum coelestium explicationem, sed vi ejus non bene intellecta. Fortasse non responderem, nisi eadem opera emendandum aliquid in meis succurrisset, quamquam emendatio non tam ad rem, quam ad modum enuntiandum pertineat, quem reddo rotundiorum. Gregorius contra vortices paratragoediarum, sed ego ostendo talem vorticum motum concipi posse et ex meis consequi, qui motum solidi in liquido sic moto non turbet, imo qui potius ex conspiratione utriusque necessario oriatur. Flamsteadius in eo jam est, ut 30 annorum observationes edat sumtu Admiralitatis Anglicanae. Vellem possint etiam edi observationes Cl. Kirchii, qui Astronomus est Regiae Societatis Berolinensis, quas etiam a 30 et amplius annis instituit. Vereor ne rerum Europaeorum mutatio ingens noceat Academiae Regiae Parisinae. Nuper hic fuit Dn. Gundelsheim, Medicus Regis Borussiae, qui cum Tournefortio plantarum causa in Oriente fuit, omnes Archipelagi insulas et totum dextrum Maris Euxini littus lustravit. Ait observationes ipsorum edi debere. Anglus doctus huc attulit elegantem librum Domini Gulielmini de Salibus, qui valde probabilius tueretur, sales non transformari, quod mihi utique Leuwenhoekii observationibus rationi consentaneum visum est, cum figurae maneat in summa illa exiguitate, quam microscopia ostendunt. Illud tamen cum ipso affirmare non ausim, ad atomos usque insecabiles persistere, ac ne a natura quidem transmutari posse. Vale, et me ama etc. Dabam Hanoverae 17. Septemb. 1706.